MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA,
2, 8 (1970)

PODSTAWOWE TWIERDZENIA Z ZAKRESU TEORII DOSTOSOWYWANIA SIĘ KONSTRUKCJI SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH DO OBCIĄŻEŃ ZMIENNYCH W CZASIE

JAN A. KÖNIG (WARSZAWA)

1. Wstęp

W projektowaniu i obliczaniu konstrukcji od szeregu lat uwzględniane są odkształcenia plastyczne. W szczególności teoria nośności granicznej znalazła już dosyć szerokie zastosowanie praktyczne. Jednakże już w końcu lat dwudziestych GRÜNING [1] i BLEICH [2] zwrócili uwagę na niebezpieczeństwo w postaci możliwości zniszczenia konstrukcji pod działaniem obciążeń cyklicznych, czy to w wyniku stopniowo narastających (choć ograniczonych na każdym cyklu) przyrostów odkształceń plastycznych, czy też wskutek zmęczenia plastycznego przy kolejno występujących odkształceniach plastycznych przeciwnych znaków, pomimo że stan graniczny nie został jeszcze osiągnięty.

MELAN [3] (1938) i KOITER [5, 6] (1956) podali twierdzenia podstawowe dotyczące możliwości zniszczenia powyższego typu przed osiągnięciem stanu granicznego. PRAGER [7] i ROZENBLUM [8, 9] uogólnili te twierdzenia na przypadek obciążeń termicznych. W pracy [17] rozpatrzono twierdzenie Melana, w przypadku gdy zarówno warunek plastyczności, jak i moduły sprężystości materiału są zależne od temperatury. Pojęcie dostosowywania się, tj. powstawania w ciele samonaprężeń pozwalających mu reagować na następne cykle obciążeń już w sposób czysto sprężysty, ma sens również dla ciał sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem. Dowód odpowiednio zmodyfikowanego twierdzenia podał MELAN [4] dla wzmocnienia translacyjnego. Bardziej ogólne typy wzmocnienia były badane, ze stanowiska teorii dostosowania, w pracy [19].

Bezpośrednie wykorzystanie twierdzeń o dostosowaniu do bardziej złożonych problemów napotyka w praktyce znaczne trudności matematyczne, podobnie jak w przypadku trójwymiarowych problemów teorii sprężystości i plastyczności. Dla konstrukcji, których jeden lub dwa wymiary są małe w porównaniu z pozostałymi (pręty, powłoki), buduje się teorie spełniające podstawowe zależności ośrodka ciągłego w sposób przybliżony. Pozwala to znacznie uprościć rozpatrywane problemy kosztem stosunkowo niewielkich niedokładności.

W takich przybliżonych teoriach operujących wielkościami uogólnionymi rozpatrujemy konstrukcję nie jako zbiór punktów, lecz jako układ jej podzbiorów nazywanych przekrojami. Za siły uogólnione bierze się przy tym siły i momenty wzajemnego oddziaływania tych przekrojów lub też wielkości do nich proporcjonalne.

W pracy [16] pokazano, jak można stosować klasyczne twierdzenie MELANA [3] o dostosowaniu, w przypadku gdy teoria opisująca stan sił wewnętrznych i deformacji rozpatrywanej konstrukcji wyrażona jest w uogólnionych siłach i uogólnionych odkształceniach, które to wielkości określone są nie dla punktów, lecz dla przekrojów konstrukcji. Zastosowanie ogólnych wyników pracy [16] do konstrukcji ramowych, łukowych oraz dla płyt przedstawiono w pracach [18 i 20].

Pojęcia uogólnionych odkształceń, tj. wielkości q_r wprowadza się w ten sposób, że w ramach ścisłości rozpatrywanej teorii zachodzi równość

$$\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV = \int_\alpha \sum_{r=1}^{m} Q_r q_r d\alpha, \tag{1.1}$$

gdzie V oznacza objętość rozpatrywanej konstrukcji, σ_{ij} — tensor naprężenia, ε_{ij} — tensor odkształcenia, Q_r — siły uogólnione, m — ich liczbę, α — pole wszystkich przekrojów danej konstrukcji.

Istnieje naturalnie (por. [16]) jednoznacznie określone przekształcenie pola naprężeń $\sigma_{ij}(x)$, $x \in \xi$, gdzie $\xi \in \alpha$ jest rozpatrywanym przekrojem konstrukcji, w siły uogólnione

$$Q_r(\xi) = \Phi_r[\sigma_{ij}(x)], \qquad x \in \xi; \quad r = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.2}$$

Operatory Φ_r są liniowe

$$\begin{aligned} \Phi_r(\sigma_{ij}+\tau_{ij}) &= \Phi_r(\sigma_{ij})+\Phi_r(\tau_{ij}), \\ \Phi_r(\lambda\sigma_{ij}) &= \lambda\Phi_r(\sigma_{ij}), \end{aligned} \tag{1.3}$$

gdzie λ jest dowolną liczbą rzeczywistą. Przekształcenie odwrotne nie jest, w ogólności, jednoznaczne, jednakże w obrębie znanych teorii operujących wielkościami uogólnionymi (pręty zginane, płyty, powłoki) otrzymuje się jednoznaczne odwrócenie związku (1.2) dla przypadku czysto sprężystego zachowania się materiału przekroju. Wynika to z założeń kinematycznych odnośnie możliwych deformacji przekroju. Zatem

