

## MODELOWANIE PŁASKICH SPRĘŻYSTOPLASTYCZNYCH ZAGADNIĘŃ METODĄ FOTOPLASTYCZNOŚCI

ANDRZEJ LITWKA (POZNAŃ)

### 1. Wstęp

W ostatnim czasie dużo uwagi poświęca się zarówno teoretycznej, jak i doświadczalnej analizie sprężystoplastycznych stanów naprężenia. Teoretyczna analiza takich zagadnień, z uwagi na złożoność problemu, dotyczy na ogół tylko materiałów idealnie plastycznych. Rozwiązania teoretyczne z praktycznego punktu widzenia mają więc ograniczoną przydatność, gdyż wykresy rozciągania dla większości materiałów konstrukcyjnych odbiegają od wykresu rozciągania materiału idealnie plastycznego. Wyznaczenie na drodze teoretycznej stanu naprężenia i odkształcenia w ciałach o dowolnym wykresie rozciągania, aproksymowanym za pomocą pewnych funkcji, napotyka szereg trudności. Istniejące rozwiązania teoretyczne podane przez NEUBERA [8] i PANFEROWA [9] wymagają przeprowadzenia pracochłonnych obliczeń oraz są rozwiązaniami przybliżonymi.

Z tego względu dużego znaczenia nabierają w analizie sprężystoplastycznych stanów naprężenia metody doświadczalne, a szczególnie metoda fotoplastyczności. W niniejszej pracy, na przykładzie osiowo rozciąganego pręta z obustronnymi półkolistymi wycięciami, omówiono zastosowanie metody fotoplastyczności do modelowania płaskich sprężystoplastycznych stanów naprężenia.

### 2. Warunki podobieństwa modelowego

Przy przenoszeniu wyników badań modelowych na prototyp wykonany z innego materiału aniżeli model konieczne jest spełnienie warunków podobieństwa modelowego. W przypadku płaskiego sprężystego stanu naprężenia zachodzi na ogół konieczność spełnienia tylko dwóch warunków, a mianowicie warunku podobieństwa geometrycznego oraz podobieństwa obciążenia. Problem modelowania płaskich zagadnień sprężystoplastycznych przy zastosowaniu metody fotoplastyczności jest bardziej złożony. Poza wyżej wymienionymi warunkami, które dotyczą kształtu modeli oraz sposobu ich obciążenia muszą być spełnione jeszcze warunki dotyczące własności użytego do badań materiału

modelowego. Warunki te zostały podane przez FROCHTA i THOMSONA [1]. Przedstawiają się one następująco:

- a) krzywe rozciągania materiału modelowego oraz materiału, z którego wykonany jest prototyp muszą być podobne,
- b) współczynniki Poissona w obszarze plastycznym dla obu materiałów muszą być równe lub zbliżone,
- c) zachowanie obu materiałów w obszarze plastycznym powinno być opisywane tym samym warunkiem uplastycznienia.

Śród materiałów konstrukcyjnych, które wykazują własności plastyczne, największe znaczenie mają stal oraz aluminium. Ażeby istniała możliwość modelowania sprężysto-plastycznych stanów naprężenia dla elementów konstrukcyjnych wykonanych z tych materiałów konieczne jest w metodzie fotoplastyczności dobranie takiego materiału modelowego, którego właściwości odpowiadałyby postawionym powyżej wymaganiom. Badania przeprowadzone przez MÖNCHA i JIRE [2] oraz FROCHTA i THOMSONA [1] wykazały, że wymagania te najlepiej spełnia celuloid. Jednakże przedstawione powyżej warunki podobieństwa modelowego w stosunku do celulojdu oraz metali spełnione są tylko w przybliżeniu. W związku z tym należy oczekiwać pewnych błędów przy przenoszeniu na prototyp wyników badań przeprowadzonych metodą fotoplastyczności.

Pierwszą próbę oszacowania błędów popełnianych przy przenoszeniu na prototyp wyników uzyskanych metodą fotoplastyczności przeprowadzili MÖNCH i LORECK w pracy [3]. Wnioski wynikające z ich badań nie są jednak pełne, gdyż dotyczą tylko naprężeń występujących na nieobciążonych krawędziach modelu. Wynikało to stąd, że zastosowana przez nich metoda fotoplastyczności umożliwiała wyznaczenie naprężeń jedynie na swobodnych krawędziach modelu.

