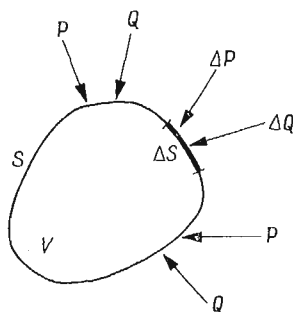


O PEWNYM MODELU CIAŁA PRZENOSZĄCEGO NAPRĘŻENIA MOMENTOWE

MAREK SOKOŁOWSKI (WARSZAWA)

1. Naprężenia momentowe

W ostatnim dziesięcioleciu zanotować można w światowej literaturze naukowej z dziedziny mechaniki ogromny wzrost zainteresowania tematyką teorii ośrodków typu Cosseratów względnie ciał stanowiących ich uogólnienia lub modyfikacje. Wszystkie te teorie, których nie będziemy tu szczegółowo wyliczać i klasyfikować, posiadają jedną wspólną cechę: zakładają one mianowicie, że wzajemne oddziaływania poszczególnych części ośrodka — oddziaływania kontaktowe — nie dają się sprowadzić do prostego wektora naprężeń siłowych i wymagają wprowadzenia sił kontaktowych wyższego rzędu, między innymi naprężeń momentowych. Innymi słowy, układ sił równoważący oddziaływanie



Rys. 1

odrzuconej części ośrodka otaczającego element V o powierzchni S (rys. 1) składa się z wektorów sił \mathbf{P} i momentów \mathbf{Q} ; zakłada się zarazem, że granice

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S}, \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{Q}}{\Delta S}$$

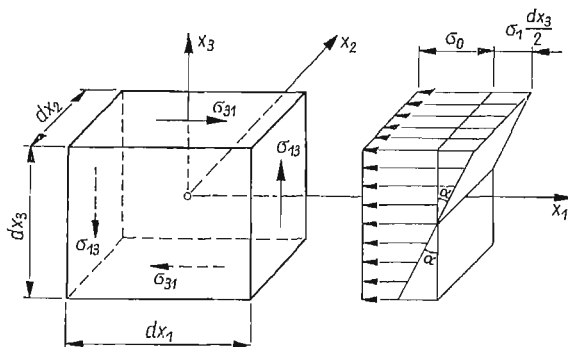
przy ΔS zmierzającym do zera istnieją i nie są tożsamościowo równe zero przy dowolnym wyborze dostatecznie gładkiej powierzchni ΔS . Granice te oznaczamy odpowiednio

$$(1.1) \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S} = {}^n \mathbf{p}, \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{Q}}{\Delta S} = {}^n \mathbf{q},$$

przy czym ${}^n \mathbf{p}$ jest klasycznym wektorem naprężenia (naprężenie siłowe), a ${}^n \mathbf{q}$ — wektorem naprężenia momentowego. Indeks n wskazuje, że wektory te są zależne od wyboru po-

wierzchni S scharakteryzowanej lokalnie przez jednostkowy wektor normalny \mathbf{n} do tej powierzchni.

W klasycznej teorii ośrodka ciągłego przyjmuje się, że granica drugiego stosunku $\Delta Q/\Delta S$ tożsamościowo znika; założenie to można uzasadnić prostym rozumowaniem, nie pretendującym do ścisłości choć niewątpliwie przejrzystym ([1]): wyobraźmy sobie element prostopadłościenny $dx_1 dx_2 dx_3$ w prostokątnym układzie współrzędnych $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3$ (rys. 2) i rozważmy, dla prostoty, jedną ścianę tego elementu $dx_2 dx_3$ obciążoną



Rys. 2

zoną naprężeniami normalnymi $\sigma_{11}(x_2, x_3)$. Omawiając warunki równowagi takiego elementu zakładamy zazwyczaj, że naprężenia te rozłożone są równomiernie na infinytymalnym elemencie powierzchni $dx_2 dx_3$. Gdyby bowiem przyjąć, jak na rys. 2, że naprężenia te są na przykład liniową funkcją zmiennej x_3 ,

$$(1.2) \quad \sigma_{11}(x_2, x_3) = \sigma_0 + \sigma_1 \frac{x_3}{2},$$

to wielkość momentu wypadkowego rozważanych sił działających na ścianę $dx_2 dx_3$ względem osi x_2 przechodzącej przez środek prostopadłościanu wyniesie

$$\frac{1}{2} \sigma_1 \frac{dx_3}{2} dx_2 \frac{dx_3}{2} \frac{2}{3} dx_3 = \frac{1}{12} \sigma_1 dx_2 (dx_3)^3.$$

