

ZAGADNIENIA TEORII UMIARKOWANIE DUŻYCH UGIĘĆ
POWŁOK SZTYWNO-PLASTYCZNYCH¹⁾

ANTONI S A W C Z U K (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

W teorii konstrukcji plastycznych wyodrębniają się ostatnio w oddzielną dyscyplinę studia dotyczące geometrycznej nieliniowości. Obejmują one badania wpływu, jaki na udźwig konstrukcji mają zmiany w jej geometrii, zachodzące w trakcie odkształcenia plastycznego. Wiązą się z tym ściśle badania dotyczące przeskoku i stateczności procesu deformacji.

Z punktu widzenia teorii konstrukcji sztywno-plastycznych jest rzeczą szczególnie interesującą wyjaśnienie zachowania się płyt i powłok bezpośrednio po osiągnięciu przez obciążenie intensywności towarzyszącej rozpoczęciu się procesu plastycznego płynięcia, tzn. po osiągnięciu obciążenia granicznego w sensie klasycznej teorii nośności granicznej. Chodzi o stwierdzenie, czy rozwiązanie takie jest stateczne, tzn., czy proces deformacji powoduje «geometryczne» wzmocnienie, czy osłabienie konstrukcji, i jaki jest przy tym ilościowy przebieg zjawiska. Skutki geometrycznej nieliniowości stają się — w przypadku konstrukcji sztywno-plastycznych — łatwe do wyodrębnienia i do interpretacji.

Właściwe opisanie geometryczne nieliniowego zachowania się konstrukcji wymaga rozróżniania jej pierwotnego kształtu oraz jej aktualnej konfiguracji. Proces może być rozpatrywany konsekwentnie przy zastosowaniu wielkości odniesionych bądź do stanu nieodkształconego, bądź do aktualnej konfiguracji w jaką układają się cząstki materialne konstrukcji w przestrzeni w trakcie jej odkształcania, a więc odpowiednio w opisie materialnym lub w opisie przestrzennym. Zwykle jednak inżynierskie teorie dotyczące geometrycznej nieliniowości nie rozróżniają wyraźnie tych dwóch opisów. I tak, pewne wielkości odniesione do stanu odkształconego (np. naprężenia) łączone są ze związkami kinematycznymi odniesionymi do konfiguracji początkowej, a równania równowagi prowadzone są do układu nieodkształconego w oparciu o dodatkowe założenia. Prowadzi to do nieuniknionych w tym stanie rzeczy paradoksów.

Wewnętrznie spójną teorię geometrycznie nieliniowych konstrukcji plastycznych uzyskać można wychodząc z układu równań opisujących duże odkształcenia ośrodka ciągłego. Szczególnie przydatny jest tu opis materialny, chociażby dlatego, że warunki brzegowe dane są zwykle dla pierwotnej geometrii konstrukcji. Wprowadzając określone założenia

¹⁾ Referat problemowy wygłoszony na 13 Konferencji Mechaniki w Jaszowcu, wrzesień 1970.

upraszczające właściwie przejściu od ośrodka trójwymiarowego do dwuwymiarowej zakrzywionej przestrzeni otrzymuje się, w sposób naturalny, układ równań geometrycznie nieliniowej teorii konstrukcji. Dodatkowe założenia dotyczące rzędu wielkości poszczególnych składowych tensorów naprężeń i odkształceń prowadzą w konsekwencji do określonych teorii przybliżonych. Tego typu podejście zastosował FUNG [21], uzyskując równania teorii Kármána dla płyt sprężystych.

Zalety materialnego opisu w mechanice konstrukcji omawiali BUDIANSKY [5] oraz LANCE i SOECHTING [28]. W pracy [44] zastosowano ten opis dla uzyskania związków typu Kármána dla powłok. Podobny problem podjęli PIETRASZKIEWICZ [40] oraz SHRIVASTAVA i GLOCKNER [47]. Szczegółową dyskusję związków nieliniowej teorii powłok przeprowadziła DUSZEK [17], wyjaśniając uproszczenia wprowadzane przez różne przybliżone teorie umiarkowanych ugięć. Materialnego opisu procesu płaskiego plastycznego płynięcia dotyczy praca ARCISZ i RYCHLEWSKIEGO [2], zawierająca analizę otrzymanego układu równań.

Niniejsza praca podaje zasady lagrange'owskiego przedstawienia teorii powłok plastycznych. Omówiono wielkości tensorowe występujące w takim opisie, podano odpowiedni układ równań równowagi oraz powierzchni plastyczności. Praca zawiera ponadto przegląd rozwiązań i wyników doświadczeń dotyczących efektów geometrycznego wzmocnienia i przeskoku w powłokach plastycznych. Stosowane oznaczenia zestawione są w końcowej części pracy.

2. Zależności podstawowe

Odniesiony do układu związanego z konfiguracją nieodkształconą stan naprężenia cząstki X w położeniu x , $x = x(X, t)$ opisuje się symetrycznymi tensorami: odkształceń Greena E_{KL} i naprężeń Pioli–Kirchhoffa S_{KL} .

Tensor odkształcenia E_{KL} wyraża się poprzez gradient wektora przemieszczenia w następujący sposób

$$(2.1) \quad 2E_{KL} = U_{K;L} + U_{L;K} + G_{RM} U_{;K}^R U_{;L}^M.$$

Pomiędzy tensorem naprężeń Cauchy'ego σ_{ij} a tensorem Pioli–Kirchhoffa zachodzi zależność

$$(2.2) \quad \rho_0 \sigma^{ij} = \rho S^{KL} x_{;K}^i x_{;L}^j,$$

przy czym dla materiału nieściśliwego gęstość $\rho = \rho_0$.

Plastyczne płynięcie materiału scharakteryzowane jest przez funkcję dysypacji. Na jednostkę objętości nieściśliwego materiału dysypacja wynosi

$$(2.3) \quad D = \sigma^{ij} d_{ij} = S^{KL} \dot{E}_{KL}$$

odpowiednio w opisie przestrzennym i w opisie materialnym, przy czym $\dot{E}_{KL} = dE_{KL}/dt$. Zależność (2.3) wskazuje, że tensory S^{KL} i E_{KL} stanowią właściwy układ zmiennych dla opisanego procesu plastycznego płynięcia, jako że \dot{E}_{KL} znika tożsamościowo w ruchu sztywnym.

Równania opisujące równowagę elementu materialnego zajmującego, określoną pozycję w przestrzeni, przyjmują we współrzędnych Lagrange'a następującą postać

$$(2.4) \quad [(\delta_K^M + U_{;K}^M) S^{KR}]_{;R} = 0.$$

Stosując twierdzenie o zamianie całek objętościowych na powierzchniowe otrzymuje się z (2.4), że naprężeniowe warunki brzegowe w nieodkształconym układzie określone są zależnościami

$$(2.5) \quad (S^{KL} + S^{ML} U_{;M}^K) n_K = T^L.$$

Z (2.4) i (2.5) wynika, że pola naprężeń i przemieszczeń są sprzężone równaniami równowagi.

Warunek plastyczności w klasycznych teoriach formułowany jest w składowych przestrzennych tensora naprężenia. Tak więc warunek Hubera–Misesa

$$(2.6) \quad 3\sigma_i^j \sigma_i^j - \sigma_i^i \sigma_j^j = 2\sigma_0^2$$

przyjmuje w opisie materialnym, dla materiału nieściśliwego, następującą postać

$$(2.7) \quad 3S^{KL} S^{RS} C_{KR} C_{LS} - (S^{KL} C_{KL})^2 = 2\sigma_0^2,$$

gdzie

$$(2.8) \quad C_{KL} = x_{;K}^i x_{;L}^j g_{ij} = 2E_{KL} + G_{KL}$$

jest tensorem deformacji Cauchy'ego.