W niniejszej pracy podjęto próbę oszacowania błędów popełnianych przy przenoszeniu na prototyp wartości naprężeń w punktach leżących nie tylko na krawędziach, lecz również wewnątrz konturu modelu. Posłużono się w tym celu metodą fotoplastyczności przedstawioną w pracy [4] oraz wynikami badań omówionymi przez KOPYTOWA [5].

### 3. Określenie błędów modelowania

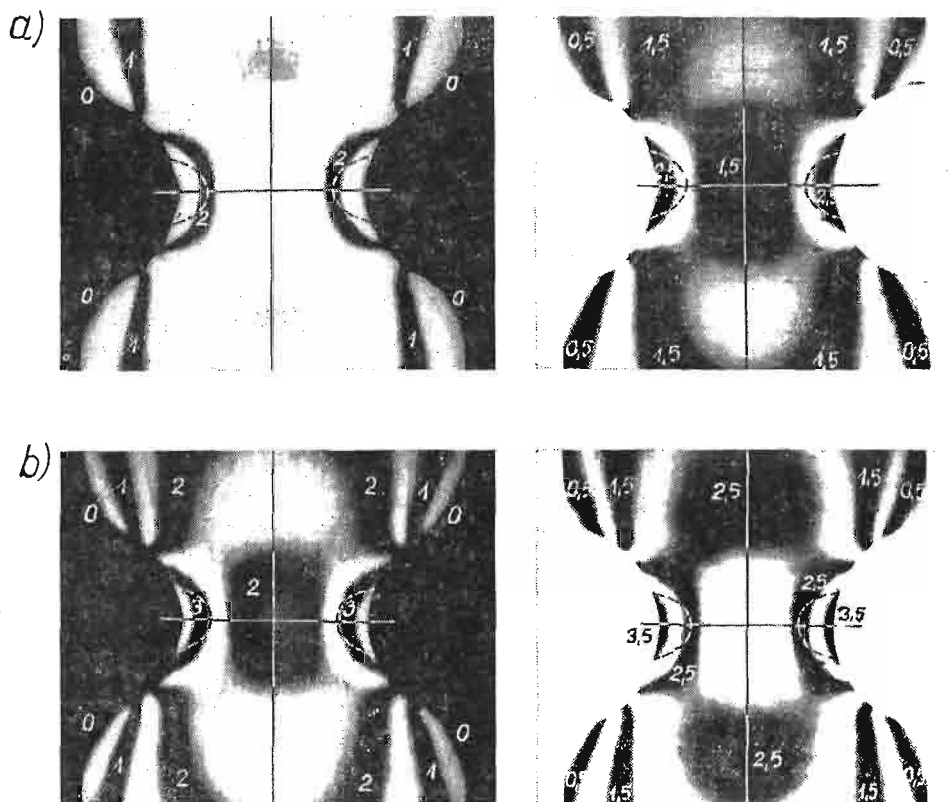
**3.1. Wyznaczenie naprężeń w modelu.** Badania rozkładu naprężeń w modelu przeprowadzono na przykładzie pręta osiowo rozciąganego z obustronnymi półkolistymi wycięciami. Jak już wspomniano, do obliczenia naprężeń zastosowano metodę fotoplastyczności omówioną w pracy [4]. Metoda ta polega na wyznaczeniu w trakcie badań czterech wielkości: rzędów izochrom  $m_1$  i  $m_2$  dla dwóch monochromatycznych źródeł światła o długości fali, odpowiednio  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , dyspersji dwójłomności  $D$  oraz parametru izoklin  $\theta$ . Trzy pierwsze wielkości służą do obliczenia różnicy i sumy naprężeń głównych z zależności

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= \varphi(m), \\ \sigma_1 + \sigma_2 &= \pm \{4[\sigma_0 + f(D)]^2 - 3(\sigma_1 - \sigma_2)^2\}^{1/2},\end{aligned}$$

gdzie  $\sigma_0$  — granica plastyczności,  $\varphi(m)$ ,  $f(D)$  — funkcje, których kształt wyznacza się doświadczalnie przy użyciu próbek osiowo rozciąganych.