Uwzględniając ponadto analogiczny wpływ obciążeń siłami $\sigma_{11} dx_2 dx_3$ przeciwległej ściany prostopadłościanu oraz wpływ naprężeń σ_{13} i σ_{31} , których rozkład przyjmijmy dla prostoty równomierny, otrzymamy równanie bilansu momentów w postaci

$$(1.3) \quad \left[(\sigma_{13} - \sigma_{31}) + \frac{1}{12} \frac{(dx_3)^2}{dx_1} (\sigma_1 - \sigma'_1) \right] dx_1 dx_2 dx_3 = M_{x_2}.$$

σ'_1 oznacza tu odpowiedni współczynnik członu liniowego w wyrażeniu na $\sigma_{11}(x_2, x_3)$ na ujemnej ścianie prostopadłościanu elementarnego, proporcjonalny do tangensa kąta α nachylenia wykresu $\sigma_{11}(x_3)$ do osi x_3 . Wyrażenie $\sigma_1 - \sigma'_1$ we wzorze (1.3) można, w przypadku różniczkowości $\sigma(x_1)$, zastąpić różniczką

$$(1.4) \quad \frac{\partial \sigma(x_1)}{\partial x_1} dx_1.$$

Stwierdzamy teraz, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym wzoru (1.3) zawiera człony różnego rzędu względem infinitezymalnej wielkości dx_i . Wpływ nierównomierności rozkładu naprężeń jest o jeden rząd (lub przy uwzględnieniu (1.4) — o dwa rzędy) niższy od wpływu różnicy $\sigma_{13} - \sigma_{31}$, w związku z czym drugi człon w nawiasach kwadratowych (1.3) zazwyczaj jest pomijany. Prowadzi to do klasycznego stwierdzenia symetryczności tensora naprężenia $\sigma_{ij} = \sigma_{(ij)}$.

Można natomiast wyobrazić sobie przypadki, w których konieczność zaniedbania członu zawierającego różnicę $\sigma - \sigma'$ i przyjęcia symetrycznego tensora naprężenia nie jest ak oczywista.

(a) Jeżeli z wymiarami dx_i nie można zmierzać do zera wobec skończonych wymiarów cząstek lub ziaren ciała rzeczywistego, wtedy rozumowanie dotyczące «rzędu małości» składników sumy (1.3) traci wszelki sens; mamy tu do czynienia z ciałami o pewnej mikrostrukturze, w których posługiwanie się symetrycznym tensorem naprężenia jest niemożliwe.

(b) Jeżeli współczynnik $\sigma - \sigma'$ jest bardzo wielki, a w szczególności gdy $\sigma = \text{const} \times \text{tg} \alpha \rightarrow \infty$ i gradient naprężenia w otoczeniu rozważanego punktu jest nieograniczony, wpływ odpowiedniego członu nie może być automatycznie pominięty. Sytuacja taka powstaje w przypadku, gdy mamy do czynienia z osobliwymi punktami pola naprężeń, a więc z nieskończonymi koncentracjami naprężeń. Należy zwrócić uwagę na fakt, że szereg autorów takich jak KOITER [2], STERNBERG [3] sugeruje możliwość wpływu naprężeń momentowych na zjawiska związane z koncentracją naprężeń.

W obu omówionych tu przypadkach w równaniu bilansu momentu (1.3) występuje poza antysymetryczną składową tensora naprężeń siłowych, człon typu (1.4) o charakterze gradientu tensora naprężenia, a więc naprężenie momentowe.

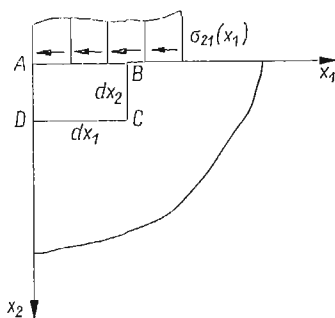
(c) Wyobrazić sobie można ponadto przypadek, gdy w ogóle sporządzenie rysunku typu rys. 2 nie jest możliwe; jeżeli oddziaływanie sąsiednich elementów ciała ma charakterze istotnie momentowy — podobnie jak w ciałach magnetycznych, w których występują jedynie dipole magnetyczne, a odosobnione bieguny magnetyczne nie mają racji bytu — to wykres przedstawiony na rys. 2 traci sens. Ciała tego typu byłyby ośrodkami istotnie mikropolarnymi i utrzymanie do ich opisu symetrycznego tensora naprężeń siłowych byłoby także niemożliwe.