Forma zależności (2.7) wskazuje, że (2.6) nie stanowi właściwej postaci warunku plastyczności dla materialnego opisu skończonych odkształceń ośrodka idealnie plastycznego, jako że (2.7) zawiera również odkształcenia (por. [2]). Na podstawie jednak (2.3) wielkościami opisującymi proces odkształceń plastycznych są tensory S_{KL} i \dot{E}_{KL} . Tak więc, dla materiału izotropowego ogólna postać równania konstytutywnego powinna wyrażać się następującym związkiem tensorowym

$$(2.9) \quad S_L^K = \alpha \delta_L^K + \beta \dot{E}_L^K + \gamma \dot{E}_R^K \dot{E}_L^R,$$

gdzie α , β , γ są funkcjami niezmienników tensora prędkości odkształcenia. Dla materiału plastycznego związek konstytutywny (2.9) musi być jednorodną funkcją stopnia zerowego względem czasu. Wynika stąd, że niezmienniki tensora naprężenia związane są dodatkową zależnością, przedstawiającą warunek plastyczności

$$(2.10) \quad F(S_K^K, S_L^L S_K^L, S_L^K S_R^L S_K^R) = 0.$$

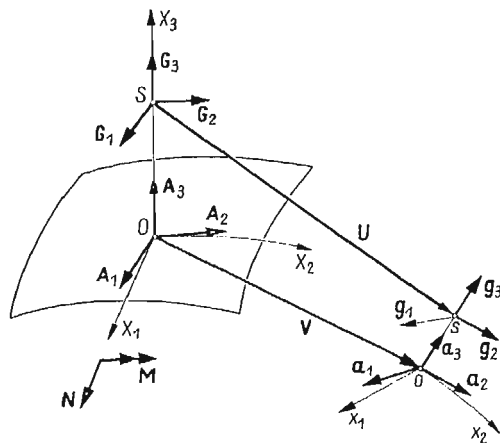
W przypadku warunku Hubera–Misesa w (2.7) należy więc zastąpić C_{KL} przez G_{KL} , nie zaś transformować do układu nieodkształconego warunek plastyczności sformułowany w wielkościach eulerowskich. Z fizycznego punktu widzenia warunki $f(\sigma_i^i, \sigma_k^i \sigma_i^k, \sigma_j^i \sigma_k^j \sigma_i^k) = 0$ oraz (2.10) przedstawiają odmienne materiały.

Dla teorii posługujących się (2.10) stowarzyszone prawo płynięcia i postulat Druckera przyjmują odpowiednio postać, [22]

$$(2.11) \quad \dot{E}_{KL} = \lambda \frac{\partial F}{\partial S_{KL}}, \quad S^{KL} \dot{E}_{KL} \geq 0,$$

przy czym $\lambda \geq 0$.

Teorie powłok zakładają, że stan naprężenia i odkształcenia może być z dostateczną dokładnością opisany przez rozpatrzenie dwuwymiarowego zagadnienia dla pewnej (zakrzywionej) powierzchni odniesienia. Naprężenia i odkształcenia występujące w punkcie s powłoki (rys. 1) odniesione są do układu współrzędnych x_1, x_2 związanych z powierzchnią środkową powłoki.



Rys. 1. Powierzchnia środkowa powłoki w konfiguracji początkowej i oznaczenia baz

Przy opisie materialnym wielkości stowarzyszone z cząstką w położeniu x przesuwane są przy zastosowaniu translatora g_k^k do pierwotnego położenia cząstki X . Wielkości te są następnie przesuwane do bazy określonej przez A_r, A_3 na nieodkształconej powierzchni odniesienia $X^3 = 0$, przez wprowadzenie translatora

$$(2.12) \quad \mu_D^r = \delta_D^r - X^3 B_D^r$$

przy czym $A_r \cdot A_3 = 0, \quad A_3 \cdot A_3 = 1$.

3. Założenia

Równania teorii umiarkowanie dużych przemieszczeń powłok formułować będziemy w oparciu o szereg założeń, z których część stanowią klasyczne przyjęcia teorii cienkich powłok.

a) Rozpatrujemy powłoki cienkie, dla których stosunek grubości do mniejszego promienia krzywizny $2H/R_{min} \ll 1$, a więc

$$(3.1) \quad \mu_D^r \simeq \delta_D^r, \quad \mu = 1.$$

Oznacza to, że wpływ drugiego członu w (2.12) jest pomijalnie mały.

b) Odkształcenia styczne w kierunku poprzecznym do grubości powłoki mogą być pominięte

$$(3.2) \quad E_{A3} \simeq 0.$$

Niekonsekwencje wynikające z tego założenia oraz teoria odeń odchodząca przedyskutowane są w [17].

c) Naprężenia normalne w kierunku grubości powłoki są niewielkie w porównaniu z pozostałymi naprężeniami i mogą być pominięte w równaniach równowagi wewnętrznej i w wyrażeniu na dysypację energii, tzn.

$$(3.3) \quad \sigma_{33} \simeq 0,$$

z wyjątkiem powierzchni ograniczających.

d) Materiał jest izotropowy i idealnie sztywno-plastyczny w konfiguracji początkowej oraz nieściśliwy.

e) Przemieszczenia rozkładają się wzdłuż grubości liniowo. Odpowiednie składowe w bazie A_r, A_3 są

$$(3.4) \quad U_r = V_r + \beta_r X^3, \quad U^3 = W, \quad \beta = 0,$$

gdzie V_r, W, β_r są funkcjami określonymi na powierzchni środkowej $X^3 = 0$. Bardziej ogólną teorię dla przypadku $\beta_3 \neq 0$ opracowała DUSZEK [17] (por. też PIETRASZKIEWICZ [40]).

f) Długość L fali przemieszczenia jest dostatecznie duża w porównaniu z grubością powłoki, tak że

$$(3.5) \quad |V_{\Delta|r}| = 0\left(\frac{V_{\Delta}}{L}\right), \quad |W_{|r}| = 0\left(\frac{W}{L}\right).$$

Założenie to umożliwia oszacowanie członów zawierających pochodne kowariantne.

g) Przemieszczenia normalne W i styczne V_r są rzędu

$$(3.6) \quad \frac{W}{H} = 0(1), \quad \frac{V}{H} = 0(\varepsilon), \quad \varepsilon < 1.$$

4. Miary odkształcenia

Przy ograniczeniu się do pola przemieszczeń (3.4) składowe tensora odkształceń (2.1) przyjmują postać

$$(4.1) \quad \begin{aligned} 2E_{\Delta r} &= 2\lambda_{\Delta r} + 2\kappa_{\Delta r} X^3 + (\beta_{\theta|\Delta} \beta_{|r}^0 + B_{\Delta\phi} \beta^\phi B_{r\theta} \beta^\theta) (X^3)^2, \\ 2E_{\Delta 3} &= W_{|\Delta} + \beta_{\Delta} + B_{\Delta}^0 V_{\theta} + \beta_{\theta} V_{|\Delta}^0 - \beta_{\phi} B_{\Delta}^{\phi} W + (B_{\Delta}^{\phi} \beta_{\phi} + \beta_{\phi|\Delta} \beta^{\phi}) X^3 = 0, \\ 2E_{33} &= \beta_{\phi} \beta^{\phi}, \end{aligned}$$

gdzie $\lambda_{\Delta r}$ i $\kappa_{\Delta r}$ oznaczają odpowiednio wydłużenie oraz zmianę krzywizny powierzchni odniesienia i określone są przez

$$(4.2) \quad \begin{aligned} 2\lambda_{\Delta r} &= 2V_{(\Delta|r)} - 2B_{\Delta r} W + W_{|\Delta} W_{|r} + B_{\Delta\phi} B_{\Delta}^{\phi} W^2 + V_{|\Delta}^{\phi} V_{\phi|r} + \\ &\quad + B_{\Delta}^{\phi} V_{\phi} B_r^0 V_{\theta} - B_{\Delta}^{\phi} V_{\phi|r} W - B_r^{\phi} V_{\theta\Delta} W + B_{\Delta\phi} V^{\phi} W_{|r} + B_{r\phi} V^{\phi} W_{|\Delta}, \\ 2\kappa_{\Delta r} &= 2\beta_{(\Delta|r)} + \beta_{\theta|\Delta} V_{|r}^0 + \beta_{\phi|r} V_{|\Delta}^{\phi} - B_{\Delta}^{\phi} V_{\phi|r} - B_r^{\phi} V_{\phi|\Delta} - \beta_{\theta|\Delta} B_r^{\theta} W - \beta_{\phi|r} B_{\Delta}^{\phi} W + \\ &\quad + 2B_{\Delta}^{\phi} B_{\phi r} W + B_{|r}^{\phi} W_{|\Delta} V_{\phi} + B_{|\Delta}^{\phi} W_{|r} V_{\phi} + B_{\Delta}^{\theta} B_r^{\theta} V_{\theta} \beta_{\phi} + B_r^{\theta} B_{\Delta}^{\theta} V_{\theta} \beta_{\phi}. \end{aligned}$$

W ramach założeń (3.5) i (3.6) otrzymać można związki przybliżone, w zależności od rzędu wielkości zachowywanych w (4.1)–(4.2) członów wyrażonych przez $L/R, H/R$

i V_d/R oraz wzajemnego stosunku tych parametrów, $R = R_{\min}$. Spośród szeregu zestawów wielkości kinematycznych zbadanych w [17] przytoczmy wyniki odnoszące się do dwóch teorii.

Przypadek 1,

$$\frac{L}{R} = 0(\varepsilon), \quad \frac{H}{R} = 0(\varepsilon^3), \quad \frac{W}{R} = 0(\varepsilon), \quad \frac{V}{R} = 0(\varepsilon^4), \quad \varepsilon^3 \ll 1.$$

Miary odkształcenia wynoszą wówczas

$$(4.3) \quad \begin{aligned} 2\lambda_{d\Gamma} &= 2V_{(d|\Gamma)} - 2B_{d\Gamma}W + W_{|d}W_{|\Gamma}, \\ \varkappa_{d\Gamma} &= -W_{|d\Gamma} - B_{d|\Gamma}^{\phi}V_{\phi} - B_d^{\phi}V_{\phi|\Gamma}. \end{aligned}$$

Przypadek 2,

$$\frac{L}{R} = 0(1), \quad \frac{H}{R} = 0(\varepsilon), \quad \frac{W}{R} = 0(\varepsilon), \quad \frac{V}{R} = 0(\varepsilon^2), \quad \varepsilon^2 \ll 1$$

odpowiadający teorii Donnella [9]

$$(4.4) \quad \begin{aligned} 2\lambda_{d\Gamma} &= 2V_{(d|\Gamma)} - 2B_{d\Gamma}W + W_{|d}W_{|\Gamma} + B_d^{\phi}B_{\phi\Gamma}W^2, \\ \varkappa_{d\Gamma} &= \beta_{(d|\Gamma)}, \end{aligned}$$

a do wyznaczenia składowych β_d jest do dyspozycji zależność

$$(4.5) \quad \beta_{\phi}(\delta_d^{\phi} - B_d^{\phi}W) = W_{|d} - B_d^{\phi}V_{\phi}.$$

W stosunku do miar odkształcenia liniowej teorii powłok [35], [26], [52], [19] zależności (4.3) różnią się jedynie ostatnim członem w wyrażeniu na $\lambda_{d\Gamma}$. Stanowią one związki inżynierskiej teorii, odpowiednika teorii Kármána dla płyt (MUSHTARI i GALIMOV [34], VOLMIR [51]). Zastosowany sposób ich otrzymania podkreśla zarówno lagrange'owski charakter teorii umiarkowanie dużych ugięć, jak i rząd wielkości pomijanych członów.

Przyrosty odkształceń, wchodzące do wyrażenia na dysypację energii wewnętrznej (2.3), w materialnym opisie są

$$(4.6) \quad \dot{\lambda}_{d\Gamma} = \frac{d}{dt} \lambda_{d\Gamma}, \quad \dot{\varkappa}_{d\Gamma} = \frac{d}{dt} \varkappa_{d\Gamma}.$$

5. Siły wewnętrzne

Z chwilą gdy wybrane są miary odkształcenia, odpowiadający zestaw sił wewnętrznych nie może być dobierany dowolnie. Do określenia właściwego zestawu powierzchniowych tensorów sił wykorzystuje się funkcję dysypacji (2.3). Przy wykorzystaniu założenia (3.1), dysypacja przypadająca na jednostkę nieodkształconej powierzchni środkowej powłoki wyraża się wzorem

$$(5.1) \quad D = \int_{-H}^H (S^{d\Gamma} \dot{E}_{d\Gamma} + 2S^{A3} \dot{E}_{A3} + S^{33} \dot{E}_{33}) dX^3.$$

Wyznaczając S^{33} z (2.2) przy wykorzystaniu (3.4) oraz pamiętając o założeniu (3.2) otrzymuje się

$$(5.2) \quad D = \int_{-H}^H (\dot{E}_{d\Gamma} - \dot{E}_{33} W_{|d} W_{|\Gamma}) S^{\Gamma A} dX^3.$$

Oszacowując drugi człon w porównaniu z pierwszym okazuje się, że w przypadku 1 jest on rzędu członów pomijanych w dotychczasowych rozważaniach, a więc ostatecznie

$$(5.3) \quad D = \int_{-H}^H S^{dI} \dot{E}_{dI} dX^3 = N^{dI} \dot{\lambda}_{dI} + M^{dI} \dot{\nu}_{dI},$$

gdzie $\dot{\lambda}_{dI}$ i $\dot{\nu}_{dI}$ zdefiniowane są w (4.6), podczas gdy

$$(5.4) \quad N^{dI} = \int_{-H}^H S^{dI} dX^3, \quad M^{dI} = \int_{-H}^H S^{dI} X^3 dX^3.$$

Stanowią one powierzchniowe tensory sił wewnętrznych w powłoce, odniesione do konfiguracji nieodkształconej. Przy ugięciach o rząd większych od grubości powłoki wpływ zmian geometrii nie jest pomijalny w (5.2). Odpowiednie uogólnione siły i uogólnione prędkości odkształcenia ulegną modyfikacji [17].

Dla inżynierskiej teorii rozpatrywanej w przypadku 1 łatwo stwierdzić, oszacowując poszczególne wyrazy w (4.1), że $E_{dI} = 0 \left(\frac{H}{R} \right)$. Tak więc $G_{KL} \simeq C_{KL}$ i nie ma różnicy między warunkami plastyczności (2.6) i (2.7). Przy ustaleniu powierzchni plastyczności $F(N^{dI}, M^{dI}) = 0$ nie ma więc potrzeby rozróżniania opisu materialnego i opisu przestrzennego.

W teoriach uwzględniających przemieszczenia normalne o rząd większe od grubości powłoki, tzn. gdy np. $\frac{H}{W} = 0(\varepsilon)$, $\frac{V_I}{H} = 0(\varepsilon)$, $\varepsilon^3 \ll 1$ wystąpią różnice w wyrażeniu na warunek plastyczności. Jeśli za obowiązujący dla materiału uznać warunek plastyczności określony w opisie przestrzennym, np. (2.6), wówczas (2.7) przyjmuje następującą postać

$$(5.5) \quad 3G_{d\phi}(G_{I\theta} - 4B_{I\theta}W)S^{dI}S^{0\phi} - [(G_{dI} - 2B_{dI}W)S^{dI}]^2 = 2\sigma_0^2.$$

W konsekwentnej teorii wykorzystującej opis materialny należałoby postugiwać się odpowiednią formą zależności (2.10).

6. Równania równowagi

Równania równowagi (2.4) sprowadzają się do następującego układu

$$(6.1) \quad (S^{i0} + U_{iR}^A S^{R0} + U_{i3}^I S^{30})_{;0} + (S^{j3} + U_{jR}^A S^{R3} + U_{j3}^I S^{33})_{;3} = 0.$$

$$(6.2) \quad (S^{d3} + U_{i3}^3 S^{3d} + U_{iA}^3 S^{d\phi})_{;0} + (S^{33} + S^{33} U_{i3}^I + U_{iA}^3 S^{d3})_{;3} = 0.$$

Wykorzystując założenia (3.1) i (3.4) i sprowadzając powyższe związki do bazy nieodkształconej powierzchni środkowej, otrzymuje się równania przybliżonej teorii. Konsekwentnie pomijając w nich człony tego samego rzędu wielkości, co pominięte w związkach kinematycznych i w wyrażeniu na dysypację otrzymuje się dla przypadku 1

$$(6.3) \quad S_{iR}^{dI} - B_{iR}^A S^{d3} + (\beta^d S^{R3})_{iR} + S_{i3}^{3A} = 0, \\ (W_{iA} S^{dI})_{iR} + S_{iR}^{3I} + B_{iR}^A S^{dI} + (W_{iA} S^{d3} + S^{33} + B_{iA}^d V_{\phi} S^{d3})_{i3} = 0.$$

Całkując te równania na grubości nieodkształconej powłoki w celu otrzymania związków równowagi wyrażonych w wielkościach (5.4), dochodzi się do zależności

$$(6.4) \quad N_{|r}^{\phi\Gamma} - B_r^\phi Q^r + (\beta^\phi Q^r)_{|r} + P^\phi = 0,$$

$$(6.5) \quad M_{|r}^{\phi\Gamma} - Q^\phi = 0,$$

$$(6.6) \quad Q_{|r}^\Gamma + B_{\Delta r} N^{\Delta r} + (W_{|\Delta} N^{\Delta r})_{|r} + P = 0,$$

gdzie

$$(6.7) \quad P^\Delta = [S^{3\Delta}]_{-H}^H, \quad P = [S^{33} + W_{|\Delta} S^{\Delta 3} + B_\Delta^\phi V_\phi S^{\Delta 3}]_{-H}^H$$

oraz

$$(6.8) \quad \beta_\theta = -W_{|\theta} - B_\theta^\Delta V_\Delta.$$

Inny zestaw przybliżonych równań podano w [44].

Powyższe zależności stanowią układ przybliżonych równań równowagi rozpatrywanej teorii umiarkowane dużych ugięć. Równanie (6.5) ma postać znaną z liniowej teorii, podczas gdy w (6.4) i (6.6) pierwsze dwa człony odpowiadają liniowemu przybliżeniu, Równania liniowego przybliżenia opisują ściśle równowagę elementu powłoki w aktualnej konfiguracji, jeśli traktować przepisane różniczkowanie kowariantne jako różniczkowanie w bazie odkształconej powłoki i gdy tensor krzywizny dotyczy aktualnej (nieznanej) konfiguracji. Równania równowagi wyprowadzane w inżynierskich teoriach dla powłok wyniosłych zatrzymują z reguły tylko dwa pierwsze człony w lewej części (6.4) (por. [11], [34]), oraz omówienie nieliniowych teorii przez WOŹNIAKA [52]). Związki (6.4)–(6.6) stoją się również w przypadku uwzględniania zmian grubości przez przyjęcie $\beta_3 \neq 0$ w (3.4). Odpowiedni układ równań równowagi i warunków brzegowych w opisie materialnym wyprowadziła DUSZEK [17]. Podane tam zostały również zestawy równań dla kilku przybliżonych teorii powłok walcowych i kulistych, zapisane w odpowiednich układach współrzędnych.

7. Powłoki walcowe

Istniejące rozwiązania dotyczące dużych ugięć powłok plastycznych uzyskane zostały przy uproszczonych równaniach równowagi i zlinearyzowanych powierzchniach plastyczności. Stosowano powierzchnie plastyczności właściwe przestrzennemu opisowi. Przytoczymy niektóre rozwiązania zarówno dla wskazania charakteru zmian wynikających z uwzględnienia «dużych» ugięć, jak i dla porównania stosowanych nieliniowych teorii ze związkami wynikającymi z konsekwentnego lagrange'owskiego przedstawienia teorii powłok. Przytoczone rozwiązania nie obejmują obszernego działu powłok wiotkich, tzn. rozpatrywanych jako membrany. Przegląd metod i rozwiązań z tego zakresu podał ORKISZ [38].

Walcową powłokę przegubowo zamocowaną na końcach i poddaną równomiernemu wewnętrznemu ciśnieniu rozpatrywała DUSZEK [13–15], korzystając z następującego układu równań (rys. 2)

$$(7.1) \quad n_x' = 0, \quad m_x' - 2Rn_x w'' + 2\alpha n_\phi - 2\alpha p = 0,$$

$$(7.2) \quad \dot{\lambda}_x = \dot{u}' + \left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{w}' w', \quad \dot{\lambda}_\phi = \dot{w}, \quad \dot{\lambda}_x = \frac{\dot{w}''}{2\alpha}, \quad \dot{\lambda}_\phi \simeq 0,$$

$$(7.3) \quad n_\phi = 1, \quad 0 \leq n_x \leq \sqrt{1 - m_x}, \quad ()' = \frac{d}{dx},$$

gdzie

$$(7.4) \quad x = \frac{X}{L}, \quad u = \frac{U}{L}, \quad w = \frac{W}{A}, \quad \kappa_x = \frac{HK_x}{2},$$

$$\kappa_\varphi = \frac{HK_\varphi}{2}, \quad R = A/H, \quad p = \frac{PA}{N_0}, \quad \alpha = \frac{L^2}{AH},$$

$$n_x = \frac{N_x}{N_0}, \quad m_x = \frac{M_x}{M_0},$$

natomiast $M_0 = \sigma_0 H^2$, $N_0 = \sigma_0 H$, a σ_0 oznacza granicę plastyczności.

Stosowane równania równowagi i miary odkształcenia odnoszą się do przypadku 1. Równanie (7.1) odpowiada związkom (6.4)–(6.6) przy pominięciu członów pochodzących od rzutu siły poprzecznej na kierunek tworzącej, podczas gdy (7.2) otrzymuje się z (4.3) i (4.6). Warunek plastyczności stanowi fragment powierzchni granicznej opisanej na ścisłej powierzchni dla materiału Treski, a wprowadzonej w [12].

W powłoce pojawiają się dwa obszary, odpowiadające różnym fragmentom powierzchni plastyczności, w zależności od tego czy zachodzi nierówność (7.3) czy też $n_x^2 = 1 - m_x$. Położenie granicy między tymi dwoma obszarami określa parametr ξ . Wykorzystując stowarzyszone prawo płynięcia (por. [23], [37]) i spełniając wymagane warunki ciągłości na granicach stref znajdujących się w odmiennych stanach naprężenia otrzymuje się następujące równanie określające przyrost obciążenia, [18]

$$(7.5) \quad -\frac{1}{Y} \frac{dY}{d\xi} = \frac{6[1 - (1 - \xi)Y]^2 + 2Y^2(1 - \xi)\xi^3}{[2 - Y(1 - \xi)^2]\{3\xi[1 - Y(1 - \xi)] - Y\xi^3\}},$$

gdzie $Y = \alpha(p - 1)$, natomiast ξ określa umowny czas. Tak więc $dY/d\xi = \alpha\dot{p}$.

Równanie (7.5) wskazuje na przyrostowy charakter problemu dużych ugięć powłok: obciążenie zmienia się ze wzrostem parametru odmierzającego upływ czasu. Parametrem takim może być np. również ugięcie w_0 w wybranym punkcie, $w_0 = w_0(\xi)$. Jednak, jak zauważył WASZCZYSZYN [50], wybór ugięcia jako umownego czasu nie zawsze jest wskazany, gdyż w przypadku występowania przeskoku ugięcia czasem cofają się. Problemy konstrukcji plastycznych w przyrostowym sformułowaniu rozpatrywał ONAT [37].

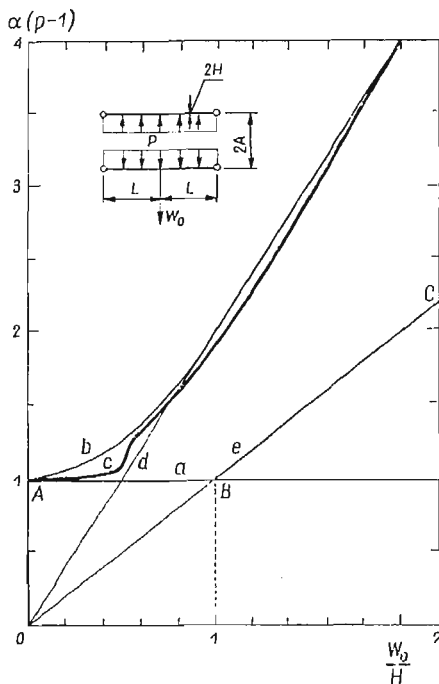
Zależność (7.5) pozwala na zbadanie stateczności procesu. Można stwierdzić, że $\dot{p} = 0$ dla $p = 1$ oraz że $\dot{p} > 0$ dla $0 < \xi \leq 1$, a więc w rozpatrywanym przypadku następuje geometryczne wzmocnienie. Numeryczne rozwiązanie (7.5) podano w [18], gdzie znaleźć można również wyniki dotyczące powłoki zamocowanej.

Przybliżone rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia, polegające na wyznaczeniu górnej granicy zależności przyrostu obciążenia od przyrostu ugięcia podała DUSZEK [15]. Granica ta określona jest przez

$$(7.6) \quad Y = \alpha(p - 1) = 1 + w_0^2 R^2,$$

gdzie $w_0 R = W_0/H$. Wyniki (7.5) i (7.6) przedstawiono na rys. 2. Dla porównania podano tam również rozwiązanie błonowe i proste odpowiadające powłoce o ściance trójwarstwowej [14].

