MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 8 (1970)

O PRZYBLIŻONYM INTEGRALNYM OSZACOWANIU KUMULACJI PLAZMY PODDANEJ DZIAŁANIU KONCENTRYCZNEGO IMPULSU CIŚNIENIA

SYLWESTER KALISKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

BASOW i współpracownicy [1], jak również autorzy pracy [2] zastosowali uśredniony, integralny opis problemu ekspansji plazmy deuterowej poddanej działaniu silnego impulsu laserowego. Opis ten, mimo daleko idących uproszczeń, doprowadził do wyników porównywalnych co do rzędu wielkości z wynikami eksperymentu przeprowadzonego cztery lata później [3]; potwierdza to jego przydatność przy jakościowej ocenie parametrów w procesie nagrzewania plazmy.

Złożoność mechanizmów fizycznych przy impulsowym laserowym nagrzewaniu plazmy [4, 5, 6] zmusza do wprowadzania szeregu założeń i uproszczeń, co z kolei nie daje pewności odnośnie dokładności uzyskanych wyników. Poza tym matematyczna analiza procesów fal uderzeniowych przy uwzględnieniu skomplikowanych mechanizmów powierzchniowych, strat promieniowania itd. jest niezwykle złożona i stanowi źródło dodatkowych formalnych przybliżeń rachunkowych. W związku z powyższym metoda integralnego opisu uśrednionego, jak to wynika z porównania [1] [7] i [3], ma określony praktyczny sens. W oparciu o powyższą metodę udało się w [8] rozwiązać złożony problem nagrzewania za pomocą impulsu laserowego plazmy deuterowej zawartej w gęstej otoczce opóźniającej proces ekspansji plazmy.

Model integralnego uśrednionego opisu plazmy można również zastosować z powodzeniem i do problemu kumulacji plazmy poddanej działaniu zewnętrznego, koncentrycznego impulsu ciśnienia. Zagadnienie to przy spełnieniu warunków samopodobieństwa zostało dla kuli bez otoczki rozwiązane w sposób ścisły stosunkowo dawno (por. [9, 10, 11]).

Metoda integralnego uśrednienia stanowi dla kuli bez otoczki daleko bardziej uproszczony opis zagadnienia rozwiązanego ściśle. Jednakże jej zaletą jest to, że jest nieporównywalnie bardziej prosta oraz, i to jest najistotniejsze, że można ją zastosować do kuli z otoczką, gdzie rozwiązanie ścisłe nie istnieje oraz do bardziej złożonych układów, dla których rozwiązania ścisłego nie udaje się uzyskać i gdzie fizyka występujących zjawisk jest nader skomplikowana (por. [8]).

Taka sytuacja może mieć miejsce np. przy kombinowaniu przypadków typu [8] i niniejszego. W związku z powyższym rozpatrzymy obecnie, w oparciu o uśredniony opis integralny, rozwiązanie problemu kumulacji plazmy (z otoczką i bez) poddanej koncentrycznemu impulsowi ciśnienia, zaś w następnej pracy, bazując na rozwiązaniu niniejszym oraz [8], rozpatrzymy bardziej złożony problem kombinowany nie dający się potraktować ściśle.

W rozdziale 2 pracy podano równania wyjściowe oraz założenia, w rozdziale 3 rozwiązanie problemu oraz w rozdziale 4 przykład liczbowy.

2. Równania problemu

Rozpatrzymy kulkę plazmową o promieniu r_0, poddaną koncentrycznemu działaniu impulsu ciśnienia. Przyjmiemy wszystkie założenia oraz ograniczenia analogiczne do podanych w pracach [1] i [8], tj. założenia odnośnie strat promieniowania, przewodzenia itd., jak również założenia dotyczące relacji pomiędzy czasem relaksacji a czasem tworzenia procesu. Przyjmiemy za punkt wyjścia równania gazu idealnego.