Krótkie i — dla zachowania przejrzystości — bardzo uproszczone rozumowanie przedstawione powyżej stanowi próbę odpowiedzi na pytanie, czy zajmowanie się teorią naprężeń momentowych jest fizycznie lub zwłaszcza technicznie uzasadnione. Równoległe bowiem z intensywnym rozwojem tej teorii, której wyniki w wielu przypadkach przerażają techniczne możliwości ich doświadczalnej weryfikacji, budzą się wątpliwości dotyczące praktycznej użyteczności tego rodzaju badań.

W przypadku sił o określonej strukturze wewnętrznej oraz ciał sprężyste mikropolarnych użyteczność takich teorii nie ulega wątpliwości. Dowodzą tego liczne prace z zakresu teorii ciał z mikrostrukturą, że wymienimy tu dla przykładu pracę KALISKIEGO [9], szereg prac WOŹNIAKA dotyczących ośrodków włóknistych, prace GUTKOWSKIEGO i FRĄCKIEWICZA z zakresu teorii dźwigarów siatkowych i wiele innych. Niemniej, nawet w przypadku rozważania ośrodków ciągłych w zwykłym znaczeniu tego słowa, natrafiamy

na zagadnienia, w których zwykle założenia o symetrii tensora naprężeń siłowych nie dają się utrzymać. Z klasycznej teorii sprężystości znamy rozwiązanie dotyczące obciążenia nieograniczonej płaszczyzny (x_1, x_2) momentem skupionym o wektorze prostopadłym do tej płaszczyzny. Jest oczywiste, że rozważenie warunku równowagi infinitezimalnego elementu $dx_1 dx_2$ ciała zawierającego punkt przyłożenia momentu jest nie do pogodzenia z warunkiem symetrii naprężeń $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, gdyż w przeciwnym przypadku moment ten nie mógłby być niczym zrównoważony.

Jeszcze bardziej przekonujące dowodu dostarcza rozwiązanie zadania przedstawionego przez BOGY i STERNBERGA [5]. Dotyczy ono dwuwymiarowego zagadnienia klina, prostokątnego obciążonego na jednej krawędzi siłami stycznymi rozłożonymi w sposób ciągły (rys. 3). Autorzy wymienionej pracy pokazują, że rozwiązanie tego zadania w ra-



Rys. 3

mach klasycznej teorii sprężystości prowadzi w ogólnym przypadku do pola obrotów i naprężeń zawierających osobliwości w wierzchołku klina. Osobliwości te trudno uzasadnić fizycznie. Z drugiej strony jednak, rozważając infinitezimalny element prostokątny $ABCD$ o bokach dx_1 i dx_2 , widzimy, że ścisłe spełnienie warunków brzegowych na krawędziach AB i AD musi być sprzeczne z założeniem o równości naprężeń $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Dopiero wprowadzenie do rozważań naprężeń momentowych usuwa te osobliwości i prowadzi do całkowicie regularnych rozwiązań.

Przykłady te wskazują, że nawet przypadki tradycyjnych w zasadzie zadań teorii sprężystości prowadzić mogą do rozwiązań, w których dopiero wprowadzenie naprężeń momentowych pozwala uniknąć sprzeczności z rzeczywistym charakterem zjawiska fizycznego

2. Dobór modelu ciała

Praca COSSERATÓW [6] stała się punktem wyjścia do powstania szeregu teorii dotyczących mechaniki i fizyki ośrodków wyższego rzędu, dla których wyrażenie na energię sprężystą zawiera człony zależne nie tylko od pierwszego gradientu przemieszczenia \mathbf{u} , lecz także od wyższych pochodnych u_i . Problem doboru odpowiedniego modelu ciała, który prowadziłby do wyników optymalnie zbliżonych do rzeczywistości nie jest prosty; przeciw wprowadzeniu bardziej złożonych modeli przemawia względ na możliwą prostotę obliczeń. Uwzględnienie bardziej złożonych praw fizycznych dla modeli ciał tego rodzaju stawia

rakże pod znakiem zapytania możliwość doświadczalnej weryfikacji otrzymanych wyników. Model rozważony np. przez MINDLINA [7] wprowadza 903 niezależne od siebie współczynniki sprężystości dla ciała o pewnych własnościach sieci krystalicznej.

