

REOLOGICZNE, MECHANICZNE I OPTYCZNE WŁASNOŚCI POLIMETAKRYLANU METYLU  
W WARUNKACH ZŁOŻONEJ HISTORII OBCIĄŻENIA<sup>1)</sup>

ANDRZEJ DRESCHER, BOGDAN MICHAŁSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Materiały modelowe czułe optycznie, stosowane w badaniach analizy naprężeń, należą do różnych grup stałych polimerów wielkocząsteczkowych. Cechą charakterystyczną polimerów jest zależność ich własności mechanicznych od czasu. Przejawia się to we wzroście odkształceń przy stałym naprężeniu w próbie pełzania, spadku naprężeń w próbie relaksacji, jak również zależności charakterystyki  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  od prędkości odkształcenia. Podobnie badania w warunkach zmian cyklicznych czy dynamicznych wykazują efekty opóźnienia fazowego i lepkiego tłumienia. Efekty te zależą od wartości naprężeń lub odkształceń, jak i temperatury.

W zakresie małych naprężeń czy odkształceń, kiedy zachowanie się polimerów jest liniowe, istnieje bogaty materiał doświadczalny i dobrze opracowane teoretyczne podstawy opisu. Znacznie mniej są poznane efekty fizycznie i geometrycznie nieliniowe. Tym ostatnim efektom poświęca się obecnie coraz więcej uwagi.

Lepkosprężystym, mechanicznym własnościom polimerów towarzyszy zazwyczaj zależność ich cech optycznych od czasu. Ten ujemny efekt w badaniach modelowych stanu naprężenia ciał sprężystych jest zwykle omijany przez realizację niewielkich wartości naprężeń w badanych modelach, kiedy wpływ czasu może być pominięty. Wzrost zainteresowania możliwością wykorzystania materiałów czułych optycznie do badania rzeczywistych materiałów poza zakresem sprężystym — przez wykonanie czułych optycznie pokryw — jak i rozwój badań na modelach ciał sprężysto-plastycznych (fotoplastyczność), czy lepkosprężystych, spowodował konieczność dokładniejszego poznania ich cech z uwzględnieniem wpływu czasu. Spośród wielu prac można tu wymienić [1, 2, 3, 7, 11, 15, 17, 18, 21]. Przewagę stanowią prace operujące podejściem fenomenologicznym. Fizyczna interpretacja zjawisk obserwowanych poza zakresem sprężystym nie jest dotychczas całkowicie wyjaśniona. W analizie fenomenologicznej dają się wyróżnić dwie grupy opisu:

a) opis empiryczny,

b) opis oparty na pewnym modelu ciała, ważnym dla dowolnego stanu odkształcenia czy naprężenia.

W niniejszej pracy podjęto próbę fenomenologicznego opisu efektów mechanicznych i optycznych polimetakrylanu metylu (metaplex) poddanego działaniu wysokich naprężeń.

<sup>1)</sup> II nagroda na ogólnopolskim konkursie na prace doświadczalne z mechaniki, zorganizowanym przez Oddział Gliwicki PTMTS w 1970 r.

Rozważania przeprowadzono w oparciu o badania doświadczalne jednoosiowego rozciągania przy zadanej historii naprężenia — pełzaniu.

Badaniom cech mechanicznych polimetakrylanu metylu poświęcone są m.in. prace [2, 8], a cech optycznych [2]. Prace te dotyczą jednakże albo opisu empirycznego, albo prostych programów obciążeń, czy też niewielkich wartości naprężeń. Odnosi się to także do większości badań przeprowadzonych na innych materiałach czułych optycznie.

W niniejszej pracy zwrócono szczególną uwagę na zbadanie wpływu złożonej historii obciążenia i możliwość opisanie zaobserwowanych efektów w ramach ogólnej koncepcji związków fizycznych ciał z pamięcią.

W pracy ograniczono się do zagadnienia jednowymiarowego. Zaproponowane podejście może być jednak rozszerzone w dalszych pracach na stany złożone.

Użyty materiał — polimetakrylan metylu — nie jest stosowany na czułe optycznie pokrycia i modele pracujące w zakresie plastycznym. Wydaje się jednak, że przeprowadzone w pracy badania i sposób ich analizy mogą być pomocne w badaniach takich materiałów jak celuloid i żywice epoksydowe, pracujących poza zakresem czysto sprężystym.

## 2. Opis doświadczeń

Badania przeprowadzono na wyciętych z jednej płyty próbkach o kształcie «wiosełka», przy zachowaniu stałego kierunku wycinania próbek. Długość części prostokątnej próbki wynosiła 120 mm, a jej przekrój  $10 \times 5$  mm.

Badane próbki zostały umieszczone w przestrzeni pomiarowej polaryskopu o rozproszonym źródle monochromatycznego światła sodowego. Żądany program jednoosiowego rozciągania realizowano za pośrednictwem układu dźwigniowego zapewniającego płynne przykładanie i zdejmowanie obciążenia. Badania przeprowadzono w temperaturze pokojowej.

Efekty mechaniczne — osiowe wydłużenie próbek — mierzono za pośrednictwem ekstensometru zegarowego Schoppera o bazie pomiarowej 50 mm i działce elementarnej  $1/100$  mm. Efekty optyczne — dwójłomność wymuszoną — mierzono prostopadle do szerszego boku przekroju próbki metodą kompensacji goniometrycznej Sénarmonta. Dokładność tej metody szacować można na około 0,02 rzędu izochromy. Pierwszy pomiar efektu optycznego i wydłużenia próbki wykonywano po upływie jednej minuty od zmiany obciążenia, a następne pomiary po upływie 2, 5, 15 i 30 minut oraz 1, 2 i ewentualnie 4 godzin. Wszystkie badane próbki wykazywały nieznaczny, wstępny efekt optyczny około 0,2 rzędu izochromy. Stwierdzono, że kierunek odkształceń wstępnych był stały i równoległy do podłużnej osi próbek. Efekt ten uwzględniono w pomiarach.

Doświadczenia wykonano dla złożonych programów obciążeń obejmujących pełzanie aktywne przy stałym naprężeniu, pełzanie odwrotne po zdjęciu obciążenia i pełzanie dodatkowe po ponownym przyłożeniu obciążenia. Wartości zastosowanych naprężeń oraz czas ich trwania przedstawia rys. 1a i b. Maksymalny czas trwania doświadczeń przy stałym obciążeniu wynosił 240 min. Odciążenie wykonywano dla czasów  $t_1 = 30, 90$  i 180 min., a ponowne obciążenie dla jednego czasu  $t_2 = 180$  min.

Zastosowane programy obciążenia można podzielić na trzy grupy opisane zależnościami:

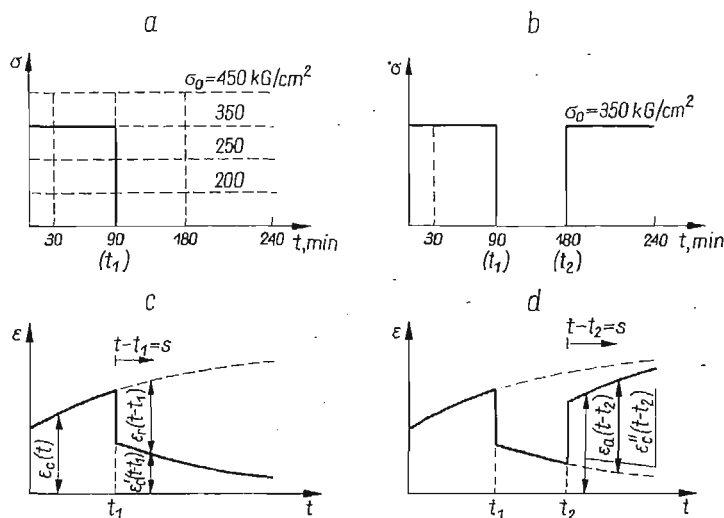
$$(2.1a) \text{ I. } \tau \leq 0, \quad \sigma(\tau) = 0; \quad \tau > 0, \quad \sigma(\tau) = \sigma_0,$$

$$(2.1b) \text{ II. } \tau \leq 0, \quad \sigma(\tau) = 0; \quad 0 < \tau \leq t_1, \quad \sigma(\tau) = \sigma_0; \quad \tau > t_1, \quad \sigma(\tau) = 0,$$

$$(2.1c) \text{ III. } \tau \leq 0, \quad \sigma(\tau) = 0; \quad 0 < \tau \leq t_1, \quad \sigma(\tau) = \sigma_0; \quad t_1 < \tau \leq t_2, \\ \sigma(\tau) = 0, \quad \tau > t_2, \quad \sigma(\tau) = \sigma_0.$$

Dla każdej wartości naprężenia i jego historii zbadano 3 próbki.