Zgodnie z powyższymi założeniami skorzystamy, dla integralnego opisu uśrednionego naszego zagadnienia, z równań zachowania pędu i energii w postaci

$$G\frac{dv}{dt} - 4\pi r^2 p = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(G\frac{v^2}{2} + E\right) = 0, \tag{2.2}$$

gdzie oznaczono przez $v = \dfrac{dr}{dt}$ — średnią prędkość rozszerzenia gazodynamicznego (kumulacji), r — promień kuli, p — średnie ciśnienie, G — średnią masę kuli i otoczki, względnie masę samej kuli plazmowej[1]) oraz przez

$$E = \frac{3}{2}kNT \tag{2.3}$$

energię wewnętrzną gazu, przy czym T jest uśrednioną temperaturą, k — stałą Boltzmanna, N — całkowitą liczbą cząstek kuli (kuli i otoczki).

Poza tym obowiązuje oczywiście uśredniona relacja stanu

$$pV = kNT. \tag{2.4}$$

Należy tutaj zauważyć, że w uśrednionym rozwiązaniu integralnym wpływ otoczki uwidacznia się tylko w zmianie G, co stanowi oczywiście daleko idące uproszczenie w stosunku do rzeczywistości, gdzie wskutek niejednorodności powstają odbite fale uderzeniowe i strona matematyczna zagadnienia komplikuje się niepomiernie w porównaniu z [9].

W związku z powyższym, dla uzyskania realnych oszacowań należy założyć niezbyt duże różnice gęstości materiału otoczki i kuli oraz stosunkowo małe wymiary geometryczne otoczki[2]).

---

[1]) W przypadku założenia stałej gęstości i liniowej zmiany prędkości wzdłuż promienia mamy $G = \dfrac{3}{5}G_0$, gdzie G_0 — masa kuli.

[2]) Dla stanów asymptotycznych wyniki będą lepsze dla dużych różnic gęstości.

Inną wersją rozwiązania może być oddzielne uśrednione rozwiązanie dla otoczki, a następnie dla kuli, dla której warunki początkowe (brzegowe) wynikną z rozwiązania dla otoczki przy założeniu określonego mechanizmu oddziaływania. Ponieważ taka procedura stanowiłaby, z pewnymi modyfikacjami, dwukrotne powtórzenie procedury rozwiązania niniejszego — pominiemy ją, zwracając jedynie uwagę na to, że takie dwuetapowe rozwiązanie byłoby ściślejsze, szczególnie przy znacznej różnicy gęstości ośrodków. Zakładając, że $r = r(t)$, warunki początkowe (odpowiadają one również brzegowym) będą miały postać

$$\begin{aligned} r &= r_0, \\ v &= r' = -v_0 \end{aligned} \qquad \text{dla } t = 0. \tag{2.5}$$

Do warunków tych winien dojść jeszcze trzeci warunek, jako że układ równań (2.1), (2.2) redukuje się do równania trzeciego rzędu względem $r(t)$. Ponieważ warunek ten dotyczy drugiej pochodnej, wymaga sprecyzowania charakteru impulsu ciśnienia.

Załóżmy, że impuls ten ma postać

$$I = P_{(t)}\delta(t) \quad \text{lub} \quad I = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ P \to \infty}} P\Delta t = \text{const}. \tag{2.6}$$

Przy takim założeniu v_0 oraz I będą z sobą związane relacją

$$v_0 = \frac{I}{G}, \tag{2.7}$$

zaś dla r'' założymy

$$r''_{(0)} = 0. \tag{2.8}$$

Warunek (2.8) jest równoważny przyjęciu stałej całkowania równania (2.2) w postaci:

$$\frac{Gv_0^2}{2}, \tag{2.9}$$

co odpowiada energii początkowej układu.