Niewątpliwie najprostszym modelem ciała zdolnego do przenoszenia naprężeń momentowych jest model ciała drugiego rzędu omówiony przez MINDLINA [8] i KOITERA [2], nazywany także modelem ciała o związanych obrotach. Każdy punkt materialny ośrodka wyposażony jest jedynie w trzy niezależne stopnie swobody, trzy przemieszczenia u_i — w odróżnieniu od ośrodka omawianego obszernie w pracach NOWACKIEGO (np. [10]), w którym punkty materialne mają po sześć stopni swobody: trzy przemieszczenia i trzy niezależne obroty.

Energię sprężystą dla ośrodka o związanych obrotach, a więc obrotach określonych wzorami

$$(2.1) \quad \omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ipq} u_{q,p}$$

(gdzie ε_{ipq} jest symbolem permutacyjnym), piszemy w postaci

$$(2.2) \quad W(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}) = \frac{1}{2} A_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + B_{ijkl} \varepsilon_{ij} \kappa_{kl} + C_{ijkl} \kappa_{ij} \kappa_{kl}.$$

Tutaj **A**, **B**, **C** są tensorami modułów sprężystości, $\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}$ jest zwykłym, symetrycznym tensorem odkształcenia, zaś $\kappa_{ij} = \omega_{i,j}$ nazywamy tensorem odkształcenia giętno-skrętnego. W ośrodku brak naprężeń wstępnych.

Naprężenia wyraża się przez odkształcenia za pomocą wzorów

$$(2.3) \quad \sigma_{(ij)} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad m_{ij} = \mu_{ij} - \mu \delta_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ji}},$$

przy czym σ_{ij} jest tensorem naprężenia siłowego, a μ_{ij} — tensorem naprężenia momentowego, niesymetrycznym i zawierającym niewyznaczalną część kulistą $\mu = \frac{1}{k} \mu_{k3}$. Tensory te związane są z wektorami określonymi wzorem (1.1) zależnościami $p_i = \sigma_{ji} n_j$, $q_i = \mu_{ji} n_j$.

Rozważenie warunków równowagi elementu ośrodka poddanego działaniu sił masowych **X** i momentów masowych **Y** prowadzi do równań

$$(2.4) \quad \sigma_{ji,j} + \rho X_i = 0, \quad \mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \rho Y_i = 0.$$

Z drugiej grupy równań (2.4) wynika, że tensor σ_{jk} nie musi być w ogólności symetryczny, gdyż na ogół $\mu_{ji,j} + \rho Y_i \neq 0$.

Warunki brzegowe dla powyższego układu równań stwierdzają, że wektory naprężeń siłowych i momentowych winny być na powierzchni ciała równe przyłożonym obciążeniom **p** i **q**,

$$\sigma_{ji} n_j = p_i, \quad \mu_{ji} n_j = q_i.$$

Podobnie w przypadku warunków brzegowych wyrażonych w przemieszczeniach należy przyjąć, że wszystkie składowe uogólnionych przemieszczeń **u** oraz ω są dane na całej powierzchni *S* ciała. Jednak już ze wzoru (2.1) widać, że nie można na powierzchni *S*

dać niezależnie wszystkich sześciu składowych u_i i ω_i , gdyż składowa wektora ω normalna do S wyraża się przez składowe u_i styczne do S . Podobnie i składowa normalna obciążenia momentowego \mathbf{q} wyraża się przez składowe styczne obciążenia siłowego \mathbf{p} . W związku z tym liczba niezależnych warunków brzegowych wynosi tu pięć, w odróżnieniu od przypadku modelu ciała o niezwiązanych obrotach [10], gdzie warunków brzegowych jest sześć.

Tę niedogodność zapisu usuwa KOITER wprowadzając zredukowane siły powierzchniowe

$$(2.5.1) \quad \bar{p}_i = p_i - \frac{1}{2} \epsilon_{jli} q_j n_l$$

oraz zredukowane momenty powierzchniowe

$$(2.5.2) \quad \bar{q}_i = q_i - q n_i,$$

przy oznaczeniu $q = q_j n_j$ dla składowej wektora \mathbf{q} normalnej do powierzchni ciała. Wektor $\bar{\mathbf{q}}$ leży, jak widać, zawsze w płaszczyźnie stycznej do powierzchni i w ten sposób otrzymujemy bezpośrednio układ pięciu niezależnych warunków brzegowych.