$$\sigma^e_{ij}(x) = \sum_{r=1}^{m} Q_r(\xi)a^r_{ij}(x), \qquad x \in \xi, \tag{1.4}$$

gdzie $a^r_{ij}(x)$ jest sprężystym rozkładem naprężeń w przekroju, wywołanym jednostkową siłą uogólnioną $Q_r = 1$, podczas gdy pozostałe siły uogólnione równe są zeru, zaś σ^e_{ij} oznacza sprężystą część tensora naprężenia. Wobec tego, stan naprężenia w dowolnym punkcie przekroju może być przedstawiony w postaci

$$\sigma_{ij}(x) = \sigma^e_{ij}(x)+s_{ij}(x) = \sum_{r=1}^{m} Q_r a^r_{ij}+s_{ij}, \tag{1.5}$$

gdzie $\Phi_r(s_{ij}) = 0$, $r = 1, 2, \ldots, m$. Jeżeli dla danego typu konstrukcji użyta teoria w wielkościach uogólnionych jest wystarczająco dokładna, to w ramach jej ścisłości zbiór dowolnie wziętych pól naprężeń $s_{ij}(x)$ dla poszczególnych przekrojów ξ może być uważany za pole naprężeń resztkowych, tj. naprężeń spełniających warunki równowagi wewnętrznej i pozostających w równawadze z zerowymi obciążeniami zewnętrznymi.

Wykonując operację (1.2) na równaniach równowagi (lub wprost rozpatrując warunki równowagi przekrojów), otrzymujemy równania równowagi zapisane w siłach uogólnionych

$$\sum_{r=1}^{m} \mathscr{L}_{kr} Q_r + N_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, s, \tag{1.6}$$

gdzie $\mathscr{L}_{kr}$ są liniowymi operatorami różniczkowymi, a N_k pewnymi wielkościami określonymi przez zewnętrzne siły powierzchniowe i masowe.

Każde pole $Q_r^0(\xi)$, $\xi \in a$ spełniające równania (1.6) dla $N_k = 0$ będziemy, przez analogię, nazywać resztkowym polem sił uogólnionych.

W pracy [16] wprowadzono, dla danego przekroju, pojęcie powierzchni sprężystej jako brzegu obszaru w przestrzeni sił uogólnionych, w obrębie którego żaden punkt przekroju nie doznaje uplastycznienia.

Oznacza to, że powierzchnia sprężysta dla materiału sprężysto-plastycznego określona jest, wobec (1.5), warunkiem

$$\varphi\Big[\sum_{r=1}^{m} Q_r a_{ij}^r(x) + s_{ij}(x)\Big] = k \tag{1.7}$$

w pewnym punkcie przekroju, a w pozostałych $\varphi < k$, przy czym $\varphi(\sigma_{ij}) = k$ jest warunkiem plastyczności, o którym zakłada się na ogół, że w przestrzeni stanów naprężenia ogranicza obszar wypukły, przy czym $\varphi = k$ tylko na brzegu. Z tego faktu wypukłości wypływa szereg ważnych własności powierzchni sprężystych.

Ze wzoru (1.7) widać, że powierzchnia sprężysta określona jest jednoznacznie przez podanie związanych z nią naprężeń $s_{ij}(x)$. Powierzchnię sprężystą dla $s_{ij}(x) = 0$, $x \in \xi$ nazywać będziemy dalej początkową powierzchnią sprężystą.

Wypukłość warunku plastyczności można analitycznie zapisać w sposób następujący, jeżeli $\varphi(\sigma_{ij}) < k$ i $\varphi(\tau_{ij}) \leqslant k$, to

$$\varphi[(\lambda\sigma_{ij} + (1-\lambda)\tau_{ij}] < k \quad \text{dla } 0 < \lambda \leqslant 1 \tag{1.8a}$$

oraz, jeżeli $\varphi(\sigma_{ij}) \leqslant k$ i $\varphi(\tau_{ij})) \leqslant k$, to

$$\varphi[\lambda\sigma_{ij} + (1-\lambda)\tau_{ij}] \leqslant k \quad \text{dla } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \tag{1.8b}$$

Pojęcie przekroju, sił uogólnionych i powierzchni sprężystej może być stosowane w przedstawionej wyżej postaci również w dwóch następujących skrajnych przypadkach:

A) Gdy przekrojami są wprost punkty konstrukcji; wtedy siłami uogólnionymi będą naprężenia, a powierzchnia sprężysta (jedyna) pokrywa się z warunkiem plastyczności $\varphi(\sigma_{ij}) = k$.

B) Za jedyny przekrój wziąć można całą konstrukcję. Wtedy, jeżeli obciążenia zewnętrzne dane są w postaci

$$\begin{aligned} T_i(x,t) &= \sum_{r=1}^{m} p_r(t) T_i^r(x), \\ F_i(x,t) &= \sum_{r=1}^{m} p_r(t) F_i^r(x), \end{aligned} \tag{1.9}$$

to jako siły uogólnione wziąć można parametry $p_1, p_2, \ldots, p_m$ (por. [11]), przy czym T_i oznaczają siły powierzchniowe, F_i — objętościowe.

2. Twierdzenia o dostosowaniu wyrażone w wielkościach uogólnionych

Podstawowymi twierdzeniami w teorii dostosowywania się ośrodka idealnie sprężysto-plastycznego do obciążeń zmieniających się dowolnie w danych granicach są twierdzenia Melana i Koitera (por. np. [6]) przytoczone poniżej. Twierdzenia te słuszne są ