MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 9 (1971)

PEWNE PROBLEMY EWOLUCJI RÓŻNICZKOWYCH ZASAD WARIACYJNYCH MECHANIKI W XIX I XX WIEKU

N. J. CYGANOWA (WOŁGOGRAD)

Początek XIX wieku charakteryzował się w mechanice ponownym wzrostem zainteresowania problematyką różniczkowych zasad wariacyjnych. Sprzyjały temu zjawisku w zasadzie dwie okoliczności.

Po pierwsze, pod wpływem wymogów techniki rozszerzeniu uległo pojęcie więzów nałożonych na układ punktów materialnych. Poczęto rozważać nie tylko więzy dwustronne, stacjonarne i holonomiczne, ale również więzy jednostronne, niestacjonarne i nawet anholonomiczne.

To rozszerzenie pojęcia więzów wymagało też odpowiedniego uogólnienia systematu mechaniki analitycznej Lagrange'a, opracowanego w swoim czasie dla więzów dwustronnych i stacjonarnych, bazującego na zasadzie przemieszczeń wirtualnych wraz z zasadą D'Alemberta — ten zespół zasad będziemy dalej nazywali zasadą D'Alemberta-Lagrange'a. W dziełach M. W. OSTROGRADZKIEGO i jego szkoły[1]) zostały wyczerpująco opracowane podstawy analitycznej teorii równowagi i ruchu układów mechanicznych, ograniczonych przez więzy o najogólniejszej postaci. Teoria ta została oparta o uogólnioną zasadę przemieszczeń wirtualnych i zasadę D'Alemberta.

Po drugie, rozwój fizyki doświadczalnej na przełomie XVIII i XIX wieku zaktualizował problemy matematycznego opracowania wyników obserwacji. Szerokie zastosowanie znalazła metoda najmniejszych kwadratów, stanowiąca nadzwyczaj skuteczne narzędzie matematycznej obróbki rezultatów eksperymentów. Cenny wkład w opracowanie tej metody wniósł C. F. GAUSS. Zasada najmniejszych kwadratów przywiodła GAUSSA w 1829 r. [26] do sformułowania nowej różniczkowej zasady wariacyjnej w mechanice, nazwanej przez niego zasadą najmniejszego przymusu. Zasada najmniejszego przymusu jest najogólniejszą zasadą mechaniki, słuszną zarówno dla układów holonomicznych, jak i dla układów anholonomicznych (liniowych i nieliniowych). Nadzwyczaj wielka

[1]) Szczegółową analizę prac Ostrogradzkiego z dziedziny mechaniki analitycznej można znaleźć w następujących książkach: Гнеденко, Б. В., Погребысский, И. Б., *Михаил Васильевич Остроградский*, М., 1963; Геронимус, Я. Л., *Очерки о работах корифеев русской механики*, М., 1952; Григорьян, А. Т., *М. В. Остроградский*, М., 1961; Жуковский, Н. Е., *Ученые труды М. В. Остроградского по механике*, Сб. соч. т. VII, М-Л, 1950; Погребысский, И. Б., *О механике систем с идеальными неудерживающими связями*, Труды И.И.Е. и Т., т. 34, М., 1960; Тюлина, И. А., Казарян, А. А., *Трактовка принципа возможных перемещений в трудах М. В. Остроградского и его школы*, Очерки истории математики и механики, М., 1963.

wartość teoretyczna i praktyczna zasady najmniejszego przymusu uwarunkowana jest jej ogólnością, prostotą i klarownością idei. Zakres zastosowań zasady nie ogranicza się bynajmniej do problemów mechaniki teoretycznej; zasada Gaussa stosowana jest w fizyce teoretycznej i innych pokrewnych dziedzinach przyrodoznawstwa. W pracach badawczych XIX i XX wieku zasada Gaussa zajmuje poczesne miejsce. Wielu wybitnych matematyków, mechaników i fizyków zwróciło w swych pracach uwagę na tę zasadę ze względu na jej wielkie walory teoretyczne i praktyczne, nadając jej ogólniejszy i szerszy sens.

Koniec XIX wieku i pierwsza ćwierć XX wieku znamionowały się w dziedzinie zasad wariacyjnych mechaniki analitycznej wynikami o dużym uogólniającym znaczeniu. Dotyczy to zarówno zasad całkowych, jak i różniczkowych zasad mechaniki.

W 1896 r. O. HOELDER [30] sformułował ogólną zasadę całkową mechaniki, która w decydujący sposób wpłynęła na kierunki dalszych poszukiwań w dziedzinie zasad wariacyjnych. Zasada całkowa Hoeldera została uogólniona i rozwinięta w pracy A. VOSSA [45].

W 1897 r. L. KÖNIGSBERGER [32] wyprowadził uogólnione postacie różniczkowych zasad wariacyjnych, odpowiadające uogólnieniu pojęcia potencjału kinetycznego.

W początkach XX wieku P. JOURDAIN [31] sformułował nową różniczkową zasadę wariacyjną, stanowiącą pośrednie ogniwo między zasadami D'Alemberta-Lagrange'a i Gaussa. Dalszy rozwój tej zasady związany jest z pracami szkoły austriackiej [19].

Istotne miejsce w badaniach z pierwszej ćwierci XX wieku zajmuje zagadnienie zależności pomiędzy zasadami różniczkowymi i całkowymi w mechanice. W fundamentalnych traktatach HOELDERA i VOSSA wykazany został związek ogólnej zasady całkowej z zasadą D'Alemberta-Lagrange'a; w toku dalszych badań, w szczególności w pracach H. BRELLA [24] i C. SCHAEFERA [42], związek ten został wyeksponowany jeszcze wyraźniej. W pracach H. BRELLA [25] i R. LEITINGERA [33] znaleziono relację pomiędzy zasadą Hoeldera-Vossa i zasadami Gaussa i Jourdaina. Ogólna transformacja zasady D'Alemberta-Lagrange'a do postaci całkowej nasuwała myśl o analogicznym przekształceniu innych zasad różniczkowych. Z tego punktu widzenia interesującą jest praca E. SCHENKLA [44], w której wyprowadzona została postać całkowa zasady Gaussa.

Nowy etap w ewolucji różniczkowych zasad wariacyjnych rozpoczęty został w 30 latach XX wieku pracami A. P. PRZEBORSKIEGO [39] i N. G. CZETAJEWA [20], w których zasada D'Alemberta-Lagrange'a została rozszerzona na układy z nieliniowymi więzami anholonomicznymi pierwszego rzędu. Idee CZETAJEWA miały decydujący wpływ na dalsze badania w dziedzinie różniczkowych zasad mechaniki, prowadzone przez szkołę radziecką.

Zasada najmniejszego przymusu Gaussa w jej postaci klasycznej, uogólnienia zasady i zastosowanie jej do różnych problemów mechaniki, zagadnienie niesprzeczności zasad Gaussa i D'Alemberta-Lagrange'a, warianty drugiej z tych zasad, zastosowanie obydwu zasad różniczkowych do wyprowadzenia równań dynamicznych dla układów anholonomicznych, układów o zmiennych masach i układów z więzami nieidealnymi — oto krąg podstawowych problemów, które zostały rozwinięte w pracach mechaników radzieckich w okresie ostatnich 35 lat.

Omówimy teraz bardziej szczegółowo niektóre spośród wymienionych etapów ewolucji różniczkowych zasad wariacyjnych w mechanice.

1. Z historii ewolucji zasady Gaussa — zasady najmniejszego przymusu

1.1 Zasada najmniejszego przymusu w twórczości Gaussa. Związek zasady najmniejszego przymusu z metodą najmniejszych kwadratów. Zasada Gaussa stanowi analogię fizyczną dla metody najmniejszych kwadratów. GAUSS napomyka o tej analogii mimochodem, na zakończenie swego artykułu [26]:

«Nadzwyczaj charakterystyczne jest to, że jeżeli ruchy swobodne są sprzeczne z naturą układu, wówczas ulegają one zmianom, zupełnie tak samo, jak w toku obliczeń zmianom ulegają wnioski geometrów, uzyskane bezpośrednio, po zastosowaniu do nich metody najmniejszych kwadratów w tym celu, by uczynić te wnioski niesprzecznymi z warunkami koniecznymi, podyktowanymi przez istotę zagadnienia. Tę analogię można byłoby kontynuować, lecz wykracza to poza ramy sformułowanego obecnie przeze mnie zagadnienia».

Z historycznego i logicznego punktu widzenia kwestia ta zasługuje na bardziej wnikliwe rozważenie.

Zgodnie z zasadą najmniejszego przymusu, funkcja kwadratowa względem przyspieszeń

$$Z = \frac{dt^4}{4} \sum_{i=1}^{3n} m_i \left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i} \right)^2, \tag{1.1}$$

nazwana przez GAUSSA przymusem, osiąga minimalną wartość na rzeczywistym ruchu układu punktów materialnych.

We wzorze tym składnik

$$\frac{dt^4}{4} \left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i} \right)^2$$

reprezentuje kwadrat odchylenia rzeczywistego ruchu punktu układu o masie m_i od ruchu swobodnego w nieskończenie małym przedziale czasu dt. W metodzie najmniejszych kwadratów wyraz ten odpowiada kwadratowi odchylenia rzeczywistej wartości od wartości obserwowanej. Czynnik m_i przy kwadracie odchylenia odpowiada czynnikowi «wagi» w metodzie najmniejszych kwadratów. Do zasady najmniejszego przymusu doszedł GAUSS niewątpliwie przez analogię z metodą najmniejszych kwadratów. Interesująca jest jednak kwestia, czy powracał on do tej analogii po 1829 r. i jeśli tak, to jak odzwierciedliły się w dalszej jego twórczości naukowej idee, sformułowane przezeń w owej jedynej pracy z mechaniki analitycznej [26].