Energia sprężysta o postaci (2.2) odnosi się do ogólnego przypadku ciała o minimalnych własnościach symetrii sprężystej. Liczba niezależnych składowych tensorów \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} wynosi tu jeszcze 105. Dopiero założenie pełnej symetrii sprężystej (izotropii) oraz centrosymetrii (w ciele poddanym równomiernemu odkształceniu $\epsilon_{ij} = \text{const}$ nie pojawiają się naprężenia momentowe) prowadzi do zasadniczego uproszczenia wyrażenia (2.2), [9],

$$(2.6) \quad W(\epsilon_{ij}, \kappa_{ij}) = G \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{ii})^2 + \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + 2l^2 (\kappa_{ij} \kappa_{ij} + \eta \kappa_{ij} \kappa_{ji}) \right].$$

Tutaj G i ν są klasycznymi stałymi sprężystości (moduł odkształcenia postaciowego i liczba Poissona), a l i η — nowymi, dodatkowymi stałymi charakterystycznymi dla rozważanego modelu. Nawiasem wspomnieć można, że bezwymiarowa stała η nie pojawia się w rozwiązaniach szeregu konkretnych zagadnień teorii sprężystości, a w szczególności w zagadnieniach dwuwymiarowych.

Tak więc ze wzoru (2.6) widać, że omawiany model ciała wymaga wprowadzenia — a więc i eksperymentalnego wyznaczenia — dodatkowych dwóch względnie nawet tylko jednej stałej sprężystej l . Z punktu widzenia konieczności doświadczalnego określenia tych stałych jest to niewątpliwą zaletą modelu; z punktu widzenia ogólności otrzymanych wyników oraz możliwości ich dopasowania do rzeczywistych własności materiałów nieprostych, stanowi to poważne ograniczenie. Tutaj pokażemy jednak, że przyjęcie nawet tak prostego modelu prowadzi do istotnych zmian w pewnych rozwiązaniach podstawowych teorii sprężystości.

Prosta analiza wzoru (2.6) prowadzi do znanego wniosku, że dodatkowa stała sprężystości l ma wymiar długości:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \text{Dim}[l^2 \kappa_{ij} \kappa_{ij}] &= \text{Dim}[\epsilon_{ij} \epsilon_{ij}] = 1, \\ \text{Dim}[l^2] &= m^2. \end{aligned}$$

Podkreślić tu należy, że istotą omawianego tu modelu, co stwierdził KUNIN [11], jest właśnie istnienie tej dodatkowej stałej sprężystej l , a nie asymetria tensora naprężenia. Już w pracy KOITERA [2] eliminuje się niesymetryczną część tensora naprężenia σ_{ij} wyrażając ją za pomocą drugiej grupy równań równowagi (2.4) przez

$$\sigma_{[mn]} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{imn}(\mu_{ji,j} + \rho Y_i)$$

oraz wstawiając to wyrażenie do pierwszej grupy równań. Prowadzi to do trzech równań równowagi

$$\sigma_{(ji),j} - \frac{1}{2}\varepsilon_{kji}[m_{ik,lj} + (\rho Y_k)_{,j}] + \rho X_i = 0,$$

gdzie $m_{ij} = \mu_{ij} - 1/3\mu_{kk}\delta_{ij}$ oznacza dewiatorową część tensora μ_{ij} .

Równania te, wraz ze zredukowanymi warunkami brzegowymi

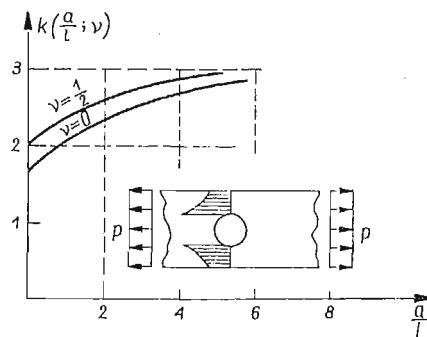
$$\bar{p}_i = \left[\sigma_{(ji)} + \frac{1}{2}\varepsilon_{jli}(m_{pl,p} - \overset{n}{m}_{,l} + \rho Y_l) \right] n_j,$$

$$\bar{q}_i = m_{ji}n_j - \overset{n}{m}n_i,$$

gdzie $\overset{n}{m} = m_{ij}n_i n_j$ nie zawierają więc, jak widać, antysymetrycznej części tensora σ_{ij} nie tracąc przy tym nic na ogólności.