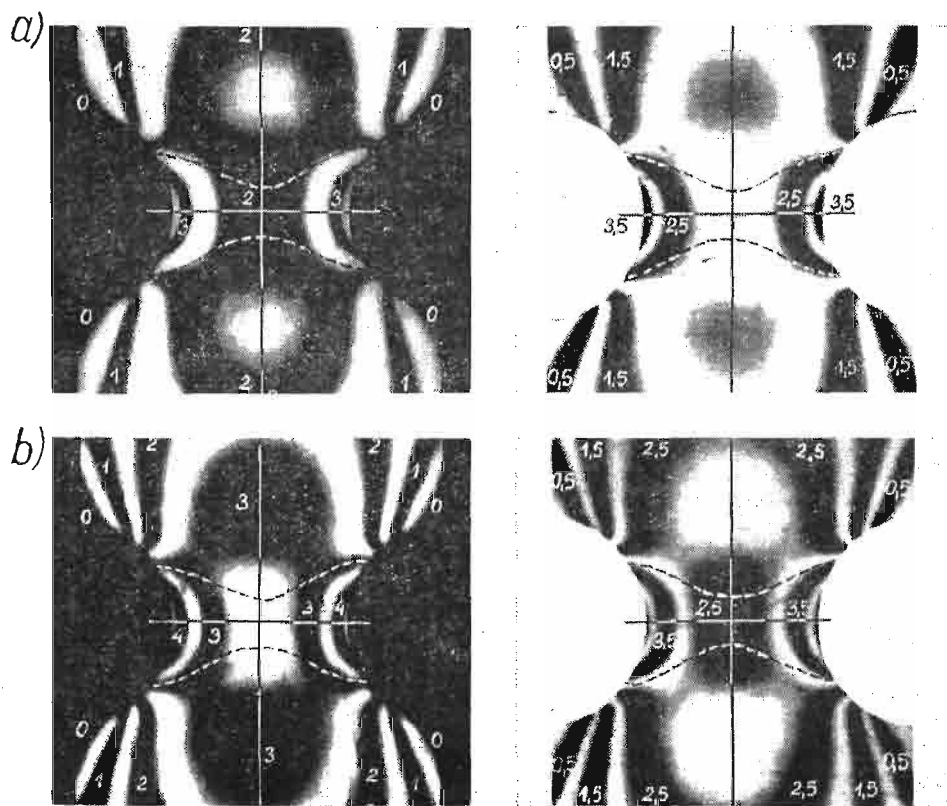
Brakujący do pełnego wyznaczenia stanu naprężenia kąt nachylenia kierunków głównych określony jest w całym modelu poprzez obraz izoklin. Granicę pomiędzy obszarem sprężystym a plastycznym można wyznaczyć w oparciu o zdjęcia izochrom wykonane dla dwóch monochromatycznych źródeł światła jako miejsce geometryczne punktów zerowej dyspersji dwójłomności.

Do badań użyto modeli celuloidowych o następujących wymiarach: długość całkowita 260 mm, długość pomiędzy uchwytami 150 mm, szerokość 60 mm, grubość 3 mm, promień

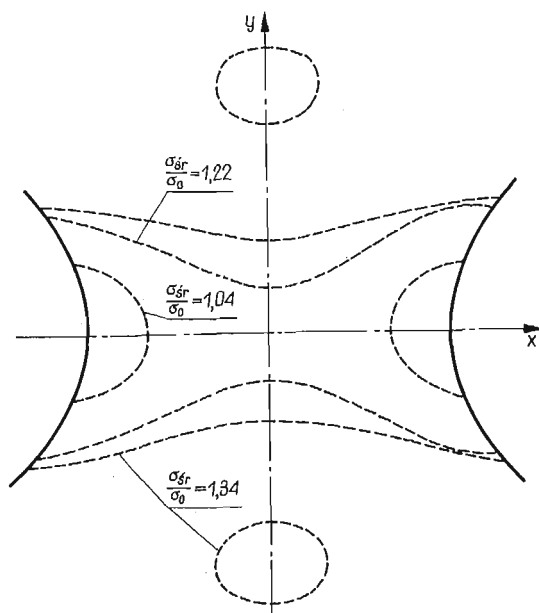


Rys. 1. Izochromy na ciemnym i jasnym tle w przecie rozciągany z obustronnymi półkolistymi wycięciami ( $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,04$ ): a) światło żółte, b) światło niebieskie