Aby wyjaśnić tę kwestię, zwróćmy się do tez doktorskich A. RITTERA, ucznia GAUSSA, oraz do zachowanych notatek RITTERA z wykładów GAUSSA o metodzie najmniejszych kwadratów, sporządzonych w 1850–1851 r. RITTER studiował na Uniwersytecie w Göttingen od 1850 do 1853 r., w 1853 r. obronił pracę doktorską, której temat został zaproponowany przez GAUSSA. W wykładach zimowego semestru 1850–1851 r. GAUSS rozważał zagadnienie określenia najmniejszej wartości sumy kwadratów zmiennych, spełniających zadane nierówności liniowe. Z punktu widzenia zasady najmniejszego przymusu do tego zagadnienia matematycznego sprowadza się problem określenia rzeczywistego ruchu układu punktów materialnych z więzami jednostronnymi. Rzeczywiście, wzór dla przymusu

$$Z = \sum_{i=1}^{3n} m_i\left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2,$$

w którym czynnik $\frac{dt^4}{4}$ można odrzucić, jako nie wpływający na ekstremum przymusu, za pomocą podstawienia liniowego

$$\sqrt{m_i}\ddot{x}_i - \frac{X_i}{\sqrt{m_i}} = \xi_i,$$

można przekształcić do postaci

$$Z = \sum_{i=1}^{3n} \xi_i^2.$$

Dwukrotnie różniczkując po czasie warunki dla jednostronnych więzów holonomicznych

$$f_k(x_i, t) \leqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

oraz jednokrotnie różniczkując warunki dla jednostronnych więzów anholonomicznych

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{ri}\dot{x}_i + a_r \leqslant 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, l)$$

uzyskujemy $m+l$ nierówności liniowych względem przyspieszeń $\ddot{x}_i$, które można przedstawić w postaci

$$(1.2) \qquad \sum_{i=1}^{3n} \alpha_{\mu i}\xi_i + A_\mu \leqslant 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m+l).$$

Mechaniczny problem określenia rzeczywistego ruchu układu punktów materialnych na podstawie zasady Gaussa najmniejszego przymusu sprowadza się do poszukiwania minimum Z przy warunkach (1.2), a więc w pełni pokrywa się ze sformułowanym przez Gaussa matematycznym problemem określenia minimum sumy kwadratów przy warunkach wyrażających się przez nierówności liniowe. Według świadectwa Rittera [41] Gauss nie mówił, jakie zagadnienia naprowadziły go na myśl o tym problemie matematycznym. Naturalnie powstaje kwestia, czy sam Gauss zdawał sobie sprawę ze związku tych dwu problemów? Czy matematyczny problem określenia minimum sumy kwadratów zmiennych, przy warunkach wyrażających się przez nierówności, został przezeń sformułowany w związku z zasadą najmniejszego przymusu? Wiele poszlak skłania ku pozytywnej odpowiedzi na to pytanie. Najbardziej przekonywającą spośród nich jest wskazanie przez Gaussa [26], [27] na istotne znaczenie warunków, wyrażonych przez nierówności. Dlatego właśnie centralne miejsce w pracy doktorskiej Rittera zajmuje zastosowanie zasady najmniejszego przymusu do układów z więzami jednostronnymi.

Zapoznajmy się pokrótce z treścią wspomnianego wykładu Gaussa o metodzie najmniejszych kwadratów [28].

Rozważany jest problem określenia najmniejszej wartości sumy kwadratów

$$x_1^2+x_2^2+ \dots +x_n^2 = R^2,$$

zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, spełniających zadane nierówności liniowe

$$u_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad m > n).$$

W celu rozwiązania tego problemu poszukiwany jest układ takich wartości zmiennych $x_i = k_i$, który n spośród nierówności przekształca w równania

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \dots, u_n = 0 \tag{1.3}$$

oraz spełnia pozostałe $m-n$ nierówności

$$u_{n+1} > 0, \quad u_{n+2} > 0, \dots, u_m > 0. \tag{1.4}$$

Znaleziony układ wartości zmiennych $k_1, k_2, \dots, k_n$ służy jako punkt wyjściowy poszukiwań kierunku najszybszego zmniejszania się sumy kwadratów, tzn. kierunku, w którym zadane zmniejszenie się sumy kwadratów zmiennych osiąga się przy najmniejszej zmianie układu ich wartości. Jako miarę zmiany układu wartości zmiennych GAUSS przyjmuje pierwiastek kwadratowy z sumy kwadratów wariacji wartości poszczególnych zmiennych

$$\sqrt{(\delta x_1)^2+(\delta x_2)^2+ \dots +(\delta x_n)^2}.$$

W ten sposób dochodzi GAUSS do następującego problemu: spośród wszystkich kombinacji wariacji zmiennych $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$, zmniejszających sumę kwadratów tych zmiennych o określoną wielkość

$$\delta(R^2) = -2\lambda, \tag{1.5}$$

znaleźć taką kombinację, dla której $\sqrt{(\delta x_1)^2+(\delta x_2)^2+ \dots +(\delta x_n)^2}$, a tym samym również $(\delta x_1)^2+(\delta x_2)^2+ \dots +(\delta x_n)^2$ przyjmuje najmniejszą wartość.

Problem ten jest podobny do wyjściowego, z tą różnicą jednak, że zmiennych δx_i jest o jedną mniej, niż zmiennych x_i, gdyż jedną z δx_i można wyrugować przy pomocy równania (1.5), zamiast zaś początkowych m nierówności mamy obecnie n nierówności, uzyskiwanych przez wariowanie warunków (1.3)

$$\delta u_1 \geqslant 0, \quad \delta u_2 \geqslant 0, \dots, \delta u_n \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Ta sama metoda stosowana jest do tego nowego problemu. Każdy następny krok podobnych rozważań zmniejsza liczbę zmiennych i nierówności o jedną (przy czym zmiennych pozostaje zawsze o jedną więcej, niż nierówności), co w wyniku doprowadza problem do zagadnienia z jedną zmienną (pozostałe można wyrugować przy pomocy równań) i dwiema nierównościami. Na ogół rozważany proces można również przerwać wcześniej.

W końcowym zagadnieniu z jedną zmienną odpada kwestia istotna we wszystkich poprzednich zagadnieniach, mianowicie problem odpowiedniego wyboru zmian układu wartości; zmiana wartości jednej zmiennej powoduje obecnie zmiany wartości pozostałych $n-1$ zmiennych i chodzi tylko o wielkość tej zmiany, niezbędną dla osiągnięcia minimum. Warunek ten określony jest równością

$$\delta(R_{n-2}^2) = 0,$$

gdzie R_{n-2}^2 to suma kwadratów zmiennych w ostatnim zagadnieniu. Po znalezieniu wartości zmiennych, spełniających ostatnie zagadnienie i przejściu wszystkich kolejnych kroków do zagadnienia wyjściowego, dochodzi się do nowego układu wartości zmiennych, odpowiadającego kierunkowi najszybszego zmniejszania się sumy ich kwadratów. Zmiana tego nowego układu wartości w znalezionym kierunku doprowadza do układu wartości minimalizujących sumę kwadratów, względnie przekształcających nierówności (1.4) w równości. W ostatnim przypadku rozważony proces zostaje powtórzony względem tych nierówności, które przekształcają się w równości.

Pod pewnymi względami C. F. GAUSS nie w pełni rozważył zagadnienie minimum. Dotyczy to przede wszystkim założeń wyjściowych: nie zawsze można znaleźć układ wartości zmiennych, który przekształca w równości n spośród zadanych nierówności i spełnia pozostałe $m-n$ nierówności. GAUSS nie dowodzi też jednoznaczności rozwiązania problemu.

Pomimo to samo sformułowanie problemu minimum, przy warunkach wyrażających się przez nierówności, nadaje szczególną wartość jego pracy. Pozwala ono wnioskować, że GAUSS pragnął doprowadzić do końca problem matematyczny, wynikający z zastosowania zasady najmniejszego przymusu do ogólnego przypadku więzów jednostronnych.

Korzystając z metod geometrii wielowymiarowej GAUSS w swoich wykładach położył również podwaliny pod geometryczne traktowanie zagadnienia minimum z nierównościami. Jego idee stały się podstawą odpowiedniego rozdziału pracy doktorskiej RITTERA [41]. Tak więc, wypowiedziawszy w pracy z 1829 r. zasadę najmniejszego przymusu, GAUSS powrócił do niej w ostatnich latach swojego życia, mając na celu sformułowanie jej jako problemu matematycznego na ekstremum dla więzów jednostronnych, tzn. wyrażających się przez nierówności.

1.2. Podstawowe etapy ewolucji zasady Gaussa. Analiza materiałów źródłowych umożliwia wyróżnienie następujących etapów ewolucji zasady Gaussa.

Pierwszy etap zawiera się w okresie od pracy GAUSSA (1829) do pracy R. LIPSCHITZA (1876). W swojej pracy GAUSS podał jedynie słowne sformułowanie zasady.

W badaniach naukowców niemieckich: REUSCHLE'GO [40], SCHEFFLERA [43], MÖBIUSA [37], RITTERA [41], zakończonych na tym etapie pracą słynnego matematyka LIPSCHITZA [35], rozwijano matematyczne interpretacje słownego sformułowania zasady Gaussa, wyjaśniano charakter wariacji w tej zasadzie, opracowywano analityczne sformułowanie zasady we współrzędnych kartezjańskich i uogólnionych, ustalano związek pomiędzy zasadą najmniejszego przymusu a metodą najmniejszych kwadratów, stosowano zasadę najmniejszego przymusu do problemów statyki.

Analityczne wyrażenie zasady wiązane jest zazwyczaj z nazwiskiem H. SCHEFFLERA. Artykuł SCHEFFLERA (1858) zawiera dość systematyczne badanie zasady Gaussa, w toku którego uzyskuje się analityczne wyrażenie dla przymusu w prostokątnym układzie współrzędnych kartezjańskich (1.1).

Jednakże praca SCHEFFLERA nie jest pierwszym obszernym badaniem zasady Gaussa. Poprzedziła ją praca doktorska ucznia GAUSSA RITTERA (1853) oraz praca REUSCHLE'GO (1845).

W związku z zasadą Gaussa trzeba też wspomnieć o *Podręczniku statyki* MÖBIUSA (1837). MÖBIUS rozważa statyczną zasadę najmniejszych kwadratów nie jako szczególny przypadek dynamicznej zasady Gaussa, lecz podaje dla niej samodzielne uzasadnienie, wychodząc z zasady przemieszczeń wirtualnych.

Słynny niemiecki matematyk R. LIPSCHITZ [35] jako pierwszy skorzystał z wyrażenia zasady Gaussa we współrzędnych uogólnionych, opierając się o wyniki swoich badań różniczkowych form kwadratowych i biliniowych. Praca LIPSCHITZA jest pogłębionym studium zasady Gaussa, zawierającym ostateczne rozwiązanie kwestii interpretacji słownego sformułowania tej zasady, sprecyzowaniem charakteru wariowania.

Wyrażenie dla przymusu we współrzędnych uogólnionych stało się początkiem całej serii prac, rozwijających sformułowania analityczne.

Dalsza ewolucja zasady jest istotnie związana z pracami najwybitniejszych przedstawicieli przyrodoznawstwa teoretycznego drugiej połowy XIX wieku: amerykańskiego matematyka i fizyka D. GIBBSA i austriackiego fizyka L. BOLTZMANNA, których badania w dziedzinie fizyki statystycznej były ściśle związane z metodami mechaniki analitycznej.