ROGULA [12] uogólniając rozważania KUNINA dowodzi (i to w przypadku skończonych odkształceń), że można jeszcze inaczej przeprowadzić symetryzację zagadnienia eliminując z rozważań nie tylko antysymetryczną część σ_{ij} , ale i naprężenia momentowe μ_{ij} w całości. Posłużył się w tym celu pojęciem zredukowanego tensora naprężeń $\bar{\sigma}_{ij}$, różnego od $\sigma_{(ij)}$, ale także symetrycznego. Nie zmienia to jednak oczywiście faktu, że w rozwiązaniach pozostają dodatkowe stałe sprężystości l i η wpływające na istotną modyfikację szeregu podstawowych rozwiązań teorii sprężystości.

Klasyczny problem dwuwymiarowej teorii sprężystości dotyczy rozciągania nieograniczonej tarczy sprężystej zawierającej otwór kołowy (zagadnienie KIRSCHA, por. np. [4]). Na brzegu otworu występuje (rys. 4) w przypadku jednoosiowego rozciągania obciążeniem p koncentracja naprężeń scharakteryzowana stosunkiem k maksymalnego naprę-



Rys. 4

żenia $\sigma_{\theta\theta}$ do naprężenia p . Stosunek ten dla otworu kołowego o dowolnym promieniu a wynosi $k = 3$ i nie zależy od a . Niezależność k od a jest prostą konsekwencją faktu, że w ramach klasycznej teorii sprężystości rozwiązanie dowolnego problemu statycznego może mieć postać

$$\sigma_{ij}(x_k) = f(p; d^k; E, \nu),$$

gdzie p oznaczają parametry obciążenia, d^k — parametry charakteryzujące wymiary ciała, E, ν — stałe sprężystości. W omawianym przypadku jedynym parametrem obciążenia jest naprężenie p , jedynym parametrem geometrycznym — promień a otworu. Współczynnik koncentracji k może więc mieć jedynie postać

$$k = \frac{\sigma_{\theta\theta}^{\max}}{p} = f(a; E, \nu)$$

i musi być bezwymiarowy. Ponieważ jednak moduł E ma wymiar Nm^{-2} , a ν jest bezwymiarowe, zatem a (o wymiarze m) nie może pojawić się w powyższym wzorze, gdyż żadna kombinacja a, E nie może być bezwymiarowa. Współczynnik k mógłby być jedynie funkcją liczby Poissona ν .

Można natomiast przypuszczać, że — w pewnych przynajmniej przypadkach — rozmiar otworu nie jest obojętny dla współczynnika koncentracji. Na przykład w materiałach o strukturze gruboziarnistej efekt małych otworów może być odpowiednio mniejszy.

Model ciała scharakteryzowany dodatkową stałą sprężystości l o wymiarze $[l] = \text{m}$ daje taką możliwość, gdyż współczynnik koncentracji mógłby być funkcją dodatkowego parametru bezwymiarowego l/a . Rozwiązanie MINDLINA [8] ma istotnie postać

$$k = \frac{\sigma_{\theta\theta}^{\max}}{p} = 3 \frac{1 + \frac{1}{3}F}{1 + F},$$

gdzie F jest funkcją ν oraz stosunku a/l ,

$$F = \frac{8(1-\nu)}{4 + \frac{a^2}{l^2} + \frac{2a}{l} \frac{K_0(a/l)}{K_1(a/l)}},$$

K_0, K_1 są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela. Dla małych wartości a/l współczynnik koncentracji obniża się wydatnie, co widać z wykresu na rys. 4. W tym sensie stwierdzić można, że model ciała z dodatkową stałą l stwarza możliwość uczynienia kroku w kierunku uwzględnienia wpływu rozmiarów otworu na koncentrację naprężenia w materiałach rzeczywistych.