Założenie takie prowadzi jednakże w przypadku rozwiązania uśrednionego do rozwiązania, dla którego zmiana prędkości $r'(t)$ fali kumulacji następuje przy $r = 0$, co oczywiście fizycznie jest niemożliwe. Przyjęcie impulsu w postaci (2.6) jest dopuszczalne, jeżeli założy się, że efekt ten został wywołany niesprężystym zderzeniem mas i masa początkowa ulega zwiększeniu. Masa ta może pochodzić np. od materii strugi kumulacyjnej. W związku z powyższym w miejsce stałej energii początkowej (2.9) przyjmiemy:

$$\alpha\frac{Gv_0^2}{2}, \tag{2.10}$$

gdzie $\alpha > 1$.

Założenie to prowadzi do eliminacji skrajnego, nierealnego przypadku zmiany prędkości rozszerzenia (kumulacji) hydrodynamicznego $r'(t)$ przy $r = 0$.

Układ równań (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) z warunkami początkowymi (2.5) i (2.10) stanowi sformułowanie problemu. Przejdźmy obecnie do konstrukcji rozwiązania ogólnego.

3. Rozwiązanie równań

Wykorzystując (2.4) i podstawiając do (2.3), a następnie do (2.2), możemy układ równań (2.1), (2.2) zapisać następująco

$$Gr''-4\pi r^2 p = 0, \tag{3.1}$$

$$\left(G\frac{r'^2}{2}+\frac{3}{2}pV\right)' = 0. \tag{3.2}$$

Mając na uwadze, że $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ oraz, że na podstawie (3.1)

$$p=\frac{Gr''}{4\pi r^2}, \tag{3.3}$$

otrzymujemy po podstawieniu do (3.2)

$$\frac{G}{2}(r'^2+rr'')' = 0 \tag{3.4}$$

lub

$$\frac{G}{4}(r^2)''' = 0. \tag{3.5}$$

Całkując (3.5) i uwzględniając (2.10) znajdujemy

$$\frac{G}{4}(r^2)'' = \alpha\frac{Gv_0^2}{2} \tag{3.6}$$

lub

$$(r^2)'' = 2\alpha v_0^2. \tag{3.7}$$

Po dwukrotnym scałkowaniu mamy zatem

$$r=\sqrt{\alpha v_0^2 t^2+C_1 t+C_0}. \tag{3.8}$$

Na podstawie pierwszego z warunków początkowych (2.5) mamy

$$C_0 = r_0^2, \tag{3.9}$$

zaś z drugiego obliczamy

$$[r'(t)]_{t=0} = \left[\frac{C_1+2\alpha v_0^2 t}{2\sqrt{r_0^2+\alpha v_0^2 t^2+C_1 t}}\right]_{t=0} = -v_0, \tag{3.10}$$

$$C_1 = -2v_0 r_0. \tag{3.11}$$

Stąd ostatecznie otrzymujemy

$$r(t)=\sqrt{r_0^2-2r_0v_0t+\alpha v_0^2t^2}, \tag{3.12}$$

$$r'(t) = -\frac{v_0r_0-\alpha v_0^2 t}{\sqrt{r_0^2+\alpha v_0^2t^2-2r_0v_0t}}. \tag{3.13}$$

Dla

$$t=t_0=\frac{r_0}{\alpha v_0} \tag{3.14}$$

zachodzi $r'(t) = 0$. Wtedy $r = r_{\min}$ wynosi

$$r_{\min} = \sqrt{1-\frac{1}{\alpha}}\, r_0. \tag{3.15}$$

Maksymalne ciśnienie

$$p_{\max} = \left.\frac{Gr''}{4\pi r^2}\right|_{t=t_0} \tag{3.16}$$

prowadzi do

$$p_{\max} = \frac{G}{4\pi}\left[\frac{\alpha v_0^2(r_0^2+\alpha v_0^2 t^2-2r_0 v_0 t)-(\alpha v_0^2 t-v_0 r_0)^2}{(\alpha v_0^2 t^2-2r_0 v_0 t+r_0^2)^{5/2}}\right]_{t=\frac{r_0}{\alpha v_0}} = \tag{3.17}$$

$$= \frac{G}{4\pi}\frac{v_0^2}{r_0^3}\frac{\alpha}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^3}} = \frac{Gv_0^2}{4\pi r_0^3}\sqrt{\frac{\alpha^5}{(\alpha-1)^3}}$$