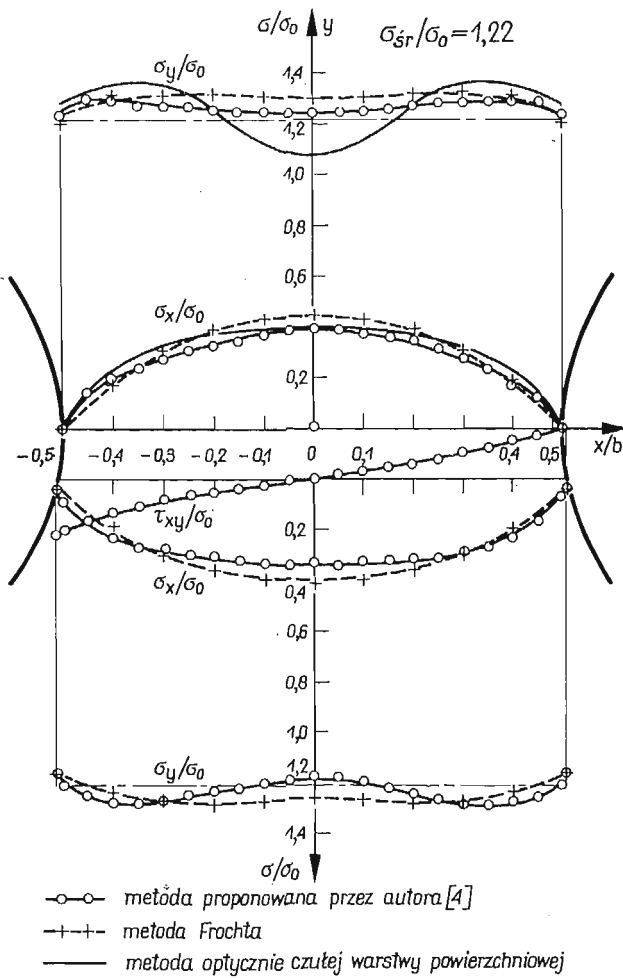
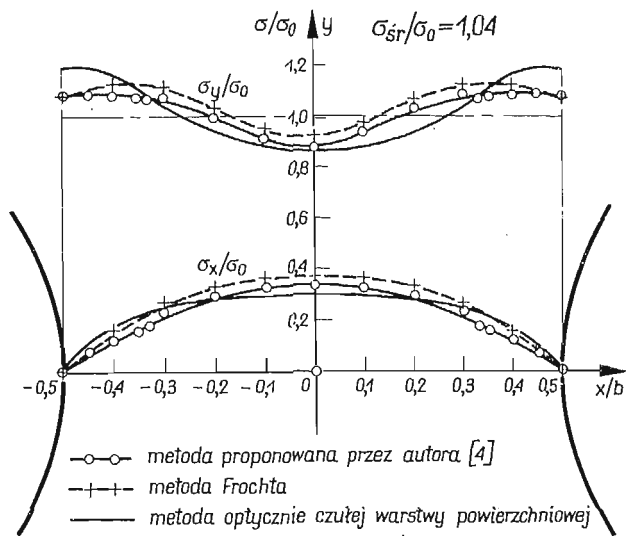
wycięć 15 mm, minimalna szerokość  $b = 30$  mm. Badania przeprowadzono dla dwóch przypadków obciążenia, przy których stosunek naprężenia średniego w minimalnym przekroju  $\sigma_{sr}$  do naprężenia odpowiadającego granicy plastyczności wynosił  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,04$  i 1,22. Zdjęcia izochrom otrzymane przy żółtym i niebieskim świetle monochromatycznym przedstawione zostały na rys. 1 i 2. Na zdjęciach tych przerywanymi liniami zaznaczono zasięg strefy uplastycznionej. Porównanie rozmiarów obszarów uplastycznionych dla  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,04$  i 1,22 przedstawiono na rys. 3. Dodatkowo naniesiono również na tym rysunku granicę obszaru plastyczności dla obciążenia wyrażonego stosunkiem  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,34$ , otrzymaną przez MÖNCHA i LORECKA [3].



Rys. 2. Isochromy na ciemnym i jasnym tle w pręcie rozciągłym z obustronnymi półkolistymi wycięciami ( $\sigma_{sr}^0/\sigma_0 = 1,22$ ): a) światło żółte, b) światło niebieskie



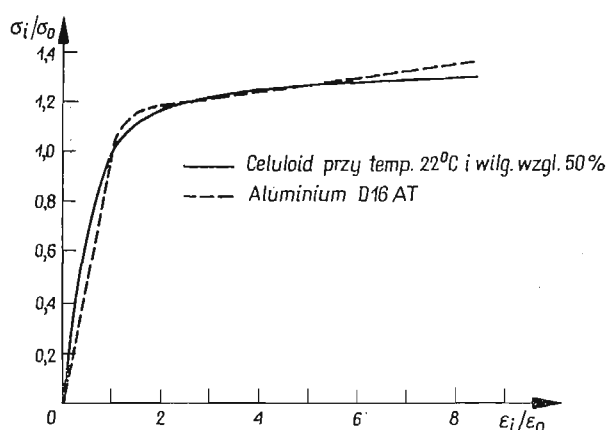
Rys. 3. Wpływ obciążenia na kształtowanie się obszarów plastycznych w osiowo rozciągłym pręcie z obustronnymi półkolistymi wycięciami