Przede wszystkim należy tu wymienić artykuł GIBBSA [29]. Jako podstawowy wzór dynamiki traktuje GIBBS relację

$$\sum_{i=1}^{3n} [(X_i - m_i \ddot{x}_i)\delta\ddot{x}_i] \leqslant 0,$$

która wyraża w postaci wariacyjnej zasadę Gaussa. Przechodząc w tej relacji najpierw do współrzędnych uogólnionych, a następnie do quasi-współrzędnych, uzyskuje GIBBS równania ruchu w postaci wyprowadzonej znacznie później przez APPELA. Następnie GIBBS formułuje tezę, że zasada Gaussa dla układów z więzami jednostronnymi jest ogólniejsza od zasady przemieszczeń wirtualnych w połączeniu z zasadą D'Alemberta.

BOLTZMANN w *Wykładach zasad mechaniki* [23] szczegółowo analizuje tę tezę GIBBSA, nazywając ją twierdzeniem Gibbsa. Mimo to, tezy GIBBSA i BOLTZMANNA nie można uważać za słuszne. Zasada wirtualnych przemieszczeń w połączeniu z zasadą D'Alemberta, w tej postaci, jaką nadał jej OSTROGRADZKI (GIBBS i BOLTZMANN prawdopodobnie nie znali prac OSTROGRADZKIEGO), umożliwia rozwiązanie zagadnień ruchu z więzami jednostronnymi, w tym samym stopniu co zasada Gaussa.

Pod wpływem prac GIBBSA i BOLTZMANNA, poczynając od 90 lat XIX wieku, zasada Gaussa zajmuje znaczne miejsce w badaniach szkoły austriackiej (prace WASSMUTHA [47, 48, 49], LEITINGERA [34], SCHENKLA [44], BRELLA [25]). W pracach reprezentantów tej szkoły dalszemu uściśleniu ulega analityczne sformułowanie zasady i jej związek z innymi zasadami mechaniki.

Następny etap ewolucji zasady, sięgający do naszych dni, związany jest z badaniami uczonych rosyjskich i radzieckich, spośród których w pierwszej kolejności wymienić należy prace J. I. GRDINY, J. A. BOLOTOWA oraz N. G. CZETAJEWA. J. I. GRDINA przeniósł zasadę Gaussa na układy anholonomiczne z więzami wolowymi (1910–1916). J. A. BOLOTOW (1916) sformułował uogólnienie zasady Gaussa, odpowiadające nowemu spojrzeniu na wyzwalanie układów materialnych. O ile GAUSS rozważał pełne wyzwolenie układu materialnego od wszystkich więzów, o tyle BOLOTOW analizował wyzwolenie częściowe, polegające na wyzwoleniu układu od wszystkich więzów jednostronnych i części więzów dwustronnych. BOLOTOW sformułował dobitnie i wyraźnie podstawowe założenia, stanowiące podstawę dowodu uogólnionej zasady Gaussa. Postulaty te odegrały poważną rolę przy kolejnych uogólnieniach zasady Gaussa, dokonanych przez uczonych radzieckich. Uogólnioną zasadę Gaussa wykorzystał BOLOTOW do rozwiązania złożonego zagadnienia słabnięcia więzów jednostronnych. BOŁOTOW udowodnił również słuszność uogólnionej zasady Gaussa w teorii uderzenia, ograniczając się we wszystkich przypadkach do układów holonomicznych lub liniowych anholonomicznych. Nieliniowe układy anholonomiczne nie zostały rozważone w pracy BOŁOTOWA.

Kolejny etap uogólniania zasady Gaussa związany jest z pracami N. G. CZETAJEWA, dotyczącymi nieliniowych układów anholonomicznych[2].

2. Ewolucja zasady D'Alemberta-Lagrange'a i Gaussa w pracach A. P. Przeborskiego i N. G. Czetajewa

Z badaniami A. P. PRZEBORSKIEGO [39] i N. G. CZETAJEWA [20] związane jest przeniesienie zasady D'Alemberta-Lagrange'a na układy z nieliniowymi więzami anholonomicznymi pierwszego rzędu, uzyskane dzięki odpowiedniemu uogólnieniu pojęcia przemieszczenia wirtualnego. Uogólnienie to zostało dokonane w początkach lat 30 XX wieku niezależnie przez obydwu uczonych. Poza tym w pracy [39] PRZEBORSKI podał definicję przemieszczenia wirtualnego dla układów z więzami anholonomicznymi drugiego rzędu, liniowymi względem przyspieszeń. Niestety, praca PRZEBORSKIEGO [39] nie została należycie oceniona ani w swoim czasie, ani we współczesnych badaniach z historii mechaniki.

Na przykład, w pracy B. N. FRADLINA [18, s. 24] błędnie przypisuje się uogólnienie zasady D'Alemberta-Lagrange'a na układy z więzami anholonomicznymi drugiego rzędu HAMMELOWI (1938), podczas gdy uogólnienie to zawarte już było w pracy [39] PRZEBORSKIEGO, ukończonej w marcu 1931 roku i opublikowanej w 1933 roku.

2.1. Badania A. P. Przeborskiego [39]. W pracy [39] rozważa PRZEBORSKI zagadnienie formułowania równań ruchu układu z więzami anholonomicznymi. Rozpatrywane są więzy anholonomiczne pierwszego rzędu, liniowe lub nieliniowe względem pierwszych pochodnych współrzędnych oraz więzy anholonomiczne drugiego rzędu, liniowe względem drugich pochodnych od współrzędnych.

We wstępie do swej pracy PRZEBORSKI stwierdza: «*Zagadnienie formułowania równań ruchu nieswobodnego układu materialnego posiada dość obszerną literaturę. Wydaje mi się jednak, że sformułowanie i rozwiązanie tego zagadnienia nie jest jeszcze wystarczająco ogólne. Widzę przyczynę tego stanu rzeczy w tym, że zagadnienie to analizowane było prawie wyłącznie z czysto matematycznego punktu widzenia i mechaniczny punkt widzenia był przy tym całkowicie lub prawie całkowicie pomijany. Od 1912 roku wskazuje na to nieustannie Delassu w całym szeregu swoich znakomitych artykułów i w swoich „Wykładach dynamiki*" (Paryż, 1913).

W 1921 r. Begen w swojej bardzo interesującej pracy doktorskiej na temat „Teoretyczna analiza kompasów żyroskopowych Antschutza i Sperry'ego", wychodząc z tego punktu widzenia, zbadał nowe więzy, nazwane przezeń serwowięzami. Jednakże Begen nie wyprowadził ogólnych wniosków.

M o i m c e l e m j e s t s f o r m u ł o w a n i e w o g ó l n e j p o s t a c i z a g a d n i e n i a b u d o w a n i a r ó w n a ń r u c h u n i e s w o b o d n e g o u k ł a d u m a-

[2] W pracy tej ograniczyliśmy się do krótkiego przeglądu podstawowych etapów ewolucji zasady Gaussa. Bardziej szczegółowy zarys historii tej zasady można znaleźć w książce: Н. Я. Цыганова, *Евгений Александрович Болотов*, М. Изд-во «Наука», 1969.

terialnego oraz podanie rozwiązania tego zagadnienia dla przypadków, najczęściej spotykanych w praktyce» [39, s. 184][3].

Przeborski wyprowadza równania ruchu układu z anholonomicznymi więzami nieidealnymi, zakładając znajomość sumy prac elementarnych, wykonanych przez reakcje więzów R_i na wszelkich dopuszczalnych przemieszczeniach układu δx_i, tzn.

$$\sum_{i=1}^{3n} R_i \delta x_i = \sum_{1=i}^{3n} P_i \delta x_i, \tag{2.1}$$

gdzie P_i są danymi funkcjami t, x_i, $\dot{x}_i$, $\ddot{x}_i$.

Jeżeli analityczne warunki więzów wyrażone są równaniami

$$f_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{2.2}$$

to przemieszczenia wirtualne δx_i określa PRZEBORSKI jako takie przemieszczenia, które spełniają równania

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \delta x_i = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{2.3}$$

przy czym $\xi_i = x_i$, gdy odpowiednie więzy są holonomiczne; $\xi_i = \dot{x}_i$, gdy więzy są anholonomiczne pierwszego rzędu, liniowe lub nieliniowe; $\ddot{x}_i = \xi_i$ dla przypadku więzów anholonomicznych drugiego rzędu, liniowych względem drugich pochodnych od współrzędnych. Do takiej definicji przemieszczeń wirtualnych dla rozważanych więzów anholonomicznych doprowadziło PRZEBORSKIEGO wyprowadzenie równań ruchu w postaci równań Lagrange'a pierwszego rodzaju. Zapisując na podstawie zasady wyzwalania od więzów równania ruchu układu n punktów materialnych w postaci

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + R_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n), \tag{2.4}$$

gdzie X_i są składowymi sił czynnych, oraz zakładając, że przemieszczenia wirtualne układu spełniają relacje liniowe

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{ji} \delta x_i = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, p), \tag{2.5}$$

gdzie A_{ji} są danymi funkcjami t, x_i, $\dot{x}_i$, $\ddot{x}_i$, autor uzyskuje wzory na reakcje więzów

$$R_i = P_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j A_{ji} \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n). \tag{2.6}$$

Równania ruchu (2.4) są przedstawione w postaci

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + P_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j A_{ji} \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n).$$

Mnożniki więzów λ_j określone są z równań liniowych

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} A_{ji} + \sum_{l=1}^{3n} \frac{1}{m_l} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_l} (X_l + P_l) + \omega_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{2.7}$$

[3] Podkreślenie moje (N. C.).

gdzie $\xi_i = x_i$ dla więzów holonomicznych, $\xi_i = \dot{x}_i$ dla więzów anholonomicznych pierwszego rzędu (liniowych i nieliniowych), $\xi_i = \ddot{x}_i$ dla więzów anholonomicznych drugiego rzędu, liniowych względem drugich pochodnych od współrzędnych; ω_k jest zadaną funkcją t, x_i, $\dot{x}_i$.

Wyznacznik Δ układu równań (2.7)

$$\Delta = |\alpha_{kj}| \quad (k, j = 1, 2, \ldots, p),$$

gdzie

$$\alpha_{kj} = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} A_{ji},$$

ma następującą postać:

$$\Delta = \left| \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right| \quad (k, j = 1, 2, \ldots, p),$$

w przypadku, gdy wszystkie więzy (2.2) układu są holonomiczne, zaś przemieszczenia wirtualne δx_i spełniają relacje

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, p), \quad \text{tzn.} \quad A_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Jeżeli więzy (2.2) są niezależne, to $\Delta \neq 0$[4], wobec czego z układu (2.7) można wyznaczyć mnożniki λ_j.