oraz

$$T = \frac{G}{3kN}\left[v_0^2\alpha-\frac{(\alpha v_0^2 t-v_0 r_0)^2}{r_0^2+\alpha v_0^2 t^2-2r_0 v_0 t}\right] \tag{3.18}$$

i

$$T_{\max} = \frac{\alpha G v_0^2}{3kN}. \tag{3.19}$$

W przypadku uwzględnienia otoczki przyjmujemy:

$$G_c = G\beta. \tag{3.20}$$

gdzie $\beta > 1$, zaś G jest masą kuli.

4. Przykład

Rozpatrzmy krótkie przykłady ilustracyjne. Przyjmiemy następujące dane wyjściowe:

$$r_0 = 1{,}33\cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm}; \quad V = 10^{-5}\,\mathrm{cm}^3; \quad \frac{N}{V} = 3{,}0\cdot 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}; \tag{4.1}$$
$$G = 10^{-6}\,\mathrm{g}; \quad \alpha = 2; \quad v_0 = 5\cdot 10^6\,\mathrm{cm/sek}.$$

Wtedy

$$t_0 = \frac{r_0}{\alpha v_0} = \frac{1{,}33\cdot 10^{-2}}{2\cdot 5\cdot 10^6} = 1{,}33\cdot 10^{-9}\,\mathrm{sek}, \tag{4.2}$$

$$p_{\max} = \frac{10^{-6}}{12{,}56}\,\frac{25\cdot 10^{12}}{(1{,}33\cdot 10^{-2})^3}\,4\sqrt{2}\ \mathrm{g/cm\,sek^2} \approx 4{,}8\cdot 10^{12}\,\mathrm{g/cm\,sek^2} = 4{,}8\cdot 10^6\,\mathrm{kg/cm^2}. \tag{4.3}$$

$$T_{\max} \approx \frac{p_{\max}V}{kN} \approx 10^6 C^0 \left(\text{ściślej } T_{\max} = \frac{\alpha G v_0^2}{3kN}\right). \tag{4.4}$$

W przykładzie powyższym przyjęto $\alpha = 2$, tj. porównywalne masy zewnętrzne i wewnętrzne. Dla bardzo dużych α, rzędu 10^2, otrzymamy:

$$t_0 \approx 0{,}27 \cdot 10^{-11}\,\text{sek}; \quad p_{max} \approx 2{,}7 \cdot 10^6\,\text{kg/cm}^2; \quad T_{max} \approx 2 \cdot 10^7 C^0. \tag{4.5}$$

Dla α bliskich jedności, np. rzędu 1,01

$$t_0 = 2{,}66 \cdot 10^{-9}\,\text{sek}; \quad p_{max} \approx 2{,}7 \cdot 10^6\,\text{kg/cm}^2; \quad T_{max} \approx 2 \cdot 10^5 C^0. \tag{4.6}$$

Ze wzorów rozdziału 3 wynika, że doborem prędkości początkowej, masy i objętości oraz α można w istotny sposób regulować ciśnienie maksymalne. Natomiast T_{max} można regulować głównie za pomocą prędkości początkowej oraz α i β.

5. Uwagi końcowe

Uzyskane wyżej rozwiązania obowiązują dla układu z otoczką lub bez niej w założeniu, że β nie różni się od 1 o kilka rzędów wielkości. Rozwiązanie ścisłe dla układu z otoczką byłoby zbyt skomplikowane nawet na drodze numerycznej.

Cel niniejszej pracy, jak już wspomnieliśmy na wstępie, poza uzyskaniem możliwości operowania bardzo prostymi wzorami i uwzględnieniem otoczki — polega, między innymi, na możliwości kombinowania rozwiązań uzyskanych w niniejszej pracy z rozwiązaniami, pracy [8], czego nie daje się dokonać na gruncie ścisłych rozważań i co ze względu na niezwykłą złożoność zjawisk fizycznych nie zawsze jest celowe. W takich przypadkach metoda integralnego, uśrednionego opisu oddaje praktyczne usługi w zakresie orientacji w rzędach wielkości parametrów badanego procesu.