Rys. 4. Wykresy naprężeń w przekrojach pręta osiowo rozciąganego z obustronnymi półkolistymi wycięciami przy obciążeniu: a)  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,04$ ; b)  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,22$

Posługując się metodą zaproponowaną w pracy [4] wyznaczono naprężenia w charakterystycznych przekrojach modelu. W przypadku  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,04$  wyznaczono naprężenia tylko w przekroju najbardziej osłabionym, natomiast w przypadku  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,22$  wyznaczono jeszcze dodatkowo wartości naprężeń w przekroju równoległym do przekroju minimalnego i oddalonym od niego o  $0,1 b$ . Obydwa przekroje przy  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,22$  leżały całkowicie w obszarze plastycznym. Dla porównania obliczono w tych samych przekrojach modeli naprężenia posługując się metodą Frochta. Otrzymane obu metodami bezwymiarowe wykresy naprężeń wyrażonych stosunkiem  $\sigma/\sigma_0$ , przedstawiono na rys. 4. Na tym samym rysunku naniesiono również rozkłady naprężeń dla modeli aluminiowych wyznaczone przez KOPYTOWA [5].

3.2. *Podobieństwo modeli celuloidowych i aluminiowych.* KOPYTOW przeprowadził swe badania metodą optycznie czułej warstwy powierzchniowej posługując się modelami o następujących wymiarach: długość 350 mm, szerokość 80 mm, grubość 2,4 mm, promień wycięcia 20 mm, minimalny przekrój 40 mm. Modele te wykonane były z aluminium D16AT. Naprężenia w modelach wyznaczył on dla pięciu wartości siły rozciągającej, dla których stosunek  $\sigma_{sr}/\sigma_0$  wynosił: 0,744, 0,931, 1,023, 1,210 i 1,340. Wartości  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,023$  i 1,210



Rys. 5. Wykresy rozciągania dla aluminium D16AT oraz dla celuloidu

były więc bardzo zbliżone do odpowiednich wartości jakie przyjęto w badaniach opisanych w niniejszym artykule. Na tej podstawie można uważać, że spełniony jest warunek podobieństwa geometrycznego oraz warunek podobieństwa obciążenia. Ażeby istniała możliwość porównania wartości naprężeń wyznaczonych w obu badaniach muszą być jeszcze spełnione pozostałe warunki omówione w rozdziale 2.

Porównanie kształtu bezwymiarowych krzywych rozciągania celuloidu oraz aluminium D16AT przeprowadzone zostało na rys. 5. Wykresy tych krzywych sporządzono przez odniesienie na osiach współrzędnych wielkości bezwymiarowych określonych stosunkami  $\sigma/\sigma_0$  i  $\epsilon/\epsilon_0$  zamiast  $\sigma$  i  $\epsilon$ .

Jak wynika z rys. 5 wykresy rozciągania dla celuloidu i aluminium wykazują dość duże podobieństwo, w związku z czym można przyjąć, że pierwszy z wymienionych w rozdziale 2 warunków podobieństwa jest spełniony. Z badań przedstawionych przez FROCHTA i THOM-

SONA w pracy [1] wynika, że spełniony jest również warunek równości współczynników Poissona w obszarze plastycznym. Do podobnych wyników, w przypadku innego materiału modelowego, mianowicie polistyrolu, doszedł w swych badaniach HILTSCHER [6]. Jak już wspomniano w rozdziale 2 spełniony jest także warunek odnośnie kryterium uplastycznienia materiału modelowego. Badania przeprowadzone przez HILTSCHERA [6], MÖNCHA i JIRĘ [2] oraz NETREBKĘ [7] wykazały, że uplastycznienie takich tworzyw sztucznych, jak celulooid i polistyrol, podobnie jak metali, przebiega zgodnie z warunkiem uplastycznienia Hubera—Misesa—Hencky'ego.

W związku z tym, że spełnione są wszystkie wymagane warunki podobieństwa modelowego istnieje możliwość porównania wyników badań uzyskanych w niniejszej pracy przy zastosowaniu metody fotoplastyczności z wynikami przedstawionymi przez KOPYTOWA.