Na to, by mnożniki λ_j można było wyznaczyć w przypadku więzów anholonomicznych pierwszego rzędu, wystarczy przyjąć, że

$$A_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i},$$

co oznacza, że przemieszczenia wirtualne są zdefiniowane jako wielkości spełniające równania

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i = 0 \quad (k, j = 1, 2, \ldots, p),$$

Wówczas wyznacznik Δ przyjmie postać

$$\Delta = \left| \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i} \right| \quad (k, j = 1, 2, \ldots, p)$$

i dla więzów niezależnych będzie oczywiście różnił się od zera. Zupełnie tak samo dla więzów anholonomicznych, liniowych względem drugich pochodnych od współrzędnych wystarczy założyć

$$A_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial \ddot{x}_i}.$$

[4] Г. К. Суслов, *Теоретическая механика*, М., 1946, 195–196.

Wyznacznik Δ układu (2.7), w tym przypadku, oblicza się ze wzoru

$$\Delta = \left| \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_k}{\partial \ddot{x}_i} \frac{\partial f_j}{\partial \ddot{x}_i} \right|$$

i nie jest równy zeru, gdyż zakłada się, że więzy są niezależne. W przypadku, gdy na układ punktów materialnych nałożone są więzy wszystkich trzech rozważanych rodzajów, wyznacznik Δ w sposób oczywisty różni się od zera i z układu (2.7) można wyznaczyć mnożniki λ_j.

W omawianej pracy [39] PRZEBORSKI wyprowadza też równania ruchu układu z więzami nieidealnymi wszystkich trzech wspomnianych rodzajów, odpowiadające równaniom Lagrange'a drugiego rodzaju. Zakłada się, że dana jest praca sił reakcji na przemieszczeniach wirtualnych, spełniających równania liniowe (2.5).

Niech dane będą równania więzów holonomicznych:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_m = 0, \tag{2.8}$$

więzów anholonomicznych pierwszego rzędu:

$$f_{m+1} = 0, \quad f_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad f_{m+h} = 0 \tag{2.9}$$

oraz liniowych więzów anholonomicznych drugiego rzędu:

$$f_{m+h+1} = 0, \quad f_{m+h+2} = 0, \quad \ldots, \quad f_{m+h+g} = 0, \tag{2.10}$$

przy czym $m+h+g = p$.

Uwzględniając równania (2.8) więzów holonomicznych, mamy

$$x_i = x_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_\mu) \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n), \tag{2.11}$$

gdzie $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ — współrzędne uogólnione, $\mu = 3n-m$.

Uogólnione prędkości $\dot{q}_k$, spełniające równania (2.9), można wyrazić jako funkcje pewnych $\nu = \mu-h$ dowolnych parametrów r_α

$$\dot{q}_k = \psi_k(t, q_1, \ldots, q_\mu; r_1, \ldots, r_\nu) \quad (k = 1, 2, \ldots, \mu). \tag{2.12}$$

Z równań (2.11) i (2.12) mamy wówczas

$$\dot{x}_i = f_i(t, q_1, \ldots, q_\mu; r_1, \ldots, r_\nu), \tag{2.13}$$

$$\ddot{x}_i = \omega_i(t, q_1, \ldots, q_\mu; r_1, \ldots, r_\nu; \dot{r}_1, \ldots, \dot{r}_\nu). \tag{2.14}$$

Z równań (2.10) więzów, po podstawieniu do nich wzorów (2.11), (2.13) i (2.14) dla x_i, $\dot{x}_i$, $\ddot{x}_i$, można otrzymać wyrażenie dla $\dot{r}_\alpha$ w funkcji od $\varrho = \nu-g$ dowolnych parametrów s_β w postaci

$$\dot{r}_\alpha = \Pi_\alpha(t, q_1, \ldots, q_\mu; r_1, \ldots, r_\nu; s_1, \ldots, s_\varrho) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{2.15}$$

Tak więc określenie ruchu układu sprowadza się do wyznaczenia $\mu+\nu+\varrho$ funkcji q_k, r_α i s_β. Funkcje te spełniają $\mu+\nu$ równań różniczkowych pierwszego rzędu (2.12) i (2.15). Pozostałe ϱ brakujących równań otrzymuje się z zasady D'Alemberta-Lagrange'a dla

δx_i, spełniających równanie (2.5). Do p równań (2.5) dodaje się jeszcze $3n-p$ dowolnych relacji o postaci

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{p+l,i}\delta x_i = \delta\sigma_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, 3n-p), \tag{2.16}$$

gdzie $A_{p+l,i}$ są funkcjami t, x_i, $\dot{x}_i$, $\ddot{x}_i$, zaś $\delta\sigma_l$ są dowolnymi liczbami, takimi, że równania (2.5) i (2.16) tworzą układ niezależny, liniowy względem δx_i. Na podstawie (2.11), (2.13), (2.14) i (2.15) wszystkie A_{ji} $(i, j = 1, 2, \ldots, 3n)$ można rozpatrywać jako funkcje t, q_k, r_α, s_β.

Z równań (2.5) i (2.16) otrzymujemy

$$\delta x_i = \sum_{l=1}^{3n-p} a_{il}\delta\sigma_l \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3n). \tag{2.17}$$

Z równań (2.15) i (2.17) ze względu na dowolność $\delta\sigma_l$ mamy

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{ji}a_{il} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p;\ l = 1, 2, \ldots, 3n-p). \tag{2.18}$$

Podstawiając do równania D'Alemberta-Lagrange'a wzór (2.17) dla δx_i, uwzględniając równania (2.18) i wzór (2.6) dla reakcji oraz biorąc pod uwagę dowolność wielkości $\delta\sigma_l$, wyprowadził PRZEBORSKI równania ruchu układu w postaci

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{il}(m_i\ddot{x}_i - X_i - P_i) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, \varrho;\ \varrho = 3n-p). \tag{2.19}$$

Ze względu na relacje (2.11), (2.13), (2.14) i (2.15) równania (2.19) są skończonymi równaniami względem wielkości q_k, r_α, s_β. Określając z nich ϱ wielkości s_β i podstawiając uzyskane wyrażenia do równań (2.15) i (2.12), otrzymujemy $\mu+\nu$ równań różniczkowych pierwszego rzędu dla wyznaczenia $\mu+\nu$ funkcji r_α i q_k. W celu zupełnego wyznaczenia tych funkcji wystarczy zadać ich wartości w pewnej chwili czasu t_0.

Jeżeli więzy nałożone na układ są idealne holonomiczne i liniowe anholonomiczne pierwszego rzędu, to z równań Przeborskiego (2.19) wynikają równania Maggi'ego[5], wyprowadzone dla tego właśnie przypadku.

2.2 Zasady Gaussa i D'Alemberta-Lagrange'a w pracach N.G. Czetajewa. W dziedzinie zasad różniczkowych mechaniki analitycznej uczeni radzieccy uzyskali wyniki o wybitnym znaczeniu uogólniającym. Dotyczy to przede wszystkim badań różniczkowych zasad mechaniki w twórczości naukowej wybitnego uczonego radzieckiego N. G. CZETAJEWA. Niewątpliwie decydujący był wpływ idei CZETAJEWA na dalsze badania radzieckiej szkoły mechaniki w tej dziedzinie.

W pracy [20] CZETAJEW przeniósł zasadę D'Alemberta-Lagrange'a na nieliniowe więzy anholonomiczne pierwszego rzędu, uogólniając pojęcie przemieszczenia wirtualnego. CZETAJEW podał taką definicję przemieszczeń wirtualnych, która pokrywa się z definicją tych

[5] Maggi, O., *Di alcune nuove forme delle equazioni della dinamica, applicabili ai sistemi anolonomi*, Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, Roma, ser. 5, v. 10, 2-e sem. 1901, p. 287–292. Patrz również: Т. Леви-Чивита и У. Амальди, *Курс теоретической механики*, том II, часть I, М., 1951, 324–326.

przemieszczeń dla układów holonomicznych i liniowych anholonomicznych i dla której zasady D'Alemberta-Lagrange'a i Gaussa stają się niesprzeczne.

Niech na układ nałożone są w ogólnym przypadku nieliniowe anholonomiczne więzy rzędu pierwszego. Jeżeli układ posiada k stopni swobody, to składowe prędkości punktów układu w ruchu rzeczywistym w rozpatrywanej chwili można przedstawić jako funkcje niezależnych wielkości q_s i ich pochodnych po czasie

$$\dot{x}_i = a_i(t, q_s, \dot{q}_s) \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n;\; s = 1, 2, \ldots, k). \tag{2.20}$$

Przemieszczenia wirtualne określone są według CZETAJEWA relacjami

$$\sigma x_i = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial a_i}{\partial \dot{q}_s} \sigma q_s, \tag{2.21}$$

gdzie σq_s są dowolnymi wielkościami nieskończenie małymi[6)].

Idealne więzy obustronne określone są aksjomatycznie jako takie, dla których przy zadanych siłach zewnętrznych słuszna jest zasada D'Alemberta-Lagrange'a

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \sigma x_i = 0, \tag{2.22}$$

względem przemieszczeń wirtualnych (2.21). Z określenia (2.22) wyprowadzona jest zasada Gaussa w uogólnionej postaci, odpowiadająca nowemu spojrzeniu na wyzwolenie układu materialnego. O ile GAUSS rozważał pełne wyzwolenie układu materialnego (wyzwolenie od wszystkich więzów), zaś BOŁOTOW — wyzwolenie częściowe (wyzwolenie układu od części więzów), o tyle CZETAJEW nazywa wyzwoleniem układu materialnego wszelkie przekształcenie, rządzone przez określony algorytm matematyczny (wyzwolenie parametryczne); mianowicie, jeżeli w ruchu rzeczywistym układu składowe prędkości jego punktów zadane są wzorami (2.20), to w ruchu wyzwolonym zadane są wzorami

$$\dot{x}_i = a_i(t, q_s, \dot{q}_s) + \alpha_i(t, q_s, \eta_r, \dot{\eta}_r), \tag{2.23}$$

gdzie α_i są dowolnymi funkcjami zaznaczonych zmiennych, zaś liczba nowych parametrów η_r równa jest liczbie nowych swobód, uzyskanych przez układ. CZETAJEW przeniósł uogólnioną zasadę Gaussa w postaci BOŁOTOWA na nieliniowe układy anholonomiczne dowodząc, że dla nieliniowych układów anholonomicznych i przy zaproponowanych przez niego aksjomatycznych definicjach przemieszczeń wirtualnych i wyzwolenia, odchylenie rzeczywistego ruchu układu od ruchu wyzwolonego jest mniejsze od odchylenia dowolnego z ruchów wirtualnych od tegoż ruchu wyzwolonego.