Na rys. 1c i d przedstawiono schematycznie kształt spodziewanych krzywych pełzania



Rys. 1

mechanicznego oraz przyjęte oznaczenia. Z rys. 1c i d wynikają następujące zależności:

$$(2.2a) \quad \varepsilon_r(t-t_1) = \varepsilon_c(t) - \varepsilon_c'(t-t_1),$$

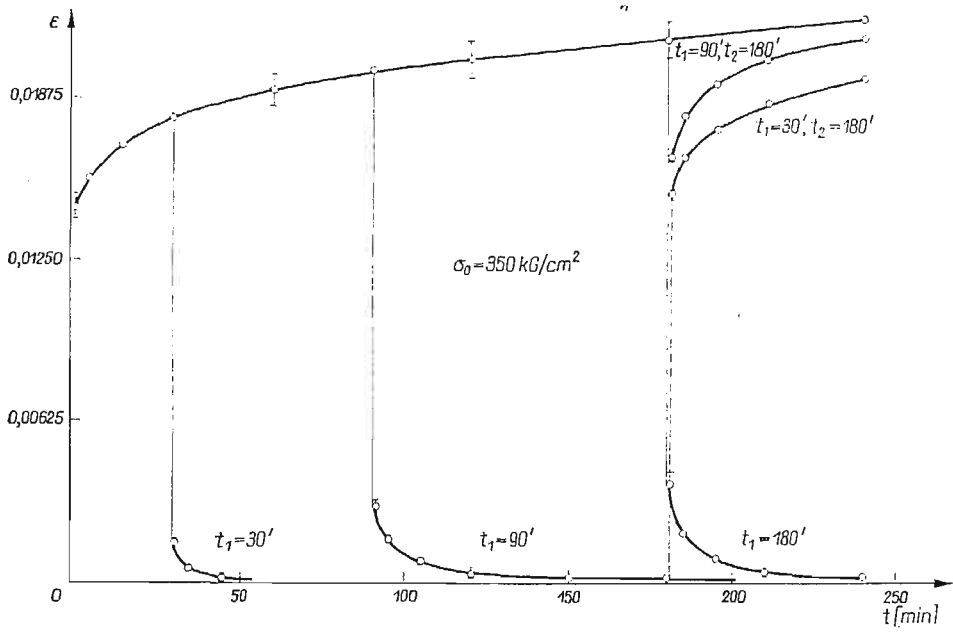
$$(2.2b) \quad \varepsilon_a(t-t_2) = \varepsilon_c''(t-t_2) - \varepsilon_r(t-t_1).$$

Identyczne związki zachodzą dla efektu optycznego — rzędu izochromy — przy przyjęciu oznaczeń  $n_c$ ,  $n_r$  i  $n_a$ .

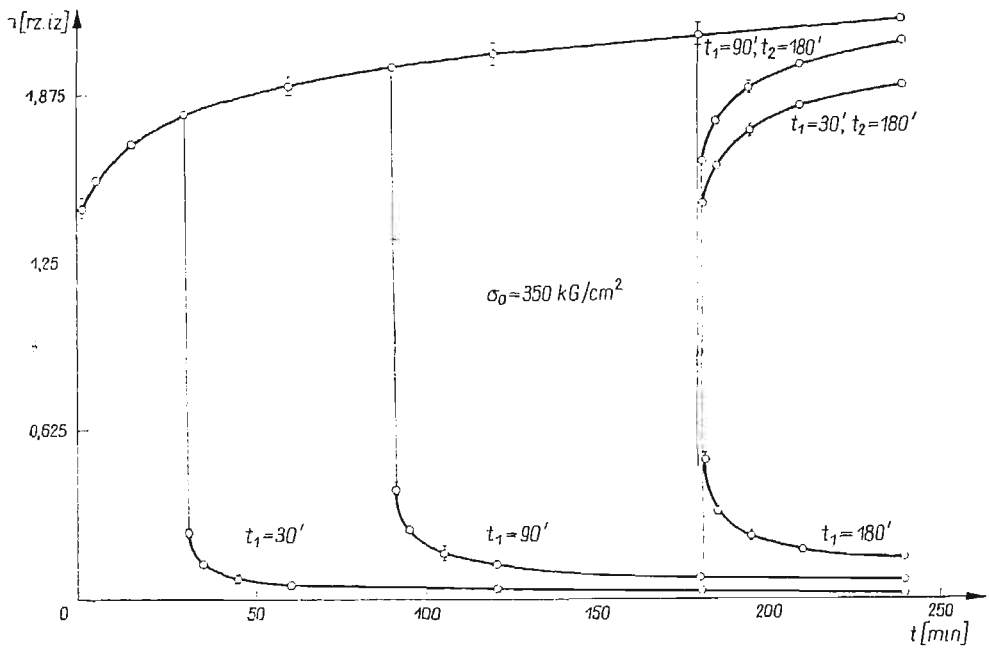
### 3. Wyniki badań i ich analiza

Zarejestrowane w trakcie doświadczeń wartości wydłużeń osiowych i rzędu izochromy pozwoliły skonstruować odpowiednie krzywe pełzania mechanicznego i optycznego.

Na rys. 2 przedstawiono przykładowo krzywe mechanicznego pełzania aktywnego, odwrotnego i dodatkowego w funkcji czasu dla wartości naprężenia  $\sigma_0 = 350 \text{ kG/cm}^2$ . Przedstawione na tym rysunku odkształcenia obliczone jako nieskończenie małe, co jest uzasadnione niewielką ich wartością. Podobną postać krzywych uzyskano dla pozostałych



Rys. 2



Rys. 3

wartości naprężenia. Z rys. 2 wynika, że badany materiał wykazuje wyraźne efekty reologiczne zarówno podczas działania, jak i po zdjęciu obciążenia. Istnienie wyraźnych własności lepkich różnych gatunków PMM wykazano m.in. w [2], [8]. Wartości odkształceń dla czasów  $t = s = 1$  min. można traktować jako natychmiastowe. Porównując odkształcenia odwracalne dla różnych czasów odciążenia można stwierdzić ich wzrost ze wzrostem czasu  $t_1$ . Podobnie odkształcenia dodatkowe są tym większe, im dłuższy jest czas odciążenia  $t_1$ .

Analogiczne krzywe pełzania optycznego dla  $\sigma_0 = 350$  kG/cm<sup>2</sup> przedstawia rys. 3. Rysunek ten dowodzi, że efekty optyczne — dwójtomość wymuszona — mają również charakter reologiczny. Jakościowo są one zupełnie podobne do efektów mechanicznych.

Wyraźny reologiczny charakter cech mechanicznych i optycznych badanego polimetakrylanu metylu nasuwa podstawowe pytanie, czy efekty te mieszczą się w ramach związków fizycznych liniowych względem naprężenia. W odniesieniu do efektów mechanicznych jest to równoznaczne z pytaniem, czy mogą być one opisane związkami liniowej lepkośćożystości. W przypadku pozytywnej odpowiedzi dobrane właściwej postaci prawa fizycznego nie następuje trudności.

Zbadanie, czy zachowanie danego materiału odpowiada zachowaniu liniowego materiału lepkośćożystego najwygodniej jest przeprowadzić w oparciu o zasadę superpozycji Boltzmanna, która dla przypadku jednowymiarowego pełzania wyraża się następującym wzorem:

$$(3.1) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau.$$

Związek (3.1) jest zarazem jedną z równoważnych postaci prawa fizycznego liniowego materiału lepkośćożystego. Występująca pod całką funkcja  $J$  jest zwana funkcją pełzania i ma następującą postać

$$(3.2) \quad J(t, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon(t, \sigma_0)}{\sigma_0}.$$

Dla liniowego materiału lepkośćożystego funkcja pełzania jest zależna jedynie od czasu i reprezentuje własności mechaniczne materiału. Funkcję pełzania można definiować dla dowolnego programu odcinkowo stałego naprężenia, tzn. dla odkształceń aktywnych, odwrotnych i dodatkowych. W efekcie otrzymuje się

$$(3.3) \quad J_c(t, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon_c(t, \sigma_0)}{\sigma_0}, \quad J_r(t-t_1, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon_r(t-t_1, \sigma_0)}{\sigma_0},$$

$$J_a(t-t_2, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon_a(t-t_2, \sigma_0)}{\sigma_0},$$

przy czym dla materiału liniowego wszystkie te funkcje muszą być sobie równe dla odpowiednich czasów  $t = s$  gdzie  $s = t-t_1$  lub  $s = t-t_2$ . Z powyższego wynika, że dla sprawdzenia liniowości wystarczające jest obliczenie odpowiednich funkcji pełzania i ich wzajemne porównanie oraz stwierdzenie czy są one niezależne od naprężenia.

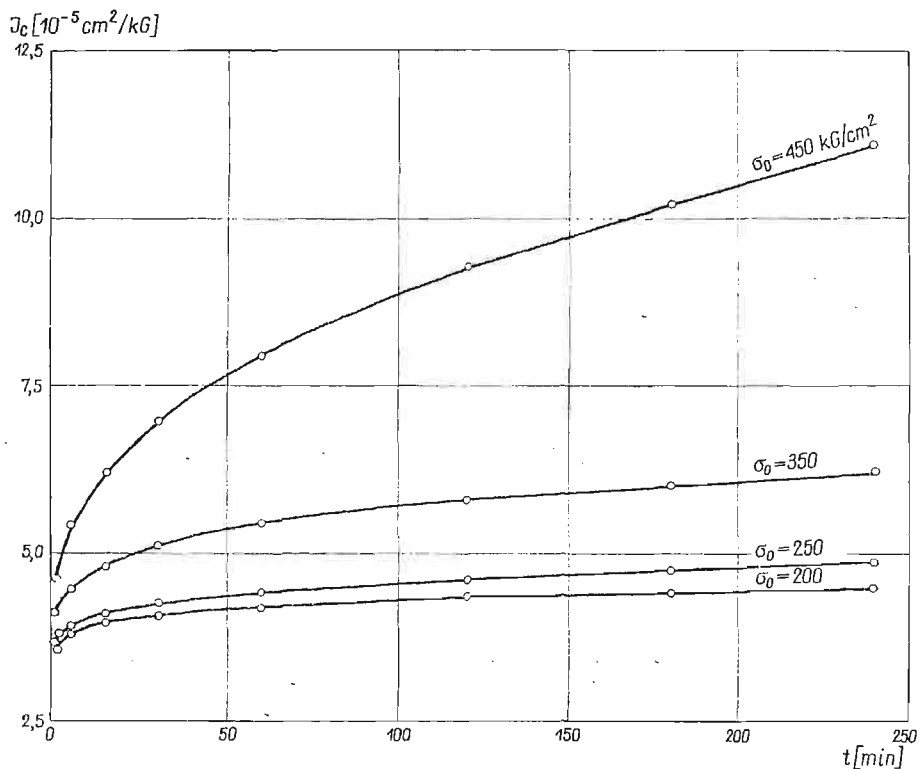
W przypadku analizy efektów optycznych można zdefiniować analogiczne funkcje pełzania optycznego

$$(3.4) \quad K_c(t, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_c(t, \sigma_0)}{\sigma_0}, \quad K_r(t-t_1, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_r(t-t_1, \sigma_0)}{\sigma_0}$$

$$K_a(t-t_2, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_a(t-t_2, \sigma_0)}{\sigma_0}$$