Rozwiązanie dla powłoki warstwowej wskazuje na niestateczność zależności obciążenie–ugięcie. Wniosek ten potwierdza analiza powłok trójwarstwowych przeprowadzona



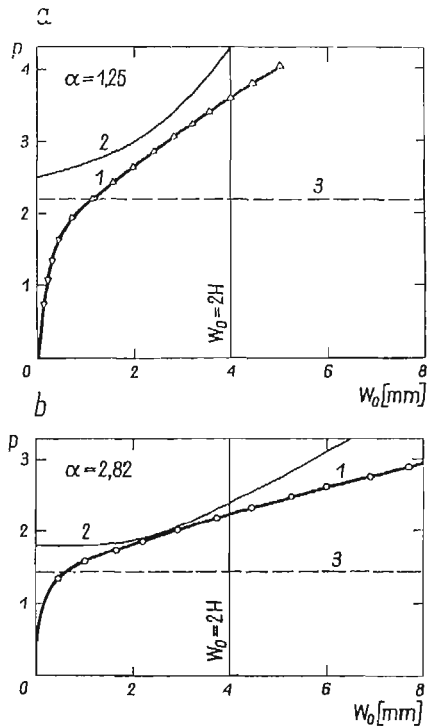
Rys. 2. Wzmocnienie geometryczne dla powłok walcowych: a) nośność graniczna, b) oszacowanie [13] dla ścianki pełnej, c) rozwiązanie przybliżone [18], d) rozwiązanie bezmomentowe, e) rozwiązanie bezmomentowe dla ścianki trójwarstwowej oraz ABC — oszacowanie [13]

przez LEPIKA [30–33] oraz przez KULLA [27]. Rozpatrując zagadnienie sprężysto-plastycznego zachowania się konstrukcji pod działaniem ciśnienia i siły podłużnej w przypadku przyjęcia warunku Treski wykazano, że proces szybkiego narastania ugięć rozpoczyna się znacznie poniżej obciążenia granicznego. Oznacza to, że nośności granicznej, wyznaczonej z klasycznej teorii, towarzyszą już ugięcia wykraczające poza zakres dopuszczalności liniowej teorii powłok. Dalszych przykładów tego typu dostarcza praca WASZCZYŻYNA [50], gdzie zagadnienia sprężysto-plastyczne rozpatrywane są konsekwentnie w nieliniowym sformułowaniu. Efektu geometrycznego wzmocnienia walcowych zbiorników ciśnieniowych dotyczy szereg prac GILLA i współpracowników [1], [8], [9], [10], [41]. Cechą charakterystyczną tych prac jest rozpatrywanie wpływu zmian geometrii powłoki krok po kroku. Poszukuje się tam każdorazowo nośności granicznej dla powłoki o geometrii zmienionej wskutek odkształceń plastycznych wywołanych na poprzednim kroku obciążenia.

Rozwiązania wynikające z uproszczonej teorii dużych ugięć porównamy z dostępnymi wynikami doświadczeń na temat zachowania się zamocowanych powłok. Materiału dostarczają badania AUGUSTI'EGO i D'AGOSTINO [3], [4], SAVE'A i JANASA [42] oraz PERRONE'A [39]. Badania [4] dotyczą zakresu ugięć mieszczących się w założeniach teorii umiarkowanie dużych przemieszczeń. Spośród dziewięciu przedstawionych przypadków typowe wyniki dotyczące $\alpha = 2,82$ i $\alpha = 1,25$ porównano na rys. 3 z wynikiem typu (7.6) dla po-

włoki zamocowanej, [13]. Linia przerywaną oznaczono wynik podany przez teorię nośności granicznej dla dokładnej powierzchni granicznej Treski, [23].

Z rys. 3 widać, że wzmocnienie geometryczne jest istotne. Charakter przebiegu krzywej doświadczalnej w pewnym zakresie ugięć odpowiada rozwiązaniu teoretycznemu. Materiał badanych powłok wykazywał długą platformę plastyczności tak, że wzmocnienie materiału nie wносиło istotnego wpływu w rejestrowaną zależność obciążenie—największe ugięcie. Krzywa 2 odpowiadająca rozwiązaniu teoretycznemu rozpoczyna się powyżej linii 3, gdyż rozwiązanie dla dużych ugięć korzystało z powierzchni granicznej opisanej na dokładnym warunku plastyczności Treski dla powłok.



Rys. 3. Zależność: obciążenie — największe ugięcie dla walcowych powłok plastycznych, 1) doświadczenia [4], 2) oszacowanie [13], 3) nośność graniczna

Badania doświadczalne «efektu brzegowego» w zakresie plastycznych odkształceń przeprowadzali KLEPACZKO i KÖNIG [25]. Doświadczenia SCHROEDERA i RANGARAJANA [45] nad połączeniami powłok walcowych wykazują występowanie efektów, które mogą być wytłumaczone zmianami geometrii konstrukcji.

8. Powłoki kuliste

Na przykładzie powłok kulistych można zilustrować obydwa, charakterystyczne dla geometrycznie nieliniowych teorii zjawiska, mianowicie: wzmocnienie geometryczne oraz niestateczność procesu odkształcenia konstrukcji. Drugie z nich, tzn. zjawisko przeskoku, zwykły dotychczas kojarzyć z konstrukcjami wykazującymi cechy sprężyste.

Istniejące studia dotyczące geometrycznego wzmocnienia ograniczają się do mało wyniosłych powłok, aczkolwiek CAPURSO [6] podał równania przyrostowe bez tego ograniczenia. Komplet związków geometrycznych i równań równowagi przybliżonej teorii bardzo słabo wyniosłych powłok kulistych podała DUSZEK [15, 16], korzystając przy wyprowadzeniu z zasady prac przygotowanych, a więc uzyskując wewnątrz zgodny komplet zależności

$$(8.1) \quad (rn_\varphi)' - n_0 = 0, \quad h[(rm_\varphi)' - m_0]' + [rn_\varphi(r+w)']' + rp = 0,$$

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_\varphi &= \dot{u}' + \dot{w}'r + \dot{w}'w', & \kappa_\varphi &= -h\dot{w}'', \\ \dot{\lambda}_0 &= \dot{u}/r, & \kappa_0 &= -h\dot{w}'/r, \end{aligned}$$

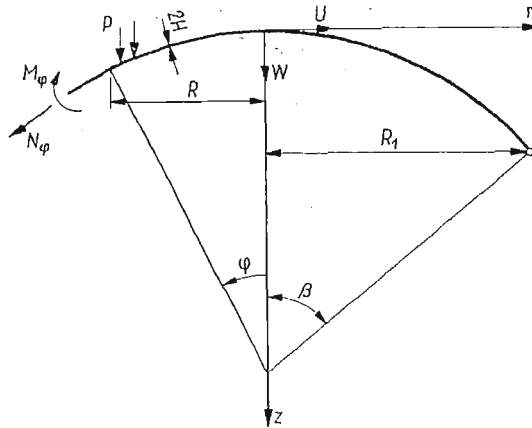
gdzie

$$(8.3) \quad w = \frac{W}{A}, \quad u = \frac{U}{A}, \quad h = \frac{H}{2A}, \quad r = \frac{R}{A}, \quad p = \frac{PA}{N_0},$$

$$(\quad)' = \frac{d}{dr},$$

a bezwymiarowe siły i krzywizny zdefiniowane są jak w (7.4). Wielkości geometryczne i konwencja znaków dla sił i obciążeń podane są na rys. 4.

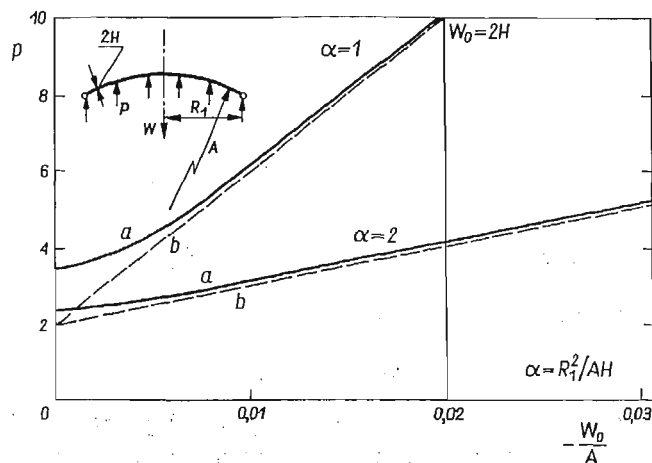
Dla powłoki przegubowo zamocowanej na obwodzie i obciążonej równomiernym ciśnieniem od strony wklęsłej, kontynuacja procesu odkształcenia plastycznego jest możliwa przy narastającym ciśnieniu. Ma więc miejsce wzmocnienie geometryczne. W powłoce tworzą się dwa obszary. W przypadku stosowania warunku plastyczności Treski w części



Rys. 4. Geometria mało wyniosłej powłoki kulistej

centralnej $0 \leq r \leq \xi$ realizuje się stan błonowy $m_\theta = m_\varphi = 0$, podczas gdy w pobliżu podpory, $\xi \leq r \leq c$, występuje stan zgięciowy taki, że $m_\theta = n_0^2 - 1$, a pozostałe wielkości określone są równaniami równowagi. Ze wzrostem ciśnienia strefa błonowa powiększa się. Wyczerpanie nośności w sensie klasycznym, tzn. rozpoczęcie się ruchu sztywno-plastycznej powłoki odpowiada, w tym przypadku, mało wyniosłej konstrukcji i niewystępowaniu strefy błonowej, $\xi = 0$.