Z równań więzów (2.20) i określenia (2.21) wynika, że istnieją przemieszczenia wirtualne, proporcjonalne do różnicy $d\dot{x}_i - \delta\dot{x}_i$ pomiędzy zmianą prędkości punktów układu w czasie dt dla ruchu rzeczywistego i takąż zmianą prędkości dla ruchu wariowanego według GAUSSA. W tym przypadku, równanie D'Alemberta-Lagrange'a (2.22) można zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i d\dot{x}_i - X_i dt)(d\dot{x}_i - \delta\dot{x}_i) = 0. \tag{2.24}$$

[6)] Zachowano oznaczenia N. G. Czetajewa (N. C.).

Z definicji wyzwolenia (2.23) układu w sposób oczywisty wynika, że przemieszczenia wirtualne danego układu znajdują się w zbiorze przemieszczeń wirtualnych układu wyzwolonego. Jeżeli założymy, że w chwili t punkty układu w ruchu wyzwolonym mają te same prędkości, co w ruchu rzeczywistym, zaś w odcinku czasu dt oddziaływują na nie te same siły zewnętrzne X_i, to dla układu wyzwolonego równania D'Alemberta-Lagrange'a mają postać

$$\sum_{i=1}^{3n}(m_i\partial\dot{x}_i-X_i dt)(d\dot{x}_i-\delta\dot{x}_i)=0, \tag{2.25}$$

gdzie $\partial\dot{x}_i$ oznacza zmianę prędkości punktów układu w ruchu wyzwolonym w ciągu czasu dt.

Odejmując równanie (2.25) od równania (2.24) CZETAJEW otrzymuje związek w postaci:

$$A_{d\delta}+A_{d\partial}-A_{\partial\delta}=0, \tag{2.26}$$

gdzie wielkość

$$A_{d\delta}=\sum_{i=1}^{3n}m_i(d\dot{x}_i-\delta\dot{x}_i)^2,$$

oznacza odchylenie ruchu rzeczywistego (d) od ruchu wirtualnego (δ) w czasie dt. Analogicznie określone są wielkości $A_{d\partial}$ i $A_{\partial\delta}$. Ze związku (2.26) wynikają dwie nierówności

$$A_{d\delta}<A_{\partial\delta}, \tag{2.27}$$

$$A_{d\partial}<A_{\delta\partial}. \tag{2.28}$$

Nierówność (2.28) wyraża uogólnioną zasadę Gaussa: odchylenie rzeczywistego ruchu układu (d) od rzeczywistego ruchu (∂) układu wyzwolonego w sensie CZETAJEWA jest mniejsze od odchylenia tego ostatniego od dowolnego ruchu (δ) wirtualnego (wariowanego według GAUSSA).

W szczególnym przypadku, jeżeli układ zostaje zupełnie wyzwolony z więzów, nierówność (2.28) wyraża zasadę Gaussa w postaci klasycznej.

Znaczenie ideowe omówionej pracy CZETAJEWA jest olbrzymie. Oznacza ona nowy etap w rozwoju mechaniki analitycznej. Poprzez wprowadzenie dla nieliniowych układów anholonomicznych pierwszego rzędu takiego pojęcia przemieszczenia wirtualnego, które nie wyprowadza poza ramy podstawowej zasady dynamicznej — zasady Gaussa, CZETAJEW znakomicie rozszerzył dziedzinę zastosowań mechaniki analitycznej, włączając do niej nieliniowe układy anholonomiczne pierwszego rzędu. Określenie przemieszczeń wirtualnych, podane przez CZETAJEWA, jest najbardziej ogólnym spośród przyjętych w obecnej chwili. Z określenia tego korzystano w wielu następnych badaniach. Dzięki podanej przez CZETAJEWA definicji parametrycznego wyzwolenia układu, stanowiącej uogólnienie pojęć wyzwolenia, proponowanych przez GAUSSA [26], MACHA [36] i BOŁOTOWA [2], ulega rozszerzeniu klasa ruchów porównywanych w zasadzie najmniejszego przymusu.

Z kolei, powyższa definicja wyzwolenia została dalej rozwinięta w pracach N. J. KOCZINA i W. I. KIRCZETOWA. CZETAJEW jako pierwszy zwrócił uwagę na nierówność (2.27), która wraz z nierównością (2.28) wynika z równania (2.26) i wyraża zasadę w sposób konieczny wypływającą z zasady D'Alemberta-Lagrange'a: odchylenie rzeczywistego ruchu (d) układu od ruchu wirtualnego (δ) jest mniejsze od odchylenia tego ostatniego od ruchu wyzwolonego (∂).

W pracy, opublikowanej w 1941 r. [20], CZETAJEW przypisuje zasadzie Gaussa i jej klasycznej postaci interpretację energetyczną. Rozpatrywany jest układ punktów materialnych z idealnymi holonomicznymi i liniowymi anholonomicznymi więzami. Dla rzeczywistego ruchu układu i ruchu wariowanego według GAUSSA w czasie dt konstruowany jest cykl elementarny, składający się z ruchu na wprost w polu sił oddziaływujących i ruchu powrotnego w polu sił, wystarczających dla spowodowania ruchu rzeczywistego, gdyby układ był swobodny. Zakładając, że działające siły są zależne od czasu, współrzędnych i prędkości (co oznacza, że ich wariacja według GAUSSA jest równa zero) CZETAJEW otrzymuje dla gaussowskiej wariacji pracy na cyklu elementarnym wielkość

$$\Delta A = -\frac{dt^2}{2}\Delta\sum_{i=1}^{3n}\frac{1}{2m_i}(X_i - m_i\ddot{x}_i)^2,$$

która zgodnie z zasadą Gaussa zeruje się. Wobec tego, że

$$\Delta^2 A < 0,$$

otrzymujemy, że praca A na cyklu elementarnym ruchu rzeczywistego jest maksymalna.

Z omówioną pracą CZETAJEWA bezpośrednio łączy się jego analiza ruchów wymuszonych [21].

Rozważany jest ruch układu mechanicznego, zależnego od pewnych parametrów θ_i, zmieniających się w sposób wymuszony, przy czym zmiany parametrów związane są ze współrzędnymi układu i nie dopuszczają hipotezy zmian bardzo powolnych lub adiabatycznych. Więzy nałożone na układ są z założenia idealne i ograniczają przemieszczenia wirtualne δx_i, δy_i, δz_i, $\delta\theta_i$ przy pomocy relacji liniowych.

Dla rozważanych układów formułuje się podstawową zasadę dynamiki, uogólniającą zasadę D'Alemberta-Lagrange'a w postaci

$$(2.29)\qquad \sum_{i=1}^{n}[(\Phi_i - \mu_i\dot{\theta}_i)\delta\theta_i + (X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i] = 0,$$

gdzie Φ_i oznacza wymuszenie parametru θ_i, odpowiadającego punktowi m_i. CZETAJEW podaje dalej wariant zasady (2.29), budując elementarny cykl dla rzeczywistego ruchu układu i ruchu wariowanego według GAUSSA (wyobrażalnego); cykl składa się z ruchu na wprost w polu sił oddziaływujących oraz wymuszeń i ruchu powrotnego w polu sił, wystarczających dla spowodowania ruchu rzeczywistego, gdyby układ był swobodny.

Wzór Czetajewa dla gaussowskiej wariacji pracy na cyklu elementarnym ma postać:

$$\Delta A = \frac{dt^2}{2}\sum_{i=1}^{n}[(\Phi_i - \mu_i\dot{\theta}_i)\Delta\ddot{\theta}_i + (X_i - m_i\ddot{x}_i)\Delta\ddot{x}_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\Delta\ddot{y}_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\Delta\ddot{z}_i].$$

Przy założeniu, że zadane siły X_i, Y_i, Z_i nie zależą od przyspieszeń, zaś wymuszenia Φ_i nie zależą od prędkości i przyspieszeń, CZETAJEW wyraża ΔA w postaci

$$\Delta A = -\frac{dt^2}{2}\Delta\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2\mu_i}\frac{d}{dt}(\Phi_i-\mu_i\dot{\theta}_i)^2+\frac{1}{2m_i}\{(X_i-m_i\ddot{x}_i)^2+(Y_i-m_i\ddot{y}_i)^2+(Z_i-m_i\ddot{z}_i)^2\}\right].$$

Wobec tego, że z założenia przemieszczenia wirtualne związane są relacjami liniowymi, mamy

$$\frac{dt^2}{2}\Delta\ddot{\theta}_i = \delta\theta_i, \quad \frac{dt^2}{2}\Delta\ddot{x}_i = \delta x_i, \quad \frac{dt^2}{2}\Delta\ddot{y}_i = \delta y_i, \quad \frac{dt^2}{2}\Delta\ddot{z}_i = \delta z_i.$$

Oznacza to, że z zasady (2.29) wynika $\Delta A = 0$, zaś wobec $\Delta^2 A < 0$, praca na cyklu elementarnym dla ruchu rzeczywistego jest maksymalna. Zauważmy, że suma

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2\mu_i}\frac{d}{dt}(\Phi_i-\mu_i\dot{\theta}_i)^2+\frac{1}{2m_i}\{(X_i-m_i\ddot{x}_i)^2+(Y_i-m_i\ddot{y}_i)^2+(Z_i-m_i\ddot{z}_i)^2\}\right]$$

może być rozpatrywana jako wyrażenie dla przymusu Z, zaś podstawowa zasada ruchu (2.29) może również być przedstawiona w postaci

$$\sum_{i=1}^{n}[(\Phi_i-\mu_i\dot{\theta}_i)\Delta\ddot{\theta}_i+(X_i-m_i\ddot{x}_i)\Delta\ddot{x}_i+(Y_i-m_i\ddot{y}_i)\Delta\ddot{y}_i+(Z_i-m_i\ddot{z}_i)\Delta\ddot{z}_i] = 0.$$

W pracy [22] CZETAJEW sformułował ogólną zasadę dynamiki dla układów z tarciem, nie zawierającą w jawnej postaci reakcji więzów na przemieszczenia wirtualne, ortogonalne względem rzeczywistych prędkości punktów układu, tzn. spełniające warunki

$$\dot{x}_i\delta x_i+\dot{y}_i\delta y_i+\dot{z}_i\delta z_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Zbiór takich przemieszczeń CZETAJEW nazwał (C) — przemieszczeniami. Dla najbardziej rozpowszechnionych więzów z tarciem, praca sił reakcji, oddziaływujących na materialne punkty układu w danej chwili, wykonana na (C) — przemieszczeniach, jest równa zeru

$$\sum_{i=1}^{n}(R_{ix}\delta x_i+R_{iy}\delta y_i+R_{iz}\delta z_i) = 0.$$

Przez wyrugowanie z tego warunku reakcji więzów R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} przy pomocy równań ruchu, CZETAJEW wyprowadza związek

$$\sum_{i=1}^{n}[(m_i\ddot{x}_i-X_i)\delta x_i+(m_i\ddot{y}_i-Y_i)\delta y_i+(m_i\ddot{z}_i-Z_i)\delta z_i] = 0, \tag{2.30}$$

słuszny dla dowolnych (C) — przemieszczeń; związek ten można traktować jako uogólnienie zasady D'Alemberta-Lagrange'a na układy z tarciem. Zasada (2.30) została dalej rozwinięta w pracach [13 i 14] W. W. RUMIANCEWA.