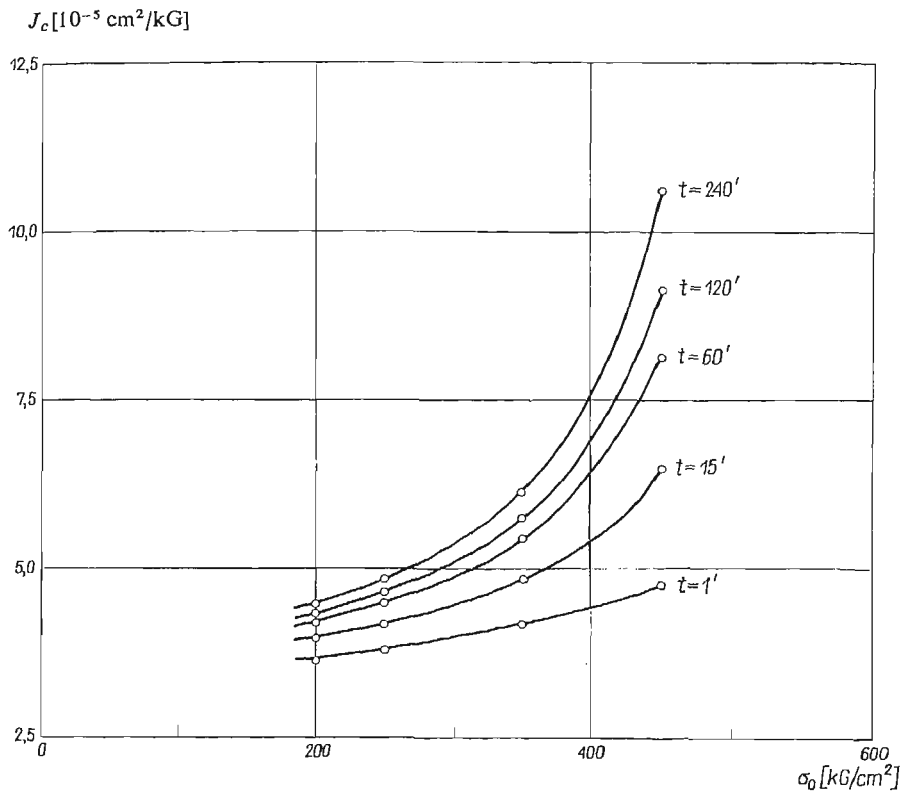
które dla liniowego zachowania się winny być sobie równe i niezależne od naprężenia.

Na rys. 4 przedstawiono funkcję mechanicznego pełzania aktywnego w zależności od czasu. Dla każdego z przyłożonych naprężeń otrzymano inną wartość  $J_c$ , co świadczy

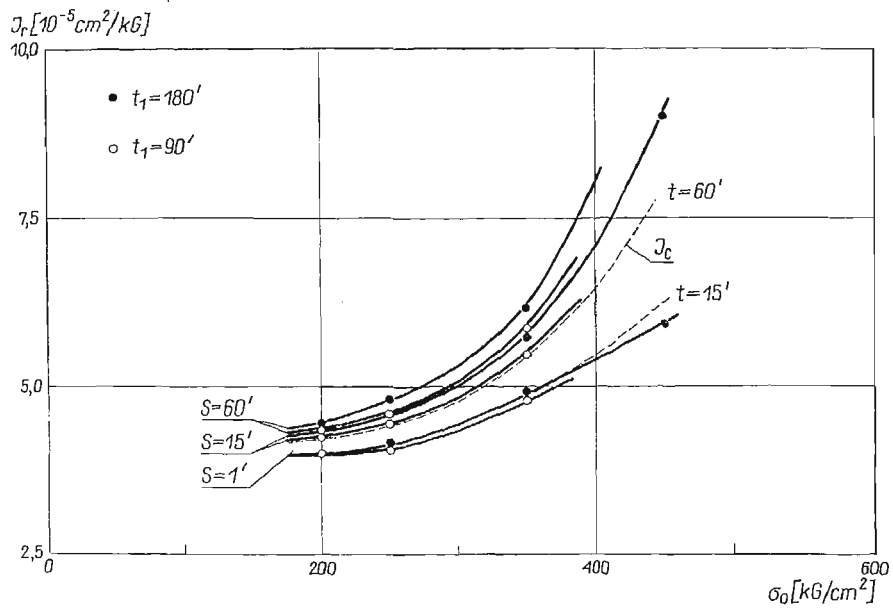


Rys. 4

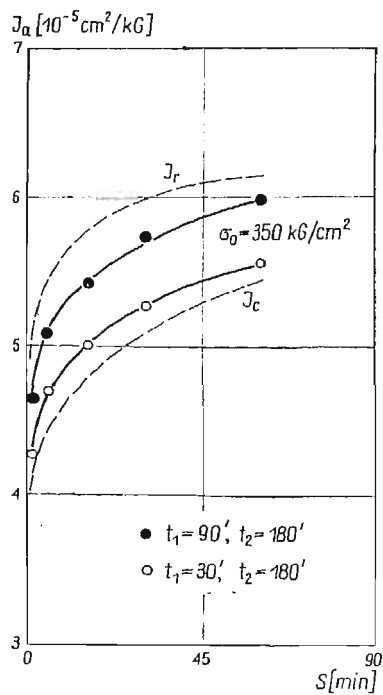
o nieliniowości cech mechanicznych materiału w próbie aktywnego pełzania. Charakter nieliniowości przedstawia rys. 5, na którym wykreślono zależność  $J_c = J_c(\sigma_0)$  dla kilku czasów  $t$ . Dla materiału liniowego przebieg zależności powinien mieć postać prostych równoległych do osi  $\sigma_0$ . Nachylenie krzywych  $J_c = J_c(\sigma_0)$  może być miarą nieliniowości. Zależność funkcji odwrotnego pełzania  $J_r$  od naprężeń, dla dwóch czasów odciążenia  $t_1 = 90 \text{ min.}$  i  $180 \text{ min.}$  przedstawia rys. 6, na którym wykreślono dla porównania funkcje  $J_c$ . Z rys. 6 widać zależność funkcji  $J_r$  od naprężenia jak i jego historii — im dłuższy