Rozwiązania niesymetrycznej teorii sprężystości dotyczące nieskończonych koncentracji naprężeń prowadzą także do wyników różnych od klasycznych. Naprężenia w półpłaszczyźnie sprężystej $x_1 > 0$ obciążonej w początku układu współrzędnych siłą skupioną P normalną do brzegu wyrażają się znanym wzorem [4]

$$\sigma_{11} = \frac{2P}{\pi} \frac{x_1^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Rozwiązanie MUKI i STERNBERGA [3] ma postać nieporównanie bardziej skomplikowaną, jednak w otoczeniu punktu przyłożenia siły daje się ono wyrazić wzorem asymptotycznym

$$\sigma_{11} \approx \frac{2P}{\pi} \frac{x_1^3 + 2(1-\nu)x_1x_2^2}{(3-2\nu)(x_1^2+x_2^2)^2}.$$

Z porównania obu wzorów widać, że współczynniki intensywności nieskończonej koncentracji naprężeń są różne oraz, co więcej — rozwiązanie niesymetrycznej teorii sprężystości nie przechodzi w rozwiązanie klasyczne przy $l \rightarrow 0$. Ta ostatnia uwaga dotyczy jedynie wzoru na współczynnik intensywności naprężeń, a nie pełnego rozwiązania zagadnienia brzegowego.

Fakt ten, będący często podstawą krytyki modelu ciała nieprostego, jest jednak znów prostą konsekwencją faktu, że stała l o wymiarze długości nie może pojawić się, w braku innych parametrów geometrycznych, w bezwymiarowym współczynniku intensywności. Współczynnik ten może być jedynie funkcją liczby Poissona.

Zagadnienie skręcania pręta pryzmatycznego przy uwzględnieniu wpływu naprężeń momentowych było rozważone w pracy [13]. Wzór na sztywność skręcania pręta pryzmatycznego o przekroju F (przy założeniu, że dodatkowa stała $\eta = 0$) ma postać

$$J_s = G \iint_F \left[x \frac{\partial(\varphi + l^2 \Delta \varphi)}{\partial y} - y \frac{\partial(\varphi + l^2 \Delta \varphi)}{\partial x} + x^2 + y^2 + 6l^2 \right] dx dy,$$

gdzie $\varphi = \varphi(x, y)$ jest funkcją spaczenia spełniającą równanie

$$\Delta \varphi - l^2 \Delta \Delta \varphi = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

oraz odpowiedni układ warunków brzegowych. Przy $l \rightarrow 0$ wzory powyższe przechodzą w znane wzory klasycznej teorii skręcania Saint-Venanta.

Uwzględnienie naprężeń momentowych prowadzi do zwiększenia sztywności skręcania prętów sprężystych. Widać to wyraźnie ze wzoru na sztywność J skręcania pręta o przekroju kołowym i średnicy d , wyprowadzonego przez KOITERA [2],

$$J = \frac{\pi}{32} G d^4 [1 + 48(l/d)^2(1 + \eta)],$$

względnie

$$J = J_0 \left[1 + 48 \left(\frac{l}{d} \right)^2 (1 + \eta) \right].$$

Tutaj J_0 oznacza sztywność wyznaczoną zgodnie z teorią Saint-Venanta. Dla prętów o bardzo małej średnicy porównywalnej z l , wzrost sztywności staje się znaczny. Wynik ten, pod względem jakościowym, jest w zasadzie zgodny ze znanym stwierdzeniem o podwyższonej wytrzymałości cienkich drutów ze względu na zwiększony wpływ energii powierzchniowej.

Uwzględnienie dodatkowej stałej sprężystości w zagadnieniach propagacji fal sprężystych prowadzi do zjawiska dyspersji. Na przykład RYMARZ rozważył w pracy [14] problem propagacji fal powierzchniowych z uwzględnieniem naprężeń momentowych.

Prędkość propagacji v fal Rayleigha wyznacza się, jak wiadomo, z równania algebraicznego [15]

$$(2 - \eta^2)^4 = 16(1 - \gamma\eta^2)(1 - \eta^2),$$

gdzie $\eta = v/c_T$ jest stosunkiem tej prędkości do prędkości propagacji fal poprzecznych, a $\gamma = c_T/c_L = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}$ – stosunkiem prędkości propagacji fal poprzecznych do podłużnych. Widać stąd, że v zależy wyłącznie od charakterystyki sprężystej ciała, a nie zależy od parametrów (długości) fali.

W przypadku rozważonym w pracy [14] odpowiednie równanie charakterystyczne ma postać

$$(2 - \eta^2)^4 [1 + 2\eta^2\xi^4 + \xi^2 + 3\xi^2\eta^2 + 2\xi^2\eta^2\sqrt{\xi^2 + 1 - \eta^2}] = 16(1 + 4\xi^2\eta^2)(1 - \gamma\eta^2)(1 + \xi^2 - \eta^2),$$

gdzie $\xi = 2\pi l/\lambda$, a λ jest długością fali. Prędkość propagacji fal powierzchniowych jest dla $l > 0$ większa od prędkości fal Rayleigha i wzrasta przy malejącej długości fali. Drgania są więc dyspersyjne, czego można oczekiwać w przypadku ośrodka o strukturze komórkowej lub ziarnistej (dyspersja na granicach ziaren).