Wzrost ciśnienia potrzebny do utrzymania procesu odkształcenia plastycznego powłoki zilustrowany jest na rys. 5 dla dwóch przypadków powłok o pełnej ściance, wykonanych z materiału Treski [16]. Podobnie jak to miało miejsce dla powłok walcowych, ugięcia rzędu grubości ścianki zmieniają w sposób istotny udźwig konstrukcji. Zależność siła — największe ugięcie zdąża asymptotycznie do prostej odpowiadającej rozwiązaniu błonowemu otrzymanemu stosownie do przybliżonej teorii membran. Należy zaznaczyć, że przyrost wzmocnienia geometrycznego zależy w dużym stopniu od warunków brzegowych powłoki i przy określonej swobodzie przesuwu na podporze przyrost ten może nawet nie wystąpić. Zagadnienia tego typu badane były dla płyt [7], [24], [43], [49].



Rys. 5. Wzmocnienie geometryczne dla małowyniosłych powłok kulistych, a) rozwiązanie [16], b) rozwiązanie bezmomentowe

Aby umożliwić zilustrowanie zjawiska przeskoku, któremu towarzyszy zmniejszenie siły potrzebnej do utrzymania plastycznego płynięcia konstrukcji należy omówić metodę oszacowania zależności obciążenie–ugięcie w geometrycznie nieliniowej teorii. Ścisłe rozwiązanie zagadnienia przeskoku plastycznego dla powłok nie jest dotychczas znane. Dla sprężysto-plastycznego modelu odkształcenia badanie przeskoku jest również utrudnione z uwagi na konieczność uwzględnienia zjawisk odciążania: obszary pierwotnie plastyczne mogą znaleźć się w stanie sprężystym, przejściowo lub ostatecznie, [50].

Oszacowania niestateczności konstrukcji sztywno-plastycznej mogą być dokonywane przy wykorzystaniu zasady prac przygotowanych. W zastosowaniu do płyt podejście takie stosowane było w [43]. Ogólne sformułowanie metody w konsekwentnym opisie materialnym, tzn. stosując tensor naprężeń Pioli–Kirchhoffa (2.2) oraz tensor odkształceń Greena (2.1), podali LANCE i SOECHTING [28].

Zasada prac przygotowanych w teorii skończonych odkształceń ma postać

$$(8.4) \quad \int_V S^{KL} \dot{E}_{KL} dV = \int_S T^K \dot{U}_K dS.$$

Pola naprężeń i prędkości odkształceń wchodzące do (8.4) nie są teraz niezależne. Niezależne są tylko odpowiednie wielkości z opisu przestrzennego, natomiast S^{KL} i przemiesz-

czenia U_K związane są równaniami równowagi (2.4) oraz odpowiednimi zależnościami przedstawiającymi warunki brzegowe. Tak więc stosując (8.4) należy dobrać łącznie S^{KL} i U_K spełniające (2.4), a następnie dobrać niezależnie pole prędkości przemieszczeń \dot{U}_K , spełniające kinematyczne warunki brzegowe. Równoważność zapisu (8.4) i zapisu eulerowskiego zasady prac przygotowanych wynika z (2.3).

Przy założeniu słuszności postulatu Druckera w formie (2.11), zależność (8.4) pozwala sformułować następującą zasadę

$$(8.5) \quad \int_V D(\dot{E}_{KL}) dV \geq \lambda \int_S T^K \dot{U}_K dS.$$

gdzie λ jest mnożnikiem jednoparametrowego obciążenia. Jeśli $\lambda > 1$ konstrukcja jest stateczna, natomiast $\lambda < 1$ oznacza, że następuje przeskok plastyczny do stanu, w którym znowu $\lambda > 1$.

Jako przykład zastosowania zasady prac przygotowanych (8.4) do zbadania przeskoku rozpatrzmy powłokę o geometrii, jak na rys. 4. Na podporze dana jest swoboda przesuwu poziomego

$$(8.6) \quad \dot{u}(c) \neq 0, \quad w(c) = \dot{w}(c) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0.$$

Przyjmujemy warunek plastyczności w postaci

$$(8.7) \quad n_\theta^2 + m_\theta = 1,$$

tnz. rozpatrujemy stany naprężenia na jednym płacie hiperpowierzchni plastyczności Treski, [23]. Wykorzystując stowarzyszone prawo płynięcia (2.11) otrzymuje się, zgodnie z (8.7), że $\dot{\lambda}_\varphi = \dot{\kappa}_\varphi = 0$. Tak więc zgodnie z więzami (8.6) pola prędkości przemieszczeń i pole ugięć są

$$(8.8) \quad w = \delta \left(1 - \frac{r}{c}\right), \quad \dot{w} = \dot{\delta} \left(1 - \frac{r}{c}\right), \quad \dot{u} = \frac{\dot{\delta}}{c} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{\delta}{c} r\right).$$

Ponadto (2.11) daje $n_\theta = -\dot{u}/(2h\dot{w}')$; znając natomiast n_θ , można z (8.7) określić m_θ , w zależności od wielkości geometrycznych i kinematycznych. Pozwala to na przedstawienie dysypacji wewnętrznej w postaci $D = D(\dot{E}_{KL})$, jak to jest wymagane przez (8.5).

Po dokonaniu całkowań w (8.5) otrzymujemy, w przypadku rozpatrywanej teorii przybliżonej określonej związkami (8.1) i (8.2),

$$(8.9) \quad \frac{pc^2}{h} \equiv \frac{PR_1^2}{M_0} = 6 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{5} \alpha^2 - \delta \alpha + \frac{4}{3} \delta^2 \right),$$

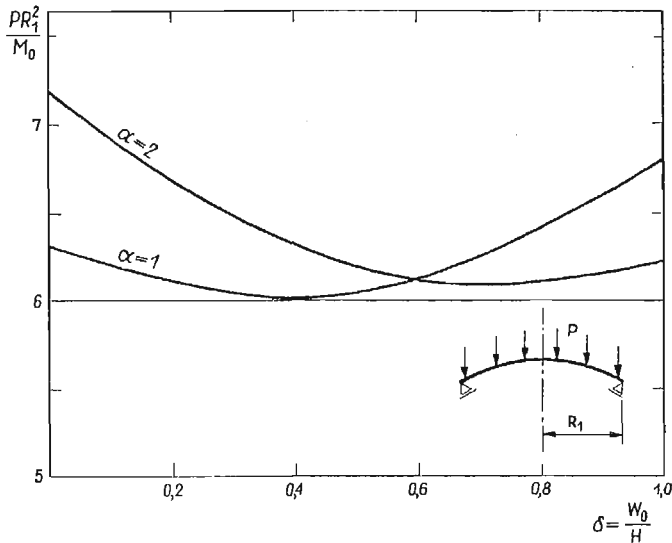
gdzie

$$(8.10) \quad \alpha = \frac{R_1^2}{AH} \equiv \frac{c^2}{2h}, \quad c = \frac{R_1}{A}, \quad \delta = \frac{-W_0}{H}.$$

Ponieważ $dp/d\delta < 0$ dla $0 \leq \delta < \frac{3}{8}\alpha$ obciążenie zmniejsza się przy narastających ugięciach, a więc następuje przeskok. Obciążenie wzrasta ponad wielkość początkowej noś-

ności granicznej dla $\delta \geq \frac{3}{4}\alpha$. Zależność (8.9) przedstawiona jest na rys. 6 dla dwóch wartości α charakteryzujących wymiary powłoki.

Z równań równowagi (8.1) należy jeszcze wyznaczyć n_φ i m_φ spełniające warunki brzegowe zadania i określić parametry geometryczne, dla których spełnione są wymagania

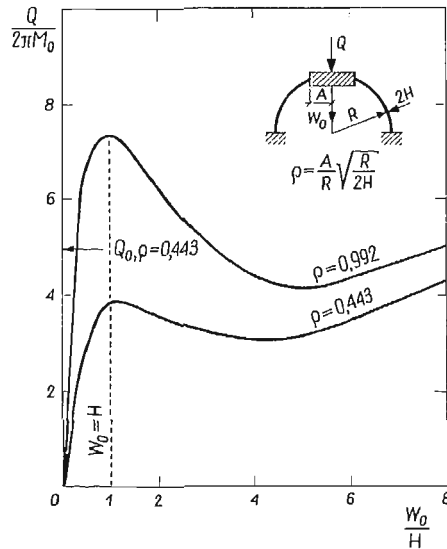


Rys. 6. Oszacowanie przeskoku plastycznego dla małowyniosłej powłoki kulistej

równowagi i ewentualne ograniczenia na zakres stosowalności profilu naprężeń znajdującego się na boku (8.7) hiperpowierzchni plastyczności. Z uwagi na ilustracyjny cel rozpatrywanego przykładu szczegółów tych nie analizujemy. Niestateczność procesu deformacji plastycznej powłok rozpatrywał SZABLIJ [48] dla nieco odmiennej teorii niż określona w (8.1) i (8.2), a której zależności podane są w [51].