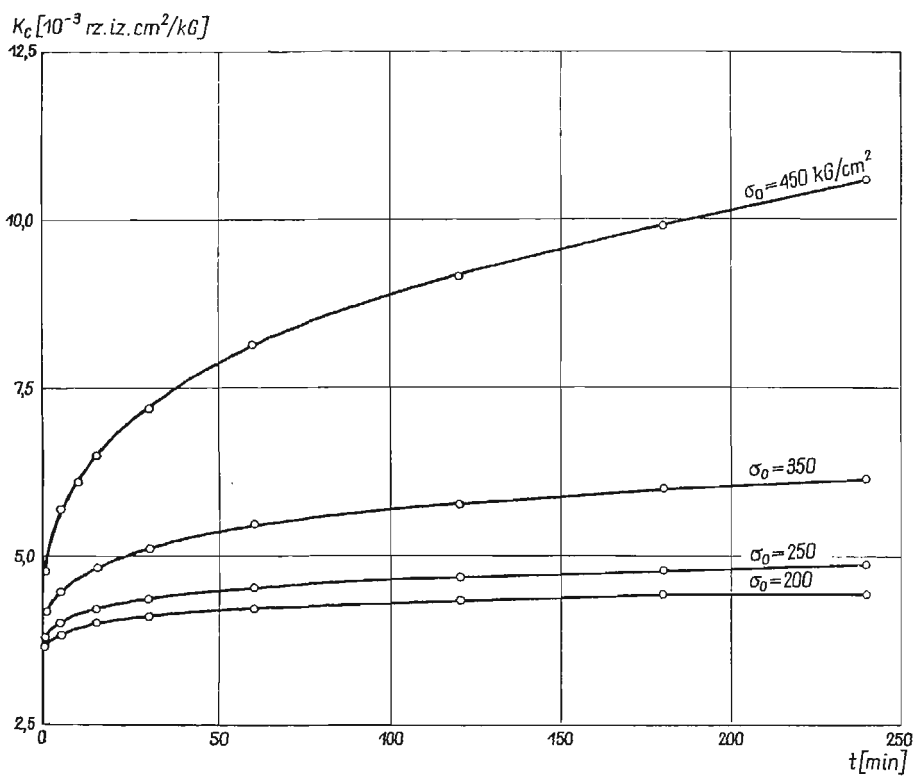
Rys. 5



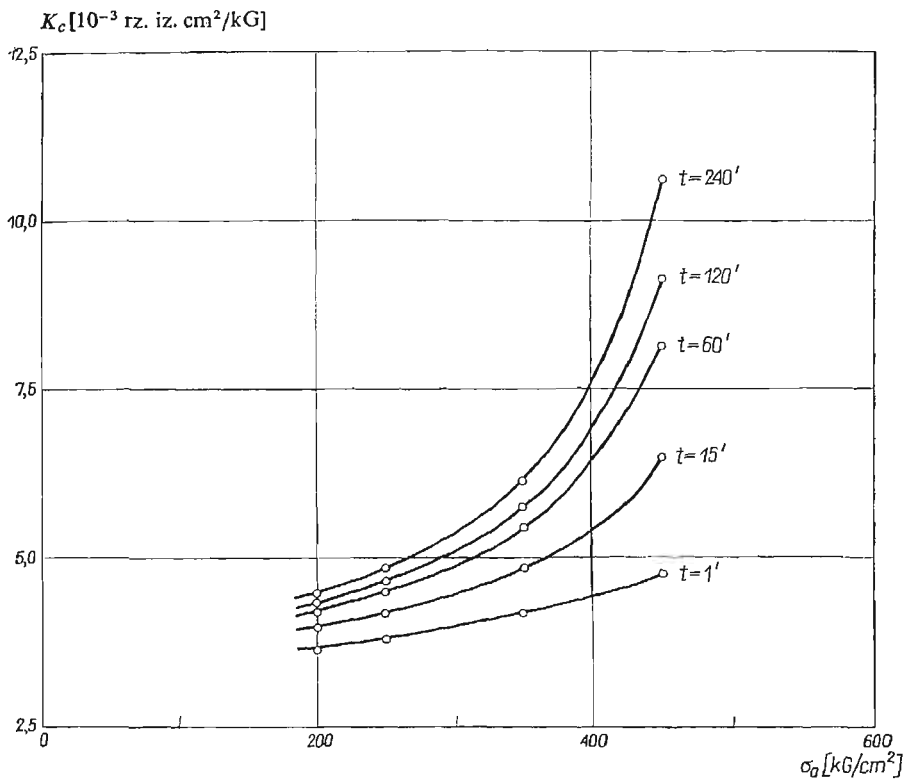
Rys. 6



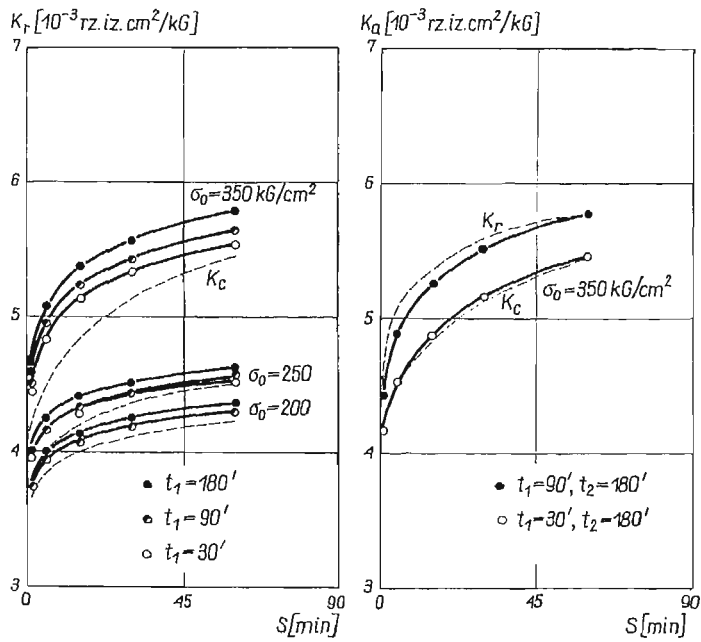
Rys. 7







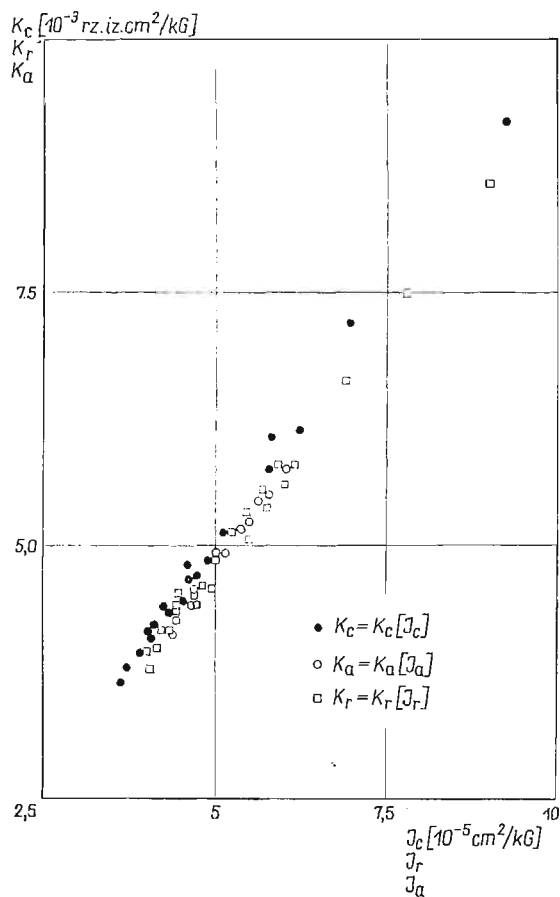
Rys. 9



Rys. 10

jest czas trwania obciążenia tym funkcja  $J_r$  osiąga wyższe wartości. Wartości funkcji  $J_r$  są także większe od wartości funkcji  $J_c$ .

Dla programu dodatkowego obciążenia funkcję dodatkowego pełzania  $J_a$  w zależności od czasu  $s = t - t_2$  przedstawia rys. 7. Na rys. 7 widać, że funkcja  $J_a$  osiąga różne wartości dla różnych czasów odciążenia  $t_1$  i tego samego czasu dociążenia  $t_2$ . Różni się ona także od funkcji  $J_c$  i  $J_r$ .



Rys. 11

Powyższe fakty prowadzą do wniosku, że własności mechaniczne badanego polimetyakrylanu metylu są w zakresie zrealizowanych obciążeń wyraźnie nieliniowe. Nieliniowość jest zależna od wartości naprężenia i jego historii.

Analogiczne wnioski można wyciągnąć rozpatrując dwójłomność wymuszoną materiału w oparciu o przedstawioną na rys. 8 funkcję optycznego pełzania w zależności od czasu, zależność  $K_c = K_c(\sigma_0)$  (rys. 9) i  $K_r = K_r(s)$ ,  $K_a = K_a(s)$  (rys. 10).

Porównując efekty mechaniczne i optyczne dla różnych programów obciążeń łatwo zauważyć całkowitą jakościową ich zgodność. Na przykład odkształcenia odwracalne i odwrotny efekt optyczny są tym większe, im dłuższy jest czas trwania obciążenia. Nasu-

wa to przypuszczenie, że istnieje bezpośrednie sprzężenie pomiędzy tymi efektami. Dla zbadania tego przypuszczenia przedstawiono na rys. 11 zależność odpowiednich funkcji pełzania mechanicznego i optycznego. Punkty na rys. 11, odpowiadające parze funkcji, uzyskano dla różnych naprężeń i różnych czasów nie zaznaczając wartości  $\sigma_0$  i  $t$  na rysunku. Pomijając pewien rozrzut wszystkie punkty układają się wzdłuż jednej prostej przechodzącej przez początek układu. Przyjmując, że rozrzut wyników spowodowany jest jedynie niedokładnością pomiarów, lub pewnymi różnicami poszczególnych próbek, można stwierdzić, że pomiędzy odkształceniami osiowymi a dwójłomnością wymuszoną istnieje wprost proporcjonalna zależność. Identyczny wynik dla polimetakrylanu H 222 otrzymał ABAUD [2], w zakresie odkształceń aktywnych do  $\varepsilon_1 \approx 0,03$ . Należy zaznaczyć, że wpływ zmiany grubości próbki na wartość rzędu izochromy mieści się w granicach dokładności pomiarów.

Jeżeli pomiędzy  $\varepsilon_1$  i  $n$  istnieje proporcjonalność dla dowolnej historii naprężenia to o zmianie dwójłomności powinna decydować jedynie deformacja ciała, tzn. w próbie relaksacji nie może mieć miejsca zmiana rzędu izochromy. Dla sprawdzenia tego wniosku wykonano proste badanie relaksacji zatrzymując odkształcenia w próbie pełzania zaraz po przyłożeniu obciążenia ( $t = 1$  min.), wywołującego naprężenie  $\sigma_0 = 400$  kG/cm<sup>2</sup>. Zaobserwowano minimalną zmianę rzędu izochromy, wynoszącą 2% dla odkształceń około 0,017. Wynik ten, aczkolwiek w badaniu nie rejestrowano naprężeń, a więc relaksacji mechanicznej, wydaje się potwierdzać wniosek uzyskany z badań pełzania.

Należy ponadto zaznaczyć, że powyższa analiza dotyczyła przypadku jednoosiowego rozciągania pryzmatycznego pręta, gdzie porównano efekt optyczny jedynie z odkształceniami osiowymi. Nie zbadano wpływu odkształceń poprzecznych, czy też ogólnie pełnego stanu deformacji ciała. Dla przypadku stałej wartości współczynnika Poissona odkształcenia poprzeczne nie ingerują jednakże jakościowo w przedstawioną na rys. 11 zależność.