Z rys. 4 wynika, że największa rozbieżność pomiędzy wartością naprężenia otrzymaną metodą fotoplastyczności dla modelu celuloidowego a wartością otrzymaną metodą optycznie czułej warstwy powierzchniowej dla prototypu aluminiowego występuje w przypadku naprężenia  $\sigma_y$  dla punktu  $x/b = 0$  przy  $\sigma_{st}/\sigma_0 = 1,22$ . Rozbieżność ta wynosi 13%, co nie przekracza maksymalnego błędu metody, który, jak wynika z analizy błędów przeprowadzonej w pracy [4], wynosi  $\pm 15\%$ . Rozbieżności pomiędzy wartościami naprężeń w innych punktach są znacznie mniejsze i wahają się w granicach średniego błędu popełnianego przy obliczaniu naprężeń. Dla zastosowanej w niniejszej pracy metody obliczeniowej błąd ten wynosi  $\pm 8\%$  [4].

#### 4. Wnioski

Porównanie wyników badań modelowych przeprowadzonych metodą fotoplastyczności z wynikami uzyskanymi dla modeli aluminiowych przy zastosowaniu metody optycznie czułej warstwy powierzchniowej umożliwiło wyciągnięcie następujących wniosków:

1. Spełnienie przedstawionych w rozdziale 2 warunków podobieństwa modelowego umożliwia bezpośrednie przeniesienie na prototyp wyników badań przeprowadzonych metodą fotoplastyczności.

2. Błędy popełnione przy przeniesieniu na prototyp wyników badań modelowych nie przekraczają błędów obliczenia naprężeń metodą fotoplastyczności.

3. Średni błąd ostatecznych wyników, wynoszący  $\pm 8\%$ , stanowi dla celów praktycznych wystarczającą dokładność.

Na tej podstawie można przyjąć, że metoda fotoplastyczności może być przydatna do modelowania płaskich sprężystoplastycznych stanów naprężenia.

#### Literatura cytowana w tekście

1. M. M. FROCHT, R. A. THOMSON, *Studies in photoplasticity*, Arch. Mech. Stos., 2, 11 (1959), 157—171.
2. E. MÖNCH, R. JIRA, *Studie zur Photoplastizität von Cellulooid am Rohr unter Innerdruck*, Zeitschrift für angewandte Physik, 9, 7 (1955), 450—453.
3. E. MÖNCH, R. LORECK, *A study of the accuracy and limit of application of plane photoplastic experiments*, Photoelasticity, Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press, 1963, 169—184.

4. A. LIŹEWKA, *Wyznaczenie metodą fotoplastyczności składowych płaskiego stanu naprężenia w obszarze plastycznym*, rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, 1968.
5. В. Д. КОПЫТОВ, *Исследование напряженно-деформированного состояния при упруго-пластических деформациях полосы с двусторонней полукруглой выточкой методом фотоупругих покрытий*, Вестник Москов. Унив., Математика, механика, 2 (1967), 93—100.
6. R. HILTSCHER, *Theorie und Anwendung der Spannungsoptik im elastoplastischen Gebiet*, Zeitschr. des Verein. Deutsch. Ing., 2, 97, (1955), 49—58.
7. В. П. НЕТРЕБКО, *Проверка и уточнение основных законов фотопластичности целлулоида*, Вестник Москов. Унив., Математика, механика, 2 (1963), 53—59.
8. H. NEUBER, *Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 4, 28E (1961), 544—550.
9. В. М. ПАНФЕРОВ, *Концентрация напряжений при упруго-пластических деформациях*, Изв. АН СССР, ОТН, 4, (1954), 47—66.

### Резюме

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ФОТОПЛАСТИЧНОСТИ

Применение метода фотопластичности в моделировании плоских упруго-пластических задач, представлено на примере одноосно растягиваемой полосы с двусторонней полукруглой выточкой. Полученные результаты сравнены с результатами полученными на алюминиевых моделях методом фотоупругих покрытий, что дало возможность провести оценку погрешности при перенесении на прототип детали, напряжений определенных методом фотопластичности.

### Summary

#### THE MODELING OF THE PLANE ELASTO-PLASTIC PROBLEMS BY MEANS OF THE PHOTOPLASTIC METHOD

The tests of the tension bar with the symmetric semicircular notches were presented as the example of the application of the photoplastic method for the modeling of the plane elasto-plastic problems. The tests results were compared with the results obtained by means of the photo-elastic coating method for the aluminium models. This made it possible to estimate the errors of the transition from model to prototype.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 czerwca 1969 r.*