Zjawisko przeskoku plastycznego wymaga pogłębionych studiów dla sprecyzowanych teorii powłok, gdyż ilościowe wyniki zależą od charakteru wprowadzanych uproszczeń.

Dla wyniosłych powłok kulistych zjawiska geometrycznego osłabienia konstrukcji i przeskoku plastycznego badał doświadczalnie LECKIE [29]. Czasza półkulista o promieniu 3" i grubości 0,5" obciążona była siłą skupioną przyłożoną poprzez sztywną tarczę. W takich przypadkach obszar plastyczny może nie obejmować całej powłoki i przeskok dotyczy tylko fragmentu konstrukcji, podobnie jak to ma miejsce w powłokach sprężystych. Lokalność przeskoku dla powłok kulistych wykazują również badania SCHROEDERA i SHERBOURNE'A [46]. Krzywe doświadczalne zależności siła — największe ugięcie, uzyskane w omawianych badaniach [29] przytoczone są na rys. 7 dla kilku przypadków średnicy centralnej tarczy. Wyniki te wskazują, że odkształcenia sprężyste mają istotny wpływ na wielkość obciążenia, przy którym następuje przeskok. Dla płyt zjawisko to badał JANAS [24], proponując przybliżoną metodę ilościowej oceny wpływu odkształceń sprężystych na obciążenie.



Rys. 7. Doświadczalna zależność obciążenie-ugięcie dla sprężysto-plastycznej powłoki [29], Q_0 — nośność graniczna

żenie przeskoku. Teoria i technika obliczeniowa rozwinięta przez WASZCZYŻYNA [50] dla sprężysto-plastycznych powłok umożliwią uzyskanie ilościowych wyników dotyczących przeskoku tego typu konstrukcji.

9. Zakończenie

Teoria powłok plastycznych rozwija się obecnie w kierunku uwzględnienia geometrycznej nieliniowości. Aczkolwiek w zakresie teorii nośności granicznej liczba rozwiązań zupełnych jest ciągle niewielka, to nie ma jednak zasadniczych trudności w rozwiązywaniu konkretnych zadań, gdyż równania problemu są znane i zasadnicze twierdzenia, stanowiące podstawę do rozwiązań przybliżonych, są ustalone. W dziedzinach innych niż nośność graniczna sytuacja jest znacznie mniej wyjaśniona.

Równania teorii umiarkowanie dużych ugięć są jednak, w zasadzie, ustalone. Należy oczekiwać, że badania przyniosą w przyszłości rozwiązania problemów początkowo-brzegowych dla różnych przybliżonych teorii i umożliwią ustalenie zakresu ich zastosowania.

Sz szczególnie interesujące, zarówno ze stanowiska teorii, jak i zastosowań w konstrukcjach, jest studium zjawiska przeskoku plastycznego i niestateczności procesu plastycznego płynięcia konstrukcji.

Jednym z problemów badawczych o podstawowym znaczeniu jest sformułowanie i uzasadnienie twierdzeń pozwalających oszacowywać jeśli nie rozwiązanie problemu przyrostowego, to odkształconą postać powłoki plastycznej lub inne elementy rozwiązania takiego przyrostowego problemu.

Wyjaśnienia wymaga różnica pomiędzy plastycznością w konfiguracji nieodkształconej a plastycznością w konfiguracji aktualnej, tzn. określenie w jakim stopniu należy w te-

orii konstrukcji uwzględniać «anizotropię» spowodowaną dużymi odkształceniami. Wiąże się z tym również konieczność rozwiązania zagadnień początkowo-brzegowych dla różnych warunków plastyczności, podobnie jak to miało miejsce w problemach brzegowych teorii nośności granicznej.

Odmienne zagadnienie stanowi analiza sprężysto-plastycznego zachowania się konstrukcji przy występowaniu dużych przemieszczeń i dużych odkształceń. Sformułowania i zbadania wymagają tu również związki podstawowe, gdyż addytywność odkształceń sprężystych i plastycznych w takich przypadkach nie zachodzi.

Nie można pominąć wśród problemów badawczych opracowywania metod i technik numerycznego rozwiązywania zagadnień.

Pominięte w tym artykule takie problemy, jak dynamika powłok plastycznych, mechanika powłok wiotkich, uwzględnienia wzmocnienia materiału stanowią inną grupę ważnych technologicznie i konstrukcyjnie zagadnień.

Oznaczenia

$X^L, L = 1, 2, 3$	współrzędne punktu materialnego w konfiguracji nieodkształconej,
$x^i, i = 1, 2, 3$	współrzędne położenia punktu w konfiguracji odkształconej,
G_K, g_k	wektory bazy, odpowiednio w konfiguracji nieodkształconej i odkształconej,
G_{KL}, g_{kl}	odpowiednie tensory metryczne,
$G_{\Delta\Gamma}$	tensor metryczny nieodkształconej powierzchni,
$g_k^K = G^K g_k$	translator z bazy G_K do bazy g_k ,
$A_\Delta, A_\Delta, \Delta = 1, 2$	wektory bazy na nieodkształconej powierzchni środkowej $X^3 = 0$,
μ_I^A	translator z bazy G_{KL} do bazy na powierzchni środkowej,
$\mu = \det \mu_I^A$	wyznacznik translatora,
$A_{\Delta\Gamma}$	tensor metryczny powierzchni środkowej nieodkształconej powłoki,
$B_{\Delta\Gamma}$	drugi tensor podstawowy nieodkształconej powierzchni środkowej powłoki,
R_{\min}	najmniejszy promień krzywizny nieodkształconej powłoki,
n_K	jednostkowy wektor normalny w konfiguracji nieodkształconej,
$(\) ;$	różniczkowanie kowariantne dwupunktowych tensorów,
$(\)_I$	kowariantne różniczkowanie w bazie powierzchni środkowej,
σ^{ij}	składowe tensora naprężeń Cauchy'ego,
S^{KL}	składowe tensora naprężeń Pioli-Kirchhoffa,
$U = U^K G_K = U^\Delta A_\Delta + W A_3$	wektor przemieszczenia,
\bar{U}^Δ	składowe przemieszczenia stycznego do powierzchni, odniesione do bazy na powierzchni środkowej,
W	przemieszczenie normalne do powierzchni środkowej,
V^Δ	wektor powierzchniowy przemieszczeń stycznych do powierzchni środkowej,
C_{KL}	tensor deformacji Cauchy'ego (różnica metryk),
E_{KL}	tensor odkształceń Greena,

\dot{E}_{KL}	przyrost tensora odkształceń Greena,
$\lambda_{,1r}$	tensor wydłużeń powierzchni środkowej,
\varkappa_{Ar}	tensor zmian krzywizny powierzchni środkowej,
M^{Ar}, N^{Ar}	powierzchniowe tensory Pioli-Kirchhoffa wypadkowych sił i momentów w powłoce,
Q^d	wektor siły poprzecznej,
D	gęstość dysypacji (na jednostkę nieodkształconej powierzchni środkowej powłoki),
$2H$	grubość ścianki powłoki,
d_{ij}	tensor prędkości odkształceń (eulerowski).