#### 4. Matematyczny opis zaobserwowanych efektów

Z przedstawionej w p. 3 analizy rezultatów badań wynika niemożliwość opisanie obserwowanych efektów przez prawa fizyczne liniowe względem naprężenia. Odnosi się to zarówno do cech mechanicznych, jak i optycznych. Zaobserwowana proporcjonalność odkształceń i rzędu izochromy pozwala jednakże na rozpatrzenie postaci prawa nieliniowego jedynie dla jednej z tych wielkości; będzie ono takie same i dla drugiej z dokładnością do współczynnika proporcjonalności. Poniżej ograniczymy się do opisu cech mechanicznych.

Złożone, nieliniowe własności mechaniczne stałych polimerów w badaniach pełzania stanowiły przedmiot szeregu prac doświadczalnych i teoretycznych [4, 6, 9, 13, 22]. Zasadniczym ich celem było poznanie charakteru nieliniowości oraz podanie związku fizycznego opisującego zaobserwowane efekty. Opierając się na tych pracach, za najogólniejsze prawo fizyczne prostego materiału lepkosprężystego z pamięcią<sup>1)</sup> można uznać, dla przy-

<sup>1)</sup> Materiał prosty zdefiniowany jest jako materiał, dla którego tensor naprężenia  $F_{ij}$  w danej chwili  $t$  zależy jedynie od historii gradientu deformacji  $F_{ij} = \frac{\partial x_i(X, \tau)}{\partial X_j}$  (por. np. [16]).

padku jednowymiarowego, następujący związek:

$$(4.1) \quad \varepsilon(t) = G \left[ \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \right]_0^t,$$

gdzie  $G$  jest funkcjonałem, a  $\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}$  prędkością zmiany naprężenia. Jeżeli funkcjonał  $G$  jest ciągły i liniowy otrzymujemy całkową reprezentację Boltzmanna liniowego materiału lepkosprężystego (3.1). Dla funkcjonału ciągłego i nieliniowego GREEN i RIVLIN [5] zaproponowali następującą aproksymację funkcjonału  $G$ , będącą nieskończonym szeregiem całek wielokrotnych

$$(4.2) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t J_1(t-\tau_1) \dot{\sigma}(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t J_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \dot{\sigma}(\tau_1) \dot{\sigma}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \dots + \int_0^t \dots \int_0^t J_i(t-\tau_1, \dots, t-\tau_i) \dot{\sigma}(\tau_1) \dots \dot{\sigma}(\tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_i + \dots$$

Sens fizyczny wyrażenia (4.2) można wyrazić następująco: kolejna przyczyna  $P_i$ , występująca w chwili  $t_i$ , zmienia efekt wywołany następną przyczyną  $P_{i+1}$  występującą w chwili  $t_{i+1}$ . Pierwsza całka określa liniowy efekt działania przyrostów naprężenia  $d\sigma(\tau_i)$ , druga całka złożony efekt działania przyrostów  $d\sigma(\tau_i)$  i  $d\sigma(\tau_{i+1})$ , itd. Jądra całkowe  $J_1, \dots, J_i$  są funkcjami materiałowymi odpowiedniej liczby argumentów  $t-\tau_i$ , nie posiadają jednakże w przeciwieństwie do reprezentacji liniowej żadnej interpretacji fizycznej.

Związek (4.2) znalazł szerokie zastosowanie w opisie nieliniowych cech lepkosprężystych polimerów, zarówno dla przypadku jednowymiarowego, jak i złożonego stanu naprężenia, kiedy postać (4.2) jest znacznie bardziej skomplikowana (np. [10, 13]). Zainteresowanie tym opisem spowodowane jest możliwością ujęcia dowolnie złożonych (ciągłych) efektów nieliniowych względem wartości naprężenia i jego historii. Poprzez odpowiedni dobór liczby i rzędu wyrazów można teoretycznie zawsze dostatecznie dobrze opisać wyniki doświadczeń. Z drugiej jednakże strony przyjęcie znacznej liczby wyrazów, zwłaszcza wyższych rzędów, prowadzi do konieczności przeprowadzenia ogromnej liczby złożonych doświadczeń potrzebnych do wyznaczenia jąder całkowych, liczby doświadczeń praktycznie niewykonalnej. LOCKETT [10] wykazał, że dla przypadku przyjęcia trzech pierwszych wyrazów (4.2) niezbędna jest liczba doświadczeń  $3+3n+1/2n^2$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę chwil  $\tau_i$ , na którą podzielony jest interesujący nas przedział czasu  $t$ , dla którego poszukiwany jest opis zachowania się badanego materiału. W efekcie nie zostały dotychczas w pełni wyznaczone funkcje materiałowe dla żadnego z badanych polimerów. Badania ograniczały się do jakościowej analizy możliwości zastosowania prawa (4.2) dla różnych materiałów, lub wyznaczenia pewnych, szczególnych przekrojów hiperpowierzchni  $J_i$ .

Sytuacja ta spowodowała wzrost zainteresowania pewnymi aproksymacjami (4.2), które ograniczyłyby liczbę niezbędnych badań. Propozycje takie podali m.in. ONAT [14], PIPKIN i ROGERS [19], STAFFORD [20], DRESCHER i KWASZCZYŃSKA [4]. Istotą tych aproksymacji jest albo rozdzielenie cech nieliniowych na pewne kombinacje cech liniowych, albo

dobranie takiej postaci jąder całkowych, by można je było całkowicie wyznaczyć z kilku podstawowych badań.

Poniżej rozpatrzmy możliwość opisu zaobserwowanych mechanicznych efektów w ramach ostatniego sposobu aproksymacji reprezentacji (4.2).

Rozważmy najprostszy program doświadczalny określony związkami (2.1a). Całkując (4.2) przez części otrzymuje się następujące wyrażenie na odkształcenie aktywne

$$(4.3) \quad \varepsilon_c(t, \sigma_0) = J_1(t)\sigma_0 + J_2(t, t)\sigma_0^2 + \dots + J_i(t, \dots, t)\sigma_0^i + \dots,$$

skąd dzieląc przez  $\sigma_0$  otrzymujemy

$$(4.4) \quad \frac{\varepsilon_c(t, \sigma_0)}{\sigma_0} \equiv J_c(t, \sigma_0) = J_1(t) + J_2(t, t)\sigma_0 + \dots + J_i(t, \dots, t)\sigma_0^{i-1} + \dots.$$

Lewa strona (4.4) określa funkcję pełzania aktywnego zdefiniowaną w p. 3. Z (4.4) wynika, że przy przyjęciu określonej liczby wyrazów (4.2), funkcja pełzania aktywnego wynikająca z reprezentacji (4.2) ma względem naprężenia postać paraboli  $n$ -tego stopnia. Z zależności (4.4) można ponadto wyznaczyć postać funkcji materiałowych  $J_i$  dla równych argumentów  $t - \tau_i$ ; funkcja  $J_1$  jest wyznaczona całkowicie. Określenie funkcji materiałowych dla nierównych argumentów  $t - \tau_i$  wymaga, jak wspomniano, innych badań o złożonym programie obciążenia.

Założmy za [20], że jądra wyższych rzędów można przedstawić w postaci iloczynu funkcji jednej zmiennej

$$(4.5) \quad J_i(t - \tau_1, \dots, t - \tau_i) = L_1(t - \tau_1)L_2(t - \tau_2) \dots L_i(t - \tau_i).$$

Z warunku symetrii  $I_i$  względem argumentów wynika, że

$$(4.6) \quad J_i(t - \tau_1, \dots, t - \tau_i) = L(t - \tau)^i,$$

co oznacza, że każde jądro całkowe  $J_i$  jest funkcją tylko jednej zmiennej. Po uwzględnieniu (4.6) reprezentacja (4.2) będzie miała następującą postać:

$$(4.7) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t J_1(t - \tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau + \left[ \int_0^t L_2(t - \tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau \right]^2 + \dots + \left[ \int_0^t L_i(t - \tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau \right]^i + \dots.$$

W efekcie założenia (4.5) do wyznaczenia funkcji materiałowych  $L_i$  wystarcza program doświadczalny (2.1a), dla którego z (4.7) otrzymuje się

$$(4.8) \quad J_c(t, \sigma_0) = J_1(t) + L_2(t)^2\sigma_0 + \dots + L_i(t)^i\sigma_0^{i-1} + \dots.$$

Opierając się na doświadczalnej zależności  $J_c = J_c(\sigma_0)$  można określić właściwą liczbę i rząd wyrazów (4.7) dających żądane przybliżenie wyników badań.

Z powyższego wynika, że przy założeniu do opisu dowolnego materiału prawa fizycznego (4.7) jego własności dla dowolnego programu obciążenia są z góry całkowicie określone związkiem (4.7) i wartościami funkcji materiałowych  $L_i$  wyznaczonych z podstawowego programu badań. Założenie (4.5) nie pozwala zatem na uwzględnienie efektów pojawiających się w coraz to bardziej złożonych programach badań. Jest to podstawowe ograniczenie powyższej aproksymacji ogólnego prawa fizycznego (4.2). Związek (4.7) jest jednakże związkiem nieliniowym zarówno względem wartości naprężenia, jak i jego historii. Można zatem przypuszczać, że opisuje on, przynajmniej jakościowo, szereg efektów obserwowanych

nych doświadczalnie. Zagadnienie to rozpatrzmy poniżej po uprzedniej ilościowej analizie (4.7) dla zrealizowanego programu badań (2.1a).