W dalszych pracach zajmiemy się kombinowanym problemem złożonym z problemu pracy niniejszej i [8], a następnie uściślonymi (falowymi) rozwiązaniami tych problemów.

Literatura cytowana w tekście

1. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, *Условия разогрева плазмы излучением оптического генератора*, ЖЭТФ, 1, **46** (1964).
2. A. F. Haught, D. H. Polk, W. J. Fader, *Production of plasmas for thermonuclear research by laser beam irradiation of solid particles*, Reports, 1—8 (1965—1968), United Aircraft R. Lab., Contact for the US Atomic Energy Comission.
3. Н. Г. Басов, С. Л. Захаров, Л. Г. Крюков, Ю. В. Сенатский, С. В. Чекалин, *Эксперименты по наблюдению нейтронов при фокусировке мощного лазерного излучения на поверхность деитериди лития*, Писма в ред. ЖЭТФ, 1, **8** (1968).
4. Ю. Афинасьев, В. М. Кроль, О. Н. Крохин, И. В. Немчанов, *Газодинамические процессы при нагревании вещества излучением лазера*, ПММ, 6, **30** (1966).
5. И. В. Немчанов, *Стационарный режим движения нагреваемых излучением паров вещества при наличии бокового растекания*, ПММ, 2, **31**, 1967.
6. R. E. Kidder, *The application of lasers to the production of high temperature and high pressure plasma*, Report of Lawrence Rod. Lab., Univ. California-Livemore 1967.
7. J. M. Dawson, *On the production of plasma by giant pulse laser*, Phys. Fluids, 7, **7** (1964).
8. S. Kaliski, *About approximate appraisals of deuterium plasma expansion excited by a thermal shock of lasers impulse*, Proc. Vibr. Probl., 4, **10** (1969).

9. К. П. Станюкович, *Неустановившиеся движения сплошных сред*, Москва 1955.
10. Ф. А. Баум, К. П. Станюкович, Б. И. Шехтер, *Физика взрыва*, Москва 1959.
11. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Раизер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлени*, Москва 1966.

Резюме

О ПРИБЛИЖЕННОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ КУМУЛЯЦИИ ПЛАЗМЫ ПОДВЕРГНУТОЙ ДЕЙСТВИЮ КОНЦЕНТРИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ

В работе рассмотрена проблемма кумуляции плазмы с оболочкой и без оболочки под действием концентрического импульса давления. На грунте теории идеального газа решение дается опирающиеся на интегральное, усредненное описание процесса. Оценены критические параметры процесса.

Метод усредненного описания позволяет учесть, хотя с далеко идущим приближением, влияние оболочки по отношению к известному автомодельному решению, а также позволяет объединить настоящее решение например с [8], где механизм процесса необычно сложен и точное решение получить нельзя. Усредненное же решение позволяет качественно оценить параметры процесса. Этой проблеммой займемся, на грунте обеих работ: настоящей и [8], отдельно.

Summary

ON AN APPROXIMATE, INTEGRAL DETERMINATION OF CUMULATION OF THE PLASMA UNDER THE ACTION OF THE CONCENTRIC PRESSURE IMPULSE

The problem of cumulation of the plasma, with the shell and without it, under the action of the concentric impulse of pressure was analysed in this paper. The solution was presented on the ground of theory of the perfect gas, basing on the integral, averaged description of the process. The critical parameters of the process were estimated.

The method of averaged description allows, though with a far going approximation, to take into consideration, in relation to the known strict self-similar solution, the influence of shell, and allows to connect this solution with, for instance [8], where the mechanism of process is extraordinary complicated and a strict solution is unattainable. However, the averaged solution allows to estimate qualitatively the parameters of the process. We shall deal with this problem on the ground of both this paper and [8] separately.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 czerwca 1969 r.