Literatura cytowana w tekście

1. D. J. ALLMAN, S. S. GILL, *The effects of changes of geometry on the limit pressure of a flush nozzle in a spherical pressure vessel*, Engineering Plasticity, Cambridge Univ. Press, London 1968, 1–20.
2. M. ARCISZ, J. RYCHLEWSKI, *Plane plastic flow in material description*, Arch. Mech. Stos., **22** (1970), 233–249.
3. G. AUGUSTI, S. D'AGOSTINO, *Tests of cylindrical shells in the plastic range*, Proc. ASCE, **90**, J. M. Eng. Div., EMI, 1964, 69–82.
4. G. AUGUSTI, S. D'AGOSTINO, *Experiments on the plastic behaviour of short steel cylindrical shells subject to internal pressure*, Proc. 1st Int. Conf. Pressure Vessel Techn. (Delft 1969), ASME, New York 1970 **1**, 45–57.
5. B. BUDIANSKY, *Remarks on theories of solid and structural mechanics*, Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics, Nauka, Moskwa 1969, 67–72.
6. M. CAPURSO, *Sul comportamento inelastico delle superfici di rivoluzione in regime di grandi spostamenti*, Universita di Napoli Istituto di Tecnica delle Costruzioni, No 272, Napoli 1969.
7. M. CAPURSO, R. RAMASCO, *Sul calcolo elasto-plastico delle piastre circolari e delle volte di rivoluzione ribassate in regime di grandi spostamenti*, Costruzioni metalliche, 1969, No 5, 3–20.
8. M. D. COON, S. S. GILL, *The effect of change of geometry on the rigid-plastic limit load of cylinders*, Int. J. Mech. Sci., **10** (1968), 355–368.
9. W. J. COTTAM, S. S. GILL, *Experimental investigation of the behaviour beyond the elastic limit of flush nozzles in cylindrical pressure vessels*, J. Mech. Eng. Sci., **8** (1966), 330–350.
10. K. S. DINNO, S. S. GILL, *An experimental investigation into the plastic behaviour of flush nozzles in spherical pressure vessels*, Int. J. Mech. Sci., **7** (1965), 817–839.
11. L. H. DONNELL, *General thin shell displacement-strain relations*, Proc. 4-th U. S. Nat. Cong. Appl. Mech., ASME, New York 1962, 529–536.
12. D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Limit analysis of symmetrically loaded thin shells of revolution*, J. Appl. Mech., **26** (1959), 61–69.
13. M. DUSZEK, *Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflection*, Arch. Mech. Stos., **18** (1966), 599–614.
14. M. DUSZEK, *Analiza plastyczna dwuwarstwowych powłok walcowych uwzględniająca wpływ zmian kształtu*, Rozpr. Inż., **15** (1967), 653–663.
15. М. Душек, *Пластическое поведение толстых сферических оболочек при больших прогибах*, Бюлл. ПАН, серия тех. наук, **15** (1967), 565–575.
16. M. DUSZEK, *Plastic analysis of shallow spherical shells at moderately large deflections*, Theory of Thin Shells, 2nd IUTAM Symp. (Copenhagen 1967), Springer, Berlin 1969, 374–388.
17. M. DUSZEK, *Równania teorii dużych ugięć powłok plastycznych*, Prace IPPT 13/1971.
18. M. DUSZEK, A. SAWCZUK, *Load-deflection relations for rigid-plastic cylindrical shells beyond the incipient collapse load*, Int. J. Mech. Sci., **12** (1970), 839–848.
19. M. DUSZEK, A. SAWCZUK, *O podstawowych związkach teorii powłok plastycznych*, Rozpr. Inż., **18** (1970), 717–733.

20. A. M. FREUDENTHAL, M. P. BIENIEK, *Tests of cylindrical shells in the plastic range*, Int. J. Mech. Sci., 2 (1960), 128-130.
21. Y. C. FUNG, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1965.
22. A. E. GREEN, P. M. NAGHDİ, *A general theory of an elastic-plastic continuum*, Arch. Rat. Mech. Anal. 18 (1965), 251-281.
23. P. G. HODGE, *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill, New York 1959.
24. M. JANAS, *Skończone ugięcia sprężysto-plastyczne płyt zamocowanych*, Prace IPPT 36/1970.
25. J. KLEPACZKO, J. A. KÖNIG, *Ściskanie osiowe powłoki cylindrycznej z równoczesnym ciśnieniem wewnętrznym*, Rozpr. Inż., 14 (1966), 263-275.
26. W. T. KOITER, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wett., B69 (1966) 1-64.
27. А. М. Кульп, *Расчет гибких жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии внутреннего давления и осевого растяжения*. Мат. лет. школы, Тарту 1966, 2, 59-72.
28. R. H. LANCE, J. F. SOECHTING, *A displacement bounding principle in finite plasticity*, Int. J. Solid Structures, 6 (1970), 1101-1118.
29. F. A. LECKIE, *Plastic instability of a spherical shell*, Theory of Thin Shells, 2nd IUTAM Symposium (Copenhagen 1967), Springer, Berlin 1969, 358-373.
30. Ü. LEPIK, *Large deflections of rigid-plastic cylindrical shells under tension and external pressure*, Nucl. Eng. Design, 4, 1966, 29-38.
31. Ю. Р. Лепик, *Большие прогибы жестко-пластической цилиндрической оболочки под действием внутреннего и внешнего давления*, (Баку 1966), Наука, Москва 1966, 534-541.
32. Ю. Р. Лепик, *Равновесие упруго-пластических и жестко-пластических пластин и оболочек*, Инженерный журнал, 4 (1964), 601-610.
33. Ю. Лепик, *Большие прогибы жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии осевого растяжения и внешнего давления*, Tartu riikliku ülikooli toimetised 206 (1967), 146-159.
34. X. M. МУШТАРИ, К. З. ГАЛИМОВ, *Нелинейная теория упругих оболочек*, Таткнигоиздат, Казань 1957.
35. P. M. NAGHDİ, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics, 4, 1-90, North Holland, Amsterdam 1963.
36. W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Inelastic Shell Problems*, Noordhoff, Groningen 1967.
37. E. T. ONAT, *The influence of geometry changes on the load-deformation behaviour of plastic solids*, Plasticity, Proc. 2nd Naval Structural Mechanics, (Providence 1960), Pergamon Press, Oxford 1960, 225-238.
38. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok poddanych plastycznemu plynięciu*, Wyd. Polit. Krak., Kraków 1967.
39. N. PERRONE, *An experimental verification of limit analysis of short cylindrical shells*, J. Appl. Mech., 36 (1969), 362-364.
40. W. PIETRASZKIEWICZ, *Nieliniowe równania dynamiki powłok w nieinercyjnym układzie odniesienia*, Biuletyn Inst. Masz. Przepł. PAN, No 682, Gdańsk 1970.
41. M. ROBINSON, S. S. GILL, *The effect of finite changes of geometry on the rigid-plastic limit pressure of flush nozzles in spherical pressure vessels*, Int. J. Mech. Sci., 11 (1969), 253-267.
42. M. SAVE, M. JANAS, *Collapse and bursting pressures of cylindrical mild steel vessels*, Arch. Bud. Maszyn, 1971 (w druku).
43. A. SAWCZUK, *Large deflection theory of plates*, Proc. 10th Int. Congress Applied Mech. (Münich 1964), Springer, Berlin, 224-228.
44. A. SAWCZUK, *On formulation of large deflection theory for perfectly plastic shells*, Proc. Nat. Bulg. Congr. Appl. Mech. (Varna 1969), Sofia (w druku).
45. J. SCHROEDER, P. RANGARAJAN, *Upper bounds to limit pressure of branch-pipe Tee connections*, First Int. Conf. Press. Vessels Technol. (Delft 1969) ASME, New York 1970, 1, 277-291.
46. J. SCHROEDER, A. N. SHERBOURNE, *Unsymmetrical yield point loads of spherical domes*, Proc. ASCE, 94, J. Eng. Mech. Div., EM3, 1968, 823-839.

47. J. P. SHRIVASTAVA, P. G. GLOCKNER, *Lagrangian formulation of statics of shells*, Proc. ASCE, 96, J. Eng. Mech. Div., EM5, 1970, 547-563.
48. О. Н. Шавлий, *Большие прогибы жестко-пластической пологой сферической оболочки*, Материалы летней школы, Тарту 1966, 2, 140-147.
49. И. Г. Терегулов, *Большие прогибы жестко-пластической пологой сферической оболочки с жесткой заделкой кромок*, Труды VII Всесоюз. Кнф. (Днепропетровск, 1969), Наука, Москва 1970, 578-581.
50. Z. WASZCZYŹYŹN, *Obliczanie skończonych ugięć sprężysto-plastycznych płyt i powłok obrotowo-symetrycznych*, Wyd. Polit. Krak., Kraków 1970.
51. А. С. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гиттли, Москва 1956.
52. Cz. WOŹNIAK, *Nieliniowa teoria powłok*, PWN, Warszawa 1966.

Р е з ю м е

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ УМЕРЕННО БОЛЬШИХ ПРОГИБОВ
ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В работе представлены принципы построения уравнений теории оболочек в лагранжевом описании. Рассмотрены тензорные величины характерные для этого описания, приводятся системы уравнений нескольких вариантов приближенных теорий умеренно больших прогибов жестко-пластических оболочек.

Дан обзор работ по проблемам геометрического упрочнения и прощелкивания пластических оболочек.

S u m m a r y

MODERATELY LARGE DEFLECTIONS THEORY OF RIGID-PLASTIC SHELLS

Paper concerns the Lagrangian description of shell equations. Appropriate kinematic and dynamic tensors entering the field equations are defined and discussed. Specific approximate theories of moderately large deflections are presented. The second part gives a survey of existing solutions regarding geometrical strengthening and snap-through in perfectly plastic shells.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 listopada 1970 r.