Opierając się na wynikach badań przedstawiających zależność  $J_c = J_c(\sigma_0)$ , (rys. 5), można zauważyć, że nieliniowość wzrasta gwałtownie dla większych wartości naprężeń. Dla naprężeń niższych od zrealizowanych ( $\sigma_0 < 200$  kG/cm<sup>2</sup>) należy spodziewać się zachowania materiału prawie liniowego. Dla takiego przebiegu zależności  $J_c = J_c(\sigma_0)$  wielomian (4.8) będzie musiał zawierać szereg wyrazów bardzo wysokiego rzędu. Celem obniżenia rzędu wyrazów wprowadzimy dodatkową aproksymację opisu, zaproponowaną w pracy [4]. Aproksymacja ta zakłada możliwość rozdzielenia zachowania się materiału na obszar liniowy i nieliniowy. Granicą obu obszarów jest pewna wartość naprężenia  $\sigma(\tau) = \sigma^*$  niezależna od historii naprężenia i spełniająca rolę stałej materiałowej. Na wykresie  $J_c = J_c(\sigma_0)$  odpowiada to poziomemu przebiegowi krzywych  $J_c$  od  $\sigma_0 = 0$  do  $\sigma_0 = \sigma^*$ .

Zachowanie się materiału w obszarze liniowym  $\sigma(\tau) < \sigma^*$ , określone jest liniową reprezentacją Boltzmanna (3.1). W obszarze nieliniowym zakłada się superpozycję odkształceń liniowych wynikających z historii całkowitego naprężenia  $\sigma(\tau)$  i odkształceń nieliniowych określonych związkiem typu (4.2) dla historii nadwyżki naprężenia  $\sigma(\tau)' = \sigma(\tau) - \sigma^*$ . Prowadzi to do związku

$$(4.9) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t J_1(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^t K_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \dot{\sigma}'(\tau_1) \dot{\sigma}'(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \dots + \int_0^t \dots \int_0^t K_i(t-\tau_1, \dots, t-\tau_i) \dot{\sigma}'(\tau_1) \dots \dot{\sigma}'(\tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_i + \dots$$

Uwzględniając oba założenia upraszczające (4.5) i (4.9), otrzymamy następujący proponowany związek fizyczny ważny dla obszaru nieliniowego:

$$(4.10) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t J_1(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau + \left[ \int_0^t L_2(t-\tau) \dot{\sigma}'(\tau) d\tau \right]^2 + \dots \\ \dots + \left[ \int_0^t L_i(t-\tau) \dot{\sigma}'(\tau) d\tau \right]^i + \dots,$$

gdzie funkcje  $L_i$  mają inne wartości od występujących w wyrażeniu (4.7).

Liczbę i rząd wyrazów (4.10) określono w oparciu o przedstawione na rys. 5 wyniki badań programu (2.1a), dla którego odkształcenia aktywne i funkcja pełzania aktywnego wynikające z (4.10) mają następującą postać:

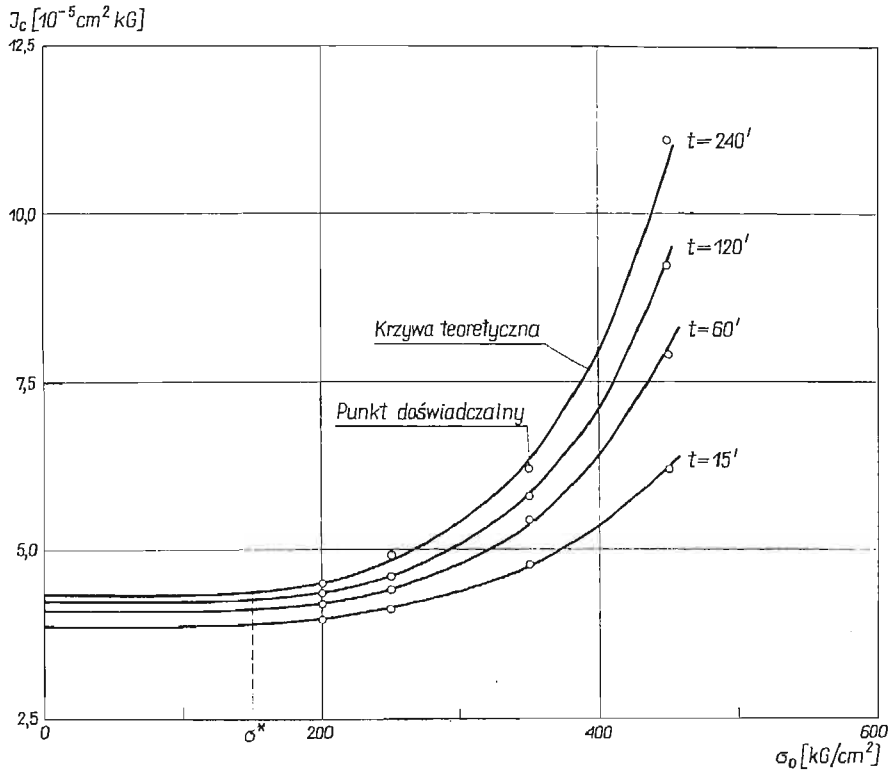
$$(4.11) \quad \varepsilon_c(t, \sigma_0) = J_1(t) \sigma_0 + L_2(t)^2 \sigma_0'^2 + \dots + L_N(t)^i \sigma_0'^i + \dots$$

$$(4.12) \quad J_c(t, \sigma_0) = J_1(t) + L_2(t)^2 \frac{\sigma_0'^2}{\sigma_0} + \dots + L_N(t)^i \frac{\sigma_0'^i}{\sigma_0} + \dots$$

Przyjęto, że wystarczające przybliżenie krzywych doświadczalnych daje następująca postać (4.10):

$$(4.13) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t J_1(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau + \left[ \int_0^t L_2(t-\tau) \dot{\sigma}'(\tau) d\tau \right]^2 + \left[ \int_0^t L_5(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \right]^5,$$

przy założeniu  $\sigma^* = 150 \text{ kG/cm}^2$ . W tabelicy 1 przedstawiono liczbowe wartości funkcji materiałowych, a na rys. 12 porównanie punktów doświadczalnych z przebiegiem teoretycznym.



Rys. 12

Tablica 1

$t_{min}$	$J_1 \cdot 10^5 \text{cm}^2/\text{kG}$	$L_2 \cdot 10^4 \text{cm}^2/\text{kG}$	$L_3 \cdot 10^3 \text{cm}^2/\text{kG}$
1	3,55	2,0	0,78
15	3,88	2,53	1,15
60	4,10	2,73	1,35
90	4,19	2,91	1,40
120	4,25	3,03	1,43
150	4,27	3,08	1,45
240	4,35	3,42	1,49

Przed ilościowym porównaniem wartości odkształceń wynikających z (4.13) z wynikami doświadczeń dla złożonych programów (2.1b) i (2.1c) zbadamy jakościowe cechy proponowanego opisu. Jako pierwsze zagadnienie przeanalizujemy wzajemny stosunek odkształceń aktywnych i odwracalnych. Z (4.13) dla (2.1b), po wykorzystaniu (4.11) w myśl

(2.2a), odkształcenia odwracalne wyrażą się następującym związkiem:

$$(4.14) \quad \varepsilon_r(t, t_1, \sigma_0) = J_1(t-t_1)\sigma_0 + L_2(t)^2\sigma_0'^2 + L_5(t)^5\sigma_0'^5 + \\ - [L_2(t) - L_2(t-t_1)]^2\sigma_0'^2 - [L_5(t) - L_5(t-t_1)]^5\sigma_0'^5.$$

Wyrażenie (4.14) można zapisać, oznaczając  $t-t_1 = s$ , w postaci

$$(4.15) \quad \varepsilon_r(s, t_1, \sigma_0) = J_1(s)\sigma_0 + L_2(s)^2\sigma_0'^2 + L_5(s)^5\sigma_0'^5 + 2L_2(s) \times \\ \times [L_2(s+t_1) - L_2(s)]\sigma_0'^2 + 5L_5(s+t_1)L_5(s)\{[L_5(s+t_1) - L_5(s)]^3 + \\ + L_5(s+t_1)L_5(s)[L_5(s+t_1) - L_5(s)]\}\sigma_0'^5.$$

Wykorzystując (4.11) otrzymamy

$$(4.16) \quad \varepsilon_r(s, t_1, \sigma_0) - \varepsilon_c(s, \sigma_0) = 2L_2(s)[L_2(s+t_1) - L_2(s)]\sigma_0'^2 + \\ + 5L_5(s+t_1)L_5(s)\{[L_5(s+t_1) - L_5(s)]^3 + \\ + L_5(s+t_1)L_5(s)[L_5(s+t_1) - L_5(s)]\}\sigma_0'^5.$$

Równanie (4.16) określa różnicę pomiędzy odkształceniami odwracalnymi dla czasu  $s = t-t_1$ , i odkształceniami aktywnymi dla czasu  $t = s$ . Jeżeli funkcje  $L_2(t)$  i  $L_5(t)$  są dodatnio monotonicznie rosnące, co jest spełnione dla analizowanych wyników doświadczalnych, to prawa strona (4.16) jest zawsze dodatnia. Oznacza to, że przewidziane przez (4.13) odkształcenia odwracalne są większe od odkształceń aktywnych dla  $t = s$ . Ponadto dla  $s = \text{const}$  różnica  $\varepsilon_r - \varepsilon_c$  rośnie ze wzrostem  $t_1$ . Wynika stąd, że związek (4.13) opisuje jakościowo obserwowane doświadczalnie efekty. Można wykazać, że identyczne jakościowo wnioski otrzymuje się dla dowolnej liczby i rzędu wyrazów (4.10).