3. Dalsza ewolucja różniczkowych zasad wariacyjnych w pracach uczonych radzieckich

Istotne miejsce w badaniach uczonych radzieckich zajmuje zasada najmniejszego przymusu Gaussa. Bodźcem do dalszego rozwijania tej zasady posłużyły prace N. G. CZETAJEWA, uogólniające zasadę najmniejszego przymusu. Rozpatrzmy przede wszystkim ewolucję pojęcia «wyzwolenia» układu materialnego.

3.1. Ewolucja pojęcia «wyzwolenia» układu w pracach N. J. Koczina i W. J. Kirgietowa. Przy parametrycznym wyzwoleniu według CZETAJEWA może zmieniać się sens geometryczny współrzędnych uogólnionych.

N. J. KOCZIN [8] przeanalizował wyzwolenie układu, przy którym sens geometryczny współrzędnych nie ulega zmianie, mianowicie wyzwolenie od wszystkich lub od części więzów anholonomicznych.

Niech konfiguracja układu materialnego n punktów będzie określona w każdej chwili czasu przez k współrzędnych uogólnionych q_s tak, że współrzędne kartezjańskie są związane z nimi relacjami

$$x_i = \alpha_i(t, q_s) \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n;\; s = 1, 2, \ldots, k). \tag{3.1}$$

Niech poza tym na układ nałożone są $k-l$ więzy anholonomiczne

$$f_r(t, q_s, \dot{q}_s) = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, k-l;\; s = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.2}$$

równania których można zapisać w postaci — rozwiązanej względem $k-l$ prędkości uogólnionych

$$\dot{q}_\nu = F_\nu(t, q_s, \dot{q}_\mu) \quad (\nu = l+1, \ldots, k;\; \mu = 1, 2, \ldots, l). \tag{3.3}$$

Po zróżniczkowaniu relacji (3.1) i wykorzystaniu równań więzów anholonomicznych (3.3), otrzymujemy zależność

$$\dot{x}_i = a_i(t, q_s, \dot{q}_\mu) = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{l} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\nu} \dot{q}_\mu + \sum_{\nu=l+1}^{k} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\nu} F_\nu(t, q_s, \dot{q}_\mu). \tag{3.4}$$

Przemieszczenia wirtualne określone są według CZETAJEWA przez równości

$$\delta x_i = \sum_{\mu=1}^{l} \frac{\partial a_i}{\partial \dot{q}_\mu} \delta q_\mu, \tag{3.5}$$

lub po uwzględnieniu (3.4) przez równości

$$\delta x_i = \sum_{\mu=1}^{l} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\mu} + \sum_{\nu=l+1}^{k} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\nu} \frac{\partial F_\nu}{\partial \dot{q}_\mu} \right\} \delta q_\mu. \tag{3.6}$$

Koczin dowodzi, że przemieszczenia wirtualne $\overline{\delta x_i}$ układu wyzwolonego od wszystkich więzów anholonomicznych (3.2) zawierają przemieszczenia wirtualne układu rzeczywistego δx_i,

$$\overline{\delta x_i} = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\mu} \overline{\delta q_\mu}. \tag{3.7}$$

Rzeczywiście, równanie $\delta x_i = \overline{\delta x_i}$ można spełnić, zakładając

$$\overline{\delta q_\mu} = \delta q_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, l), \quad \overline{\delta q_\nu} = \sum_{\mu=1}^{l} \frac{\partial F_\nu}{\partial \dot{q}_\mu} \delta q_\mu \quad (\nu = l+1, \ldots, k).$$

Analogicznie dowodzi się, że jeżeli układ jest wyzwolony od części więzów anholonomicznych, to przemieszczenia wirtualne danego układu znajdują się wśród przemieszczeń wirtualnych układu wyzwolonego. Wyzwolenie układu z więzami holonomicznymi i liniowymi więzami anholonomicznymi, rozważane w pracy BOŁOTOWA [2], staje się szczególnym przypadkiem rozpatrzonego sposobu wyzwalania, jeżeli jako wyjściowe współrzędne uogólnione q_s rozważymy współrzędne kartezjańskie punktów x_i.

Problem wyzwalania układów materialnych został zbadany od strony jakościowej w latach 60-tych przez W. I. KIRGETOWA [6]. Podana została wystarczająco ogólna definicja jakościowa wyzwolenia układu, po czym z definicji tej wyprowadzono algorytm matematyczny wyzwolenia.

Autor rozpatruje układy typu Czetajewa–Przeborskiego, tzn. układy z nieliniowymi więzami anholonomicznymi pierwszego rzędu. Jeżeli równania więzów wzięto w postaci

$$f_r(t, x_i, \dot{x}_i) = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, l),$$

to przemieszczenia wirtualne według CZETAJEWA–PRZEBORSKIEGO określone są związkami

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_r}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, l).$$

Układ uważany jest za bardziej swobodny w danym stanie, jeżeli zbiór przyspieszeń, którym może on ulegać w tym stanie, rozszerza się w porównaniu z ruchem rzeczywistym.

Wyzwoleniem układu materialnego nazywane jest wszelkie jego przekształcenie, które nie zawężając zbioru dopuszczalnych stanów układu, czyni układ w każdym ze stanów bardziej swobodnym.

Wobec tego wszelkie stany i przyspieszenia, dopuszczalne w układzie podstawowym, uważane są za dopuszczalne w stanie wyzwolonym.

Wychodząc z tego jakościowego określenia wyzwolenia, formułuje KIRGETOW uogólnioną zasadę Gaussa dla rozważanych układów.

Niech A oznacza układ Czetajewa–Przeborskiego, zaś B — układ otrzymany z A poprzez wyzwolenie, przy czym zbiór jego przemieszczeń wirtualnych $\overline{\delta x_i}$ zawiera przemieszczenia wirtualne δx_i układu A; u_i oraz v_i są przyspieszeniami punktów układu A, odpowiednio w ruchu rzeczywistym i dopuszczalnym, w_i — przyspieszenia punktów układu B w ruchu rzeczywistym, X_i — siły oddziaływujące na układ, jednakowe dla obydwu układów A i B.

Zasada D'Alemberta-Lagrange'a dla układów A oraz B ma odpowiednio postać

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i u_i - X_i) \delta x_i = 0, \tag{3.8}$$

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i w_i - X_i) \overline{\delta x_i} = 0. \tag{3.9}$$

Wobec tego, że przemieszczenia wirtualne układu B zawierają przemieszczenia wirtualne układu A, równanie (3.9) można zapisać w innej postaci, mianowicie

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i w_i - X_i)\delta x_i = 0. \tag{3.10}$$

Odejmując od równania (3.8) równanie (3.10) otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i(u_i - w_i)\delta x_i = 0. \tag{3.11}$$

Dla układów Czetajewa-Przeborskiego istnieją przemieszczenia wirtualne, proporcjonalne do różnicy przyspieszeń pomiędzy ruchem rzeczywistym i dopuszczalnym, można więc przyjąć

$$\delta x_i = u_i - v_i.$$

Podstawiając to wyrażenie dla przemieszczeń wirtualnych do równania (3.11) otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i(u_i - w_i)(u_i - v_i) = 0.$$

Ostatnia relacja prowadzi do znanej tożsamości

$$A_{uv} - A_{vw} + A_{wu} = 0, \tag{3.12}$$

gdzie

$$A_{uv} = \sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i}{2}(u_i - v_i)^2,$$

zaś wyrażenia dla A_{vw} i A_{wu} są analogiczne.

Ze związku (3.12) wynikają dwie nierówności

$$A_{uv} \leqslant A_{vw}, \qquad A_{wu} \leqslant A_{vw}.$$

Druga z tych nierówności jest wyrażeniem dla uogólnionej zasady Gaussa. Wychodząc z jakościowej definicji wyzwolenia, KIRGETOW wyprowadza dla niego algorytm matematyczny. Porównując algorytm uzyskany przez KIRGETOWA z algorytmem CZETAJEWA widzimy, że różnica pomiędzy nimi polega jedynie na różnym stopniu ogólności funkcji służących do ich wyrażenia.

3.2. Zasady różniczkowe dla układów materialnych z liniowymi więzami anholonomicznymi drugiego rzędu. W pracy [7] KIRGETOWA dokonane zostało dalsze uogólnienie zasady D'Alembertta-Lagrange'a na układy z liniowymi więzami anholonomicznymi drugiego rzędu

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i}\ddot{x}_i = a_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m), \tag{3.13}$$

gdzie współczynniki $a_{\lambda i}^1$, a_λ zależą od t, x_i, $\dot{x}_i$. Przemieszczenia wirtualne takich układów spełniają według PRZEBORSKIEGO zależności liniowe

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i}\delta x_i = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m), \tag{3.14}$$

gdzie współczynniki $a_{\lambda i}$ są identyczne ze współczynnikami równania (3.13).

KIRGETOW udowodnił, że w ramach takiej definicji przemieszczeń wirtualnych, zasady Gaussa i D'Alemberta-Lagrange'a stają się niesprzeczne, tzn. obydwie zasady prowadzą do tych samych równań ruchu. Rzeczywiście, z warunku minimum przymusu

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i}{2}\left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2,$$

dla ruchu rzeczywistego z uwzględnieniem równań więzów (3.13), otrzymuje się równania ruchu w postaci

$$m_i\ddot{x}_i - X_i + \sum_{\lambda=1}^{m} \sigma_\lambda a_{\lambda i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n), \tag{3.15}$$

gdzie σ_λ są nieoznaczonymi mnożnikami Lagrange'a. Te same równania ruchu uzyskiwane są z zasady D'Alemberta-Lagrange'a. Dołączając do równań D'Alemberta-Lagrange'a równania (3.14) pomnożone przez nieoznaczone mnożniki, otrzymujemy równanie

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i\ddot{x}_i - X_i)\delta x_i + \sum_{\lambda=1}^{m} \sigma_\lambda \sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i}\delta x_i = 0,$$

z którego przy odpowiednim doborze mnożników σ_λ można uzyskać równania (3.15).