3. Wnioski

Przytoczone przykłady wskazują, że zastosowanie najprostszego modelu ciała sprężystego zdolnego do przenoszenia naprężeń momentowych modyfikuje szereg rozwiązań teorii sprężystości wprowadzając do nich zmiany o charakterze jakościowym. Kierunek tych zmian pozwala przypuszczać, że zbliżamy się w ten sposób do fizycznie umotywowanych rozwiązań dla ciał rzeczywistych. Brak co prawda dowodów na to, na ile omawiany model pozwala zbliżyć się do rzeczywistości. Jednak prostota opisu matematycznego stwarza tu możliwości względnie łatwej doświadczalnej weryfikacji wyników analizy teoretycznej. Z tego też względu wydaje się, że nie zaniedbując rozwijania teorii opartych na modelach bardziej złożonych, nie należy zapominać o możliwościach tkwiących w omówionym tu modelu ośrodka drugiego rzędu o związanych obrotach.

Literatura cytowana w tekście

1. C. B. BANKS, M. SOKOŁOWSKI, *On Certain Two-Dimensional Applications of Couple-Stress Theory*, Int. J. Solids Structures, **4** (1968) 15–29.
2. W. T. KOITER, *Couple Stresses in the Theory of Elasticity*, I–II, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., Seria B, **67**, 17–44.
3. R. MUKI, E. STERNBERG, *The Influence of Couple-Stresses on Singular Stress Concentrations in Elastic Solids*, Z.A.M.P., **16** (1965), 611–648.
4. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria Sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
5. D. B. BOGY, E. STERNBERG, *The Effect of Couple-Stresses on the Corner Singularity due to an Asymmetric Shear Loading*, Int. J. Solids Structures, **4** (1968), 159–174.

6. E. COSSERAT, F. COSSERAT, *Théorie des corps déformables*, Hermann, Paryż 1909.
7. R. D. MINDLIN, *Microstructure in Linear Elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **16** (1964), 51–78.
8. R. D. MINDLIN, *Influence of Couple Stresses on Stress Concentrations*, Experimental Mechanics, **1** (1963)
9. S. KALISKI, *O pewnym modelu ośrodka ciągłego z istotnie niesymetrycznym tensorem napięć mechanicznych*, Biul. WAT, **11**, 4 (1962).
10. W. NOWACKI, *Teoria mikropolarnej sprężystości*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1970.
11. И. А. КУНИН, *Модель упругой среды с пространственной дисперсией*, Прикл. Мат. Мех., **30** (1966), 542.
12. D. ROGULA, *Moment Stresses and the Symmetry of Stress Tensor in Bodies with no Local Structure* Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **18** (1970), 159.
13. M. SOKOŁOWSKI, *Couple-Stresses in Problems of Torsion of Prismatic Bars*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **13** (1965), 419–424.
14. C. RYMARZ, *Fale powierzchniowe w ośrodku z naprężeniami momentowymi*. Mech. Teoret. Stos. **5**, (1967), 337–346.
15. W. M. EWING, W. S. JARDETZKY, F. PRESS, *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London 1957.

Р з з ю м е

О НЕКОТОРОЙ МОДЕЛИ ТЕЛА С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В статье рассмотрены некоторые вопросы, связанные с приложениями теории моментных напряжений к моделям сред второго порядка со связанными вращениями. На основе ряда известных решений из данной области отмечается, что рассматриваемая модель, несмотря на её простоту, приводит к существенным качественным изменениям во многих задачах теории упругости и даёт возможность ближе подойти в теоретическом анализе к описанию явлений, происходящих в действительности в материалах.

S u m m a r y

ON A MODEL OF BODY TRANSMITTING COUPLE-STRESSES

The subject of the paper are certain properties of the model of a body with constrained rotations applied in the couple-stress theory. On the basis of a number of solutions known from the literature the conclusion can be drawn that the model-in spite of its simplicity-introduces substantial modifications to many fundamental problems of the theory of elasticity and brings the corresponding solutions closer to the physical reality of phenomena occurring in real bodies.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 listopada 1970 r.