W podobny sposób można porównać odkształcenia dodatkowe i aktywne dla programu (2.1c). Z (4.13) wykorzystując (2.2b), (4.11) i oznaczając  $t-t_2 = s$  otrzymuje się

$$(4.17) \quad \varepsilon_a(s, t_1, t_2, \sigma_0) - \varepsilon_c(s, \sigma_0) = 2L_2(s)[L_2(s+t_2) - L_2(s+t_2-t_1)]\sigma_0'^2 + \\ + 5L_5(s)[L_5(s+t_2) - L_5(s+t_2-t_1)]\{[L_5(s+t_2) - L_5(s+t_2-t_1)]^3 + \\ + 2L_5(s)[L_5(s+t_2) - L_5(s+t_2-t_1)]^2 + 2L_5(s)^2 \times \\ \times [L_5(s+t_2) - L_5(s+t_2-t_1)] + L_5(s)^3\}\sigma_0'^5$$

Przy tych samych warunkach na funkcje  $L_2(t)$  i  $L_5(t)$  jak powyżej odkształcenia dodatkowe są większe od aktywnych. Dla  $t_2 = \text{const}$  i  $s = \text{const}$  różnica  $\varepsilon_a - \varepsilon_c$  rośnie ze wzrostem  $t_1$ . Odpowiada to własnościom badanego materiału.

Jako ostatnie zagadnienie rozpatrzmy program dodatkowego obciążenia opisany związkami

$$(4.18) \quad \tau \leq 0, \quad \sigma(\tau) = 0; \quad 0 < \tau \leq t_1, \quad \sigma(\tau) = \sigma_0; \quad \tau > t_1, \quad \sigma(\tau) = a\sigma_0.$$

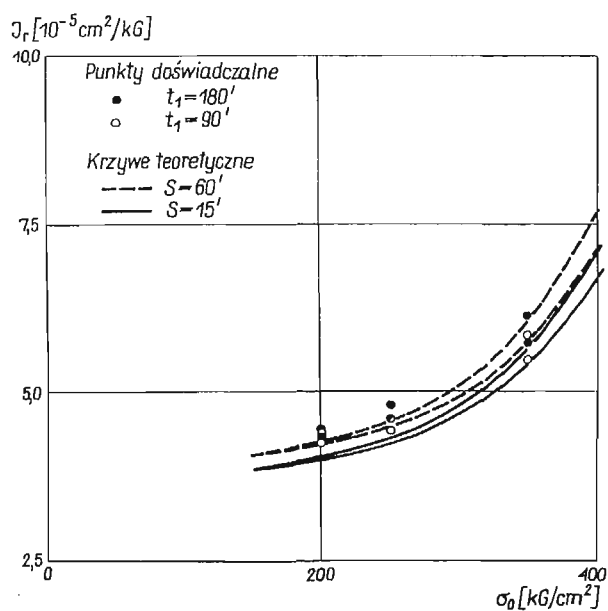
Program ten, choć nie zrealizowany w omawianych doświadczeniach, jest często stosowany w badaniach cech lepkosprężystych polimerów (np. [4, 9, 22]). Z (4.13) dla (4.18) po wykorzystaniu (4.11) i oznaczeniu  $t-t_1 = s$  otrzymuje się następujące wyrażenie na różnicę odkształceń dodatkowych i aktywnych:

$$(4.19) \quad \varepsilon_a(s, t_1, \sigma_0) - \varepsilon_c(s, \sigma_0) = (a-2)J_1(s)\sigma_0 + L_2(s)\sigma_0[2(a-1)L_2(s+t_1)\sigma_0' + \\ + a(a-2)L_2(s)\sigma_0] + 5(a-1)L_5(s)L_5(s+t_1)\sigma_0\sigma_0'[L_5(s+t_1)]^3\sigma_0'^3 + \\ + 2(a-1)L_5(s)L_5(s+t_1)^2\sigma_0'^2\sigma_0 + 2(a-1)^2L_5(s)^2L_5(s+t_1)\sigma_0'\sigma_0'^2 + \\ + (a-1)^3L_5(s)^3\sigma_0'^3] + [(a-1)^5 - 1]L_5(s)^5\sigma_0'^5.$$

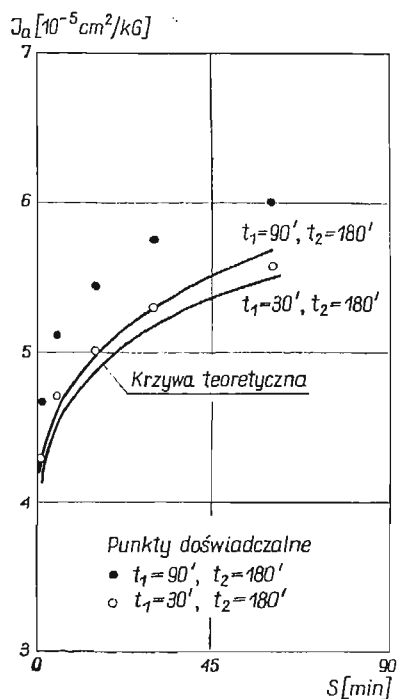


Z (4.19) wynika, że znak różnicy  $\varepsilon_a - \varepsilon_c$  jest zależny od wartości  $a$ . Można jednakże ocenić, jak dla dowolnego  $a = \text{const}$  i  $s = \text{const}$  zmienia się  $\varepsilon_a - \varepsilon_c$  wraz ze wzrostem  $t_1$ . Z (4.19) widać, że dla wzrastającego  $t_1$  wzrasta również  $\varepsilon_a - \varepsilon_c$ , tzn. odkształcenia dodatkowe zwiększają się. Wniosek ten jest tym istotny, że dla szeregu materiałów obserwuje się dla programu (4.18) malenie odkształceń dodatkowych, («umocnienie» materiału) ze wzrostem czasu dociążenia, przy równoczesnym zwiększaniu się odkształceń odwracalnych dla programu (2.1b) ze wzrostem czasu odciążenia (4.9). Związek (4.13) lub ogólnie (4.10), nie może zatem opisać efektów obserwowanych przy dociążeniu takich materiałów, jeżeli funkcje  $L_i(t)$  są dodatnie i monotonicznie rosnące.

Ilościowe porównanie odkształceń odwrrotnych dla programu (2.1b) i odkształceń dodatkowych dla programu (2.1c) wynikających ze związku (4.13) z wynikami doświadczeń przedstawiają rysunki 13 i 14. Na rys. 13 porównano funkcję odwrotnego pełzania  $J_r =$



Rys. 13



Rys. 14

$= J_r(\sigma_0)$ , a na rys. 14 funkcję  $J_a = J_a(s)$ . Z rysunków tych widać, że dla procesu odwrrotnego pełzania istnieje bardzo dobra zgodność. W przypadku pełzania dodatkowego obserwuje się pewną niezgodność. Wyniki doświadczeń leżą powyżej wartości przewidywanych przez (4.13); różnice są tym większe im dłuższy jest czas odciążenia, nie przekraczają jednakże 15%.

### 5. Uwagi końcowe

Opierając się na porównaniu zaproponowanego w p. 4 opisu fenomenologicznego cech mechanicznych polimetakrylanu metylu z wynikami doświadczeń można przyjąć zada-

walającą jego zgodność w zakresie zrealizowanych programów. Dla innych, bardziej złożonych programów obciążenia, mogą jednakże pojawić się efekty jakościowo lub ilościowo niezgodne ze związkami (4.13), [por. uwagę o programie (4.18)].

Należy tu podkreślić, że przyjęta aproksymacja (4.5) ogólnego prawa (4.2) jest jedynie jedną z możliwych aproksymacji. W pracy [20] pokazano inne możliwości, również pozwalające na wyznaczenie funkcji materiałowych z najprostszego programu badań (2.1a); różnice pojawiają się przy programach złożonych. Przyjęta aproksymacja jest z nich jednakże najogólniejszą — własności materiału zależą nieliniowo od wartości i historii naprężenia. Wybór właściwego opisu, jak i ilości jego wyrazów (efekty wyższych rzędów), zależy od żądanej dokładności, przedziału czasu, wartości i historii naprężenia.

Zakładając słuszność szczególnej, wprost proporcjonalnej, zależności dwójłomności od odkształceń osiowych bez względu na historię i wartość naprężenia prawo fizyczne wiążące cechy optyczne i mechaniczne będzie miało identyczną postać z (4.13), po zastąpieniu w nim odkształcenia przez rząd izochromy. W miejsce mechanicznych funkcji materiałowych  $J$  i  $L$  wchodzić będą funkcje optyczne, liczbowo identyczne z dokładnością do współczynnika proporcjonalności  $a = \frac{n(t)}{\varepsilon(t)}$ . Otwarte pozostaje jednak zagadnienie postaci prawa dla złożonego stanu deformacji; wymagane są tu dodatkowe badania.

Podobne jakościowo wyniki — liniowa proporcjonalność dwójłomności i odkształceń osiowych przy pełzaniu — uzyskał także AMBA-RAO [1] dla Catalinu 800 i CR-39.

Rozpatrując otrzymane wyniki z punktu widzenia zastosowania ich w badaniach modeli ciał sprężystych jako pierwszy wniosek należy stwierdzić, że polimetakrylan metylu dla naprężeń powyżej około  $150 \text{ kG/cm}^2$  wykazuje wyraźne nieliniowe cechy mechaniczne i optyczne. Dla mniejszych naprężeń jego zachowanie jest, jak zbadano w pracach [2, 8], liniowe, jednakże również zależne od czasu. Wobec łagodnego przejścia z zakresu liniowego do nieliniowego dokładne ustalenie granicy obszarów jest praktycznie niemożliwe. Powstaje także pytanie, czy polimetakrylan metylu posiada obszar zachowania czysto sprężystego. Oznacza to, że stosowanie tego materiału w badaniach modelowych wymaga uwzględnienia efektów czasowych, co nie zawsze jest brane pod uwagę. W badaniach elastooptycznych występuje tendencja stosowania stosunkowo dużych naprężeń w modelach wykonanych z materiałów posiadających na ogół cechy reologiczne. Odnosi się to także do zastosowania polimetakrylanu metylu na modele badane tensometrycznie lub metodą siatek w zastępstwie rzeczywistych materiałów sprężystych jak np. stali.