Dalej KIRGETOW dowodzi, że definicja (3.14) przemieszczeń wirtualnych ma własność jednoznaczności. Polega ona na tym, że wszystkie możliwe liniowe definicje przemieszczeń wirtualnych układu materialnego, w których przemieszczenia wirtualne nie zależą od sił oddziaływujących na układ (warunek ten spełniają wszystkie znane w mechanice analitycznej definicje przemieszczeń wirtualnych) i dla których zasady D'Alemberta-Lagrange'a i Gaussa okazują się niesprzeczne, są równoważne definicji (3.14), tzn. opisują ten sam zbiór przemieszczeń wirtualnych, co definicja (3.14).

3.3. Zastosowania zasady najmniejszego przymusu do układów z więzami nieidealnymi. Analizą zastosowania zasady Gaussa do układów z więzami nieidealnymi jako pierwszy zajął się uczeń CZETAJEWA — M. S. AMINOW [1]. Następnie ciekawe wyniki, dotyczące układów z tarciem, uzyskał w 1960–1961 roku inny uczeń CZETAJEWA, profesor Uniwersytetu Moskiewskiego W. W. RUMIANCEW [13], [14]. RUMIANCEW sformułował dwie postacie zasady Gaussa dla układów z tarciem. W pierwszym przypadku do wyrażenia dla przymusu wchodzą siły tarcia, w drugim siły te nie wchodzą. RUMIANCEW uogólnił zasadę Gaussa na ogólne układy z tarciem, wychodząc z definicji układów z tarciem, podanej przez PAINLEVÉ'EGO.

Omówimy szczegółowiej badania RUMIANCEWA. W jego pracach dalszej ewolucji uległa zasada, sformułowana przez CZETAJEWA dla (C) — przemieszczeń. Na podstawie tej zasady

RUMIANCEW wyprowadził zasadę Gaussa w postaci nie zawierającej w sposób jawny sił reakcji.

Ograniczenie zbioru przemieszczeń wirtualnych w zasadzie Czetajewa do (C) — przemieszczeń powoduje odpowiednie ograniczenie zbioru ruchów dopuszczalnych, z którymi porównywany jest w zasadzie Gaussa ruch rzeczywisty.

Rozpatrywane są jedynie takie ruchy dopuszczalne, w których przyspieszenia punktów układu $\overline{\gamma_i}$ spełniają warunek następujący: różnica między tymi przyspieszeniami, a przyspieszeniami punktów w ruchu rzeczywistym $\overline{w_i}$ reprezentuje (C) — przemieszczenie. Tego rodzaju ruchy dopuszczalne nazywa RUMIANCEW (C) — ruchami, zaś przyspieszenia w nich oznacza jako $\overline{\gamma_i^c}$. W tym przypadku zasada Czetajewa dla (C) — ruchów rozpatrywanych układów ma postać

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\left(\ddot{x}_i-\frac{X_i}{m_i}\right)(\ddot{x}_i-\gamma_{ix}^c)+\left(\ddot{y}_i-\frac{Y_i}{m_i}\right)(\ddot{y}_i-\gamma_{iy}^c)+\left(\ddot{z}_i-\frac{Z_i}{m_i}\right)(\ddot{z}_i-\gamma_{iz}^c)\right]=0.$$

Ostatnie równanie można przedstawić w postaci

$$A_{w\gamma^c}+A_{wv}-A_{v\gamma^c}=0, \tag{3.16}$$

gdzie wielkość

$$A_{wv}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\left(\ddot{x}_i-\frac{X_i}{m_i}\right)^2+\left(\ddot{y}_i-\frac{Y_i}{m_i}\right)^2+\left(\ddot{z}_i-\frac{Z_i}{m_i}\right)^2\right]$$

oznacza odchylenie rzeczywistego ruchu układu z tarciem od ruchu swobodnego. Analogicznie określone są wielkości $A_{w\gamma^c}$ i $A_{v\gamma^c}$. Z równości (3.16) wynikają dwie nierówności:

$$A_{w\gamma^c} < A_{v\gamma^c}, \qquad A_{wv} < A_{v\gamma^c}.$$

Druga z nich wyraża zasadę Gaussa w zwyczajnej postaci: odchylenie rzeczywistego ruchu układu z tarciem od ruchu swobodnego jest mniejsze od odchylenia tego ostatniego od dopuszczalnego (C) — ruchu. W następnej pracy [14] RUMIANCEW uogólnia wyniki, uzyskane poprzednio dla układów z tarciem, na pewne układy z więzami nieidealnymi, szczególnymi przypadkami których są układy z tarciem, układy z serwosprzężeniami itd.

Rozważany jest układ punktów materialnych z holonomicznymi i anholonomicznymi nieliniowymi więzami pierwszego rzędu. Zakłada się, że więzy nałożone na układ są tego rodzaju, że istnieją przemieszczenia wirtualne, na których siły reakcji nie wykonują pracy. Do tego rodzaju więzów należą na przykład więzy z tarciem i serwosprzężeniami.

Rozumując podobnie, jak dla układów z tarciem, wyprowadza RUMIANCEW z zasady D'Alemberta-Lagrange'a zasadę Gaussa, wyrażenie dla której nie zawiera jawnie sił reakcji, zaś przemieszczenia wirtualne są ograniczone do dopuszczalnych (C) — ruchów.

3.4. Zastosowania zasady Gaussa w mechanice ośrodków ciągłych. W latach 60-tych zasada Gaussa przeniesiona została przez uczonych radzieckich na szeroką klasę ciał stałych. W. P. TAMUŻ [17] przeniósł zasadę Gaussa na ciała sztywno-idealnie plastyczne, zaś M. I. REITMAN [11], [12] — na dowolne odkształcalne ciała stałe. Przymus dla dowolnego ciała odkształcalnego wyraża się przez funkcjonał

$$I=\int_{(v)}\frac{\varrho\ddot{u}_j}{2}dv-\int_{(v)}P_j\ddot{u}_j dv-\int_{(S_T)}T_j\ddot{u}_j dS_T+\int_{(v)}\sigma_{jk}\ddot{\varepsilon}_{jk}dv, \tag{3.17}$$

gdzie ϱ — gęstość, $\ddot{u}_j$ — składowe przyspieszeń ruchu, $\ddot{\varepsilon}_{jk}$ — przyspieszenie odkształceń, P_j i T_j — odpowiednio siły objętościowe i powierzchniowe, σ_{jk} — naprężenia. Tę postać funkcjonału otrzymuje się wychodząc od wyrażenia dla przymusu w układzie punktów materialnych w postaci

$$Z = \sum_{i=1}^{3n} \left(\frac{m_i \ddot{x}_i^2}{2} - X_i \ddot{x}_i \right), \tag{3.18}$$

gdzie X_i są składowymi sił zewnętrznych, oddziaływujących na punkty układy, $\ddot{x}_i$ — składowymi przyspieszeń tych punktów. Dla dowolnego ciała stałego jako masę punktu traktuje się masę elementarnej cząstki, wobec czego wielkość $\sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i \ddot{x}_i^2}{2}$ ze wzoru (3.18) zastępowana jest przez pierwszą z całek ze wzoru (3.17), zaś wielkość $\sum_{i=1}^{3n} X_i \ddot{x}_i$ prowadzi do pozostałych trzech całek, odpowiadających siłom objętościowym, powierzchniowym i wewnętrznemu stanowi naprężenia.

Różnica wartości funkcjonału przymusu na ruchu rzeczywistym i kinematycznie dopuszczalnym może być przedstawiona w postaci

$$I - I^* = -\int_{(v)} \frac{\varrho(\ddot{u}_j - \ddot{u}_j^*)^2}{2} dv + \int_{(v)} \ddot{\varepsilon}_{jk}(\sigma_{jk} - \sigma_{jk}^*) dv.$$

Otrzymuje stąd REITMAN warunek minimum funkcjonału wymuszenia w postaci równości naprężeń w rozpatrywanej chwili w ruchu rzeczywistym i wirtualnym. Warunek ten będzie spełniony dla ciała sprężystego i dla ciała sprężysto-plastycznego, opisywanego przez teorię deformacyjną (to znaczy przy wzajemnie-jednoznacznej zależności naprężeń i odkształceń), jeżeli w danej chwili czasu zadane są odkształcenia. Dla ciała sztywno-idealnie plastycznego, opisywanego przez teorię płynięcia, wystarczy zadać prędkości odkształceń, zaś dla ośrodka lepkiego, w którym naprężenia są jednoznacznie wyznaczane przez zadanie odkształceń i prędkości odkształceń, należy zadać te ostatnie.

Zasadę najmniejszego przymusu w postaci minimum funkcjonału stosuje Reitman do mającego zastosowania praktyczne przypadku obciążenia proporcjonalnego ciała sztywno-idealnie plastycznego. Wreszcie stosuje REITMAN zasadę Gaussa do powłok sztywno-idealnie plastycznych. Minimalizując funkcjonał przymusu uzyskuje REITMAN wzory obliczeniowe dla przypadku kopuły kulistej z materiału sztywno-idealnie plastycznego.

W pracy N. A. KILCZEWSKIEGO i N. N. SZEPIELEWSKIEJ [5] sformułowano dla cieczy filtracyjnej postać zasady najmniejszego przymusu, stanowiącą wniosek konieczny z równań ruchu tej cieczy. Przymus dla cieczy filtracyjnej przy założeniu, że ciecz jest nieściśliwa, zaś ośrodek filtrujący nie odkształca się, ma postać

$$Z = \frac{1}{2} \int_{(v)} [v_x^2 + v_y^2 + (v_z + k)^2] dv,$$

gdzie v_x, v_y, v_z są składowymi wektora prędkości ruchu cząstek cieczy w układzie współrzędnych, którego początek obrano na warstwie nieprzesiąkalnej, zaś k jest współczynnikiem filtracji. Dla pola prędkości rzeczywistego ruchu cieczy filtracyjnej przymus jest mniejszy, niż dla ruchu odpowiadającego innym rozkładom prędkości.

3.5. Zastosowanie zasady D'Alemberta-Lagrange'a do układów o zmniennej masie. Zasada D'Alemberta-Lagrange'a została przeniesiona na układy o zmiennej masie w pracach mechaników radzieckich W. F. KOTOWA [4], W. S. NOWOSIEŁOWA [9], [10] oraz W. A. SAPY [15], [16].

Sapa sformułował zasadę D'Alemberta-Lagrange'a dla układów o zmiennej masie w przypadku, gdy siły reaktywne określone są odpowiednio przez absolutne lub względne prędkości cząstek, wypromieniowanych lub przyłączonych do punktów układu.

W pierwszym przypadku zasada D'Alemberta-Lagrange'a dla więzów idealnych obustronnych holonomicznych i anholonomicznych ma postać

$$\sum_{i=1}^{n}(\overline{F}_i^{(e)}+\overline{\Phi}_{a_{i1}}+\overline{\Phi}_{a_{i2}}-M_i\dot{\overline{v}}_i-\dot{M}_i\overline{v}_i)\overline{\delta r_i}=0,$$

gdzie $\overline{F}_i^{(e)}$ jest wypadkową sił zewnętrznych, działających na i-ty punkt układu, $\overline{\Phi}_{a_{i1}}$ — siła reaktywna, spowodowana przez prędkość absolutną cząstek, wypromieniowywanych przez i-ty punkt układu, $\overline{\Phi}_{a_{i2}}$ — siła reaktywna, spowodowana przez prędkość absolutną cząstek, przyłączonych przez i-ty punkt układu.

W drugim przypadku mamy

$$\sum_{i=1}^{n}(\overline{F}_i^{(e)}+\overline{\Phi}_{r_{i1}}+\overline{\Phi}_{r_{i2}}-M_i\dot{\overline{v}}_i)\overline{\delta r_i}=0,$$

gdzie $\Phi_{r_{i1}}$ i $\Phi_{r_{i2}}$ są siłami reaktywnymi, spowodowanymi przez względne prędkości cząstek wypromieniowywanych lub przyłączonych w i-tym punkcie układu.

NOWOSIEŁOW w pracy [10] zaproponował równanie D'Alemberta-Lagrange'a we współrzędnych uogólnionych dla układu o zmiennej masie z anholonomicznymi nieliniowymi więzami pierwszego rzędu, przy uwzględnieniu wewnętrznego ruchu cząstek.

Jeżeli położenie układu określone jest przez s uogólnionych współrzędnych q_s, to równanie D'Alemberta-Lagrange'a przyjmuje postać

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{D}{Dt}\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{q}_i}-\frac{\text{Д}T}{\text{Д}q_i}-Q_i-\psi_i\right)\delta q_i=0, \tag{3.19}$$

gdzie D/Dt jest pochodną po czasie przy zamocowanych masach, $\text{Д}T/\text{Д}\dot{q}_i$, $\text{Д}T/\text{Д}q_i$ są pochodnymi od T przy stałych masach, Q_i są siłami uogólnionymi, ψ_i — uogólnionymi siłami reaktywnymi, w skład których wchodzą siły impulsowe, siły Coriolisa oraz siły spowodowane przez przyspieszenia względne.

Z równania D'Alemberta-Lagrange'a (3.19), po uwzględnieniu więzów anholonomicznych

$$F_k(t, q_i, \dot{q}_i)=0,$$

dla których zachodzi relacja

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i=0,$$

NOWOSIEŁOW wyprowadza równania ruchu rozważanego układu, zawierające mnożniki nieoznaczone.

Literatura cytowana w tekście

1. М. Ш. Аминов, *К принципу Гаусса*, Ученые записки казанского Авиационного института, № 4, 1935.
2. Е. А. Болотов, *О принципе Гаусса*, Известия физико-математического общества при Казанском университете, т. 21, № 3, 1916, с. 99–152.
3. Я. И. Грдина, *Заметки по динамике живых организмов*, Екатеринослав, 1916.
4. В. Ф. Котов, *Основы аналитической механики для систем переменной массы*, Ученые записки Горьковского университета, т. XXVIII, 1955.
5. Н. А. Кильчевский, Н. Н. Шепелевская, *Принцип наименьшего принуждения и некоторые его приложения в теории фильтрации*, Научные доклады высшей школы, Раздел «Строительство», № 4, 1958.
6. В. И. Киргетов, *Об освобождении материальных систем*, ПММ, т. 24, в I. 1960.
7. Б. И. Киргетов, *О «возможных перемещениях» материальных систем с линейными дифференциальными связями второго порядка*, ПММ, т. **23**, вып. 4, М., 1959.
8. Н. Е. Кочин, *Об освобождении механических систем*, ПММ, т. 10, в. 5–6, 1946.
9. В. С. Новоселов, *Уравнения движения нелинейных неголономных систем с переменными массами*, Вестник ЛГУ, № 7, 1959.
10. В. С. Новоселов, *Вопросы механики переменных масс с учетом внутреннего движения частиц*, Вестник ЛГУ, № 1, 1957.
11. М. И. Рейтман, *Общий вариационный принцип в механике сплошной среды и его применение*, Строительная механика и расчет сооружений, № 5, 1965.
12. М. И. Рейтман, *Об одном методе решения задачи динамики твердого тела и его приложении к неупругим оболочкам*, Известия АН СССР, Механика и машиностроение М, № 6, 1964.
13. В. В. Румянцев, *О системах с трением*, ПММ, т. 25, в. 6, 1961.
14. В. В. Румянцев, *О движении некоторых систем с неидеальными связями*, Вестник МГУ, 1961 г. № 5.
15. В. А. Сапа, *Вариационные принципы в механике переменной массы*, Известия АН Каз. ССР, серия мат. и мех., Вып. 5 (9), 1956.
16. В. А. Сапа, *К вопросу об основах аналитической механики переменной массы*, Ученые записки Казахского ун-та, т. 30, вып. 5, 1957.
17. В. П. Тамуж, *Об одном минимальном принципе в динамике жестко-пластического тела*, ПММ, т. 26, в. 4, 1962.
18. Б. Н. Фрадлин, *Неголономная механика и её приложения в естествознании и технике* (автореферат диссертации), Киев 1965.
19. Н. Я. Цыганова, *О принципе Журдена*, Научные труды ВПИ, Волгоград 1970.
20. Н. Г. Четаев, *О принципе Гаусса*, Изв. казанского физико-математического общества, сер. 3 т. 6, 1932–1933; *Одно видоизменение принципа Гаусса*, ПММ, т. У, вып. 1, М, 1941, 11–12
21. Н. Г. Четаев, *О вынужденных движениях*, ПММ., т. 7, в. 1, 1943.
22. Н. Г. Четаев, *О некоторых связях с трением*, ПММ, т. 24, в. 1, 1960.
23. L. Boltzmann, *Vorlesungen über die Prinzipien der Mechanik*, I Th.-Leipzig 1897.
24. H. Brell, *Über eine neue Fassung des Prinzips der kleinsten Aktion*, Wien. Ber. Bd. 122 (2-a), 1913, s. 1031–1036.
25. H. Brell, *Nachweis der Äquivalenz des verallgemeinerten Prinzipes der kleinsten Aktion mit dem Prinzip des kleinsten Zwanges*, Wien. Ber. Bd., 122 (2a), 1913.
26. C. F. Gauss, *Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik*, Grelle's Journal, Bd. 4, 1829.
27. C. F. Gauss, *Principia generalia theoriae fluidorum in statu aequilibri*, Werke. Bd. 5, Göttingen 1917.

28. C. F. GAUSS, *Das Princip des kleinsten Quadrate*, Werke. Bd. 10 (I), Göttingen, 1917, s. 473–482.
29. D. W. GIBBS, *On the fundamental formulae of dynamics*, American Journal of Mathematics, vol. 2, 1879, p. 49–64.
30. O. HOELDER, *Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis*, Nachricht. d. Gesellschaft d. Wiss., Göttingen, H. 2, 1896, s. 122–157.
31. P. JOURDAIN, *Note on an analogue of Gauss principle of least constraint*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 40, London 1909.
32. L. KÖNIGSBERGER, *Über die Principien der Mechanik*, Crelle's Journal Bd. 118, Berlin 1897.
33. R. LEITINGER, *Über Jourdain's Prinzip der Mechanik und dessen Zusammenhang mit dem verallgemeinerten Prinzip der kleinsten Aktion*, Wien. Ber. Bd. 116 (2a), 1907.
34. R. LEITINGER, *Über die Ableitung des Gausschen Prinzips des kleinsten Zwanges aus den allgemeinsten Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art*, Wien. Ber. Bd., 116 (2a), 1907.
35. R. LIPSCHITZ, *Bemerkungen zu dem Prinzip des kleinsten Zwanges*, Crelle's Journal, Bd. 82, Berlin 1876.
36. E. MACH, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*, Wien 1883.
37. A. MÖBIUS, *Lehrbuch der Statik*, Leipzig 1837.
38. L. NORDHEIM, *Die Prinzipe der Dynamik*, Handbuch der Physik, Bd. 5, Leipzig 1927.
39. A. PRZEBORSKI, *Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik*, Math. Zeitschrift, Bd. 36, Berlin 1933, s. 184–194.
40. C. REUSCHLE, *Über das Prinzip des kleinsten Zwanges und die damit zusammenhängenden mechanischen Prinzipe*, Archiv f. Math. Phys. Bd., 1845.
41. A. RITTER, *Über das Prinzip des kleinsten Zwanges*, Göttingen 1853.
42. S. SCHAEFER, *Die Prinzipe der Dynamik*, Berlin, Leipzig 1919.
43. H. SCHEFFLER, *Über das Gauss'sche Grundgesetz der Mechanik*, Zeitschrift f. Math. Phys. Bd. 3, Leipzig 1858.
44. E. SCHENKL, *Über eine dem Gaussschen Prinzipe des kleinsten Zwanges entsprechende Integralform*, Wien. Ber. Bd. 122 (2a), 1913.
45. A. VOSS, *Über die Prinzipe von Hamilton und Maupertuis*, Nachricht. d. Gesellsch. d. Wiss., Göttingen, m.ph.kl. 1900, s. 322–327.
46. A. VOSS, *Die Prinzipien der Mechanik*, Encykl. d. m. Wiss., Bd. 4, HI, Leipzig 1901, s. 3–121.
47. A. WASSMUTH, *Über die Anwendung des Prinzipes des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik*, Ber. München Akad. m. ph. kl. Bd. 24, 1894.
48. A. WASSMUTH, *Transformation des Zwanges in allgemeine Coordinaten*, Wien, Ber. Bd. 104 (2a), 1895.
49. A. WASSMUTH, *Das Restglied bei der Transformation des Zwanges in allgemeine Coordinaten*, Wien. Ber. Bd. 110 (2a), 1901.

POLITECHNIKA — WOŁGOGRAD

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 marca 1971 r.