Przeniesienie wyników pomiarów odkształceń z modeli lepkosprężystych na sprężyste, jak i wyników pomiaru dwójłomności, wymaga spełnienia szeregu postulatów odnośnie cech materiału modelowego i warunków brzegowych zadania. Opierając się na pracach [11, 21] można w skrócie podać, że dla materiałów liniowo lepkosprężystych [mechanicznie i optycznie] ściśle przeniesienie wyników jest możliwe, jeżeli materiał lepkosprężysty i sprężysty są nieściśliwe. Przy spełnieniu tego warunku odkształcenia czy dwójłomność są w każdej chwili proporcjonalne do wartości dla ciała sprężystego, jeżeli warunki brzegowe można przedstawić w postaci iloczynowej:  $u_i(x, t) = U_i(x)g(t)$ ,  $t_i(x, t) = T_i(x)f(t)$  tzn. w postaci iloczynu funkcji miejsca i funkcji czasu (por. analogię sprężysto-lepkosprężystą Alfrey'a (np. [12])). Dla warunków brzegowych w innej postaci, ale dla materiału nie wykazującego nieustalonego płynięcia lepkiego (brak trwałych odkształceń zależnych

od czasu) można wykorzystać wartości asymptotyczne (dla  $t \rightarrow \infty$ ), które są niezależne od wcześniejszych historii naprężenia czy odkształcenia.

W przypadku materiałów nieliniowo lepkosprężystych zagadnienie to jest znacznie bardziej złożone i nadal otwarte. Wydaje się jednak, że dla pewnych materiałów, dla których wartości asymptotyczne są skończone i niezależne od historii naprężenia istnieje możliwość ich wykorzystania do modelowania ciał nieliniowo sprężystych. Należy tu zaznaczyć, że takie zachowanie przewiduje związek (4.13), jeżeli funkcje  $J$  i  $L$  mają poziome asymptoty. Cechę tę posiada także ogólne prawo (4.2), jeżeli każde z jąder całkowych ma dla każdego argumentu skończoną granicę dla  $t \rightarrow \infty$ .

Zaobserwowana proporcjonalność dwójłomności i odkształceń osiowych w polimeta-krylanie metylu sugeruje możliwość wykorzystania pomiarów względnego opóźnienia do określenia odkształceń modelu np. w zastępstwie metody siatek. Konieczne jest tu jednakże wyjaśnienie wpływu odkształceń poprzecznych. Interesujące jest także zbadanie postaci zależności  $n = n(\epsilon)$  dla różnych długości światła.

#### Literatura cytowana w tekście

1. C. L. AMBA-RAO, *Stress-strain-time-birefringence relations in photoelastic plastics with creep*, J. Pol. Sci., Part C., Pol. Symp., No 5, 75–86, 1964.
2. J. AUBAUD, *Recherches sur la relation contrainte — birefringence dans le plexiglas M 222* — Rech. Aero., 26, 31–39, 1952.
3. E. H. DILL, *On phenomenological rheo-optic constitutive relations*, — J. Pol. Sci., Part C., Pol. Symp., No 5, 67–74, 1964.
4. A. DRESCHER, K. KWASZCZYŃSKA, *An approximate description of non-linear viscoelastic material*, — Int. J. Non-Linear Mech., 5, 11–22, 1970.
5. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *The mechanics of non-linear materials with memory*, — Arch. Rat. Mech. Anal., 1, 1–21, 1957.
6. D. W. HADLEY, I. M. WARD, *Non-linear creep and recovery behaviour of polypropylene fibres*, — J. Mech. Phys. Solids, 13, 397–411, 1965.
7. B. Z. JARKOWSKI, *Badanie mechanicznych i optycznych własności pewnych materiałów modelowych do analizy naprężeń w elementach konstrukcyjnych*, — (rozpr. doktorska), Warszawa 1967.
8. J. KAPUŚCIŃSKI, *Własności lepkosprężyste szkła organicznego w zakresie temperatur jego kształtowania*, — (rozpr. doktorska), Warszawa 1969.
9. J. H. LIFSHITZ, H. KOLSKY, *Non-linear viscoelastic behavior of polyethylene*, — Int. J. Solids Struct., 3, 383–397, 1967.
10. F. J. LOCKETT, *Creep and stress-relaxation experiments for non-linear materials*, — Int. J. Engng. Sci., 3, 59–75, 1965.
11. R. D. MINDLIN, *A mathematical theory of photo-viscoelasticity*, J. Appl. Phys., 20, 206–216, 1949.
12. W. NOWACKI, *Teoria pelzania*, Arkady, Warszawa 1963.
13. K. ONARAN, W. N. FINDLEY, *Combined stress-creep experiments on a nonlinear viscoelastic material to determine the kernel functions for a multiple integral representation of creep*, Trans. Soc. Rheol., 9, 299–327, 1965.
14. E. T. ONAT, *Description of mechanical behavior of inelastic solids*, Proc. 5-th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 421–434, 1966.
15. Z. ORŁOŚ, K. SZULBORSKI, *Własności reologiczne pewnej żywicy epoksydowej*, ref. IV Symp. Dośw. Bad. Mech. Ciała Stał. PTMTiS, Warszawa 1979.
16. P. PERZYNA, *Koncepcje opisu zanikania pamięci materialu*, Rozpr. Inż., 15, 361–399, 1967.

17. J. T. PINDERA, *Badania fizycznych reologicznych własności elastooptycznych kilku żywic poliestrowych*, Cz. II i III, Rozpr. Inż. T. VII, z. 4, 481–540, 1959.
18. J. T. PINDERA, *Reologiczne zagadnienia we współczesnych metodach elastooptyki i badań modelowych*, Pr. ITB, Nr 19, 1961.
19. A. C. PIPKIN, T. G. ROGERS, *A non-linear integral representation for viscoelastic behaviour*, J. Mech. Phys. Solids., 16, 59–72, 1968.
20. R. O. STAFFORD, *On mathematical forms for the material functions in nonlinear viscoelasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 17, 339–358, 1969.
21. P. S. THEOCARIS, C. MYLONAS, *Viscoelastic effects in birefringent coatings*, J. Appl. Mech., 28, 601–607, 1961.
22. I. H. WARD, E. T. ONAT, *Non-linear mechanical behaviour of oriented polypropylene*, J. Mech. Phys. Solids, 11, 217–229, 1963.

## Р е з ю м е

## РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛИМЕТИЛ-МЕТАКРИЛЛАТА В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОЙ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ

В работе представлены исследования влияния истории нагрузки на оптические и механические свойства полиметилметакрилата. Исследования были проведены при различных программах нагружения при комнатной температуре и состояли в определении активной ползучести материала под влиянием постоянной нагрузки различной величины, обратной ползучести после разгрузки и добавочной ползучести. Результаты обсуждены с точки зрения линейности обнаруженных эффектов, в смысле удовлетворения принципу суперпозиции Больцманна. Проверка осуществлялась через функцию ползучести.

Анализ результатов исследований показал, что материал имеет сильно нелинейную характеристику, так с точки зрения оптических, как и механических свойств. Нелинейность характеристики материала увеличивается с ростом нагрузок и увеличением продолжительности времени действия нагрузки. Результаты испытаний показывают, что с удовлетворительной точностью можно принять существование однозначной прямо пропорциональной зависимости между функциями оптической и механической ползучести. Это означает, что оптические эффекты зависят только от деформаций.

Вторая часть работы посвящена математическому описанию свойств материала, основанному на применении интегрального представления Грина-Ривлина. В работе предложена аппроксимация описания, заключающаяся в подборе такой формы интегральных ядер, которая обеспечивает их определенность из небольшого числа основных опытов. Вторая аппроксимация, предложенная авторами, заключается в разделении поведения материала на линейную и нелинейную область. Определены численные значения функций материалов.

## S u m m a r y

## RHEOLOGICAL MECHANICAL AND OPTICAL PROPERTIES OF A POLYMETHYL-METACRYLATE UNDER CONDITIONS OF COMPLEX LOADING HISTORY

The paper deals with the experimental investigations of the influence of the history of loading on the mechanical and optical properties of poly-methylmetacrylate under uni-axial tension. The investigations were carried out for various loading programmes at room temperature and embraced active creep at various load levels, recovery creep after unloading and additional creep. Test results have been analyzed from the point of view of linearity of observed effects in the sense of fulfilment of the Boltzmann superposition principle.

Analysis of the test results proves that the material under consideration is strongly non-linear both with respect to the optical and the mechanical properties, the degree of non-linearity being greater for higher load values and longer duration of the load application. Comparison of the functions of optical and mechanical creep seems to indicate that a proportional relationship exists between the function of

optical creep and the function of mechanical creep. This means that the optical effects depend on the deformation only.

The second part of the paper includes the mathematical description of the non-linear properties of material based on the application of the Green-Rivlin integral representation. An approximate description has been suggested consisting in the selection of such form of the integral kernels that they could be completely determined from several basic investigations. An additional approximation has also been used consisting in the separation of the behaviour of material into linear and non-linear region. Numerical values of the material functions have been calculated.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN  
WARSZAWA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lipca 1970 r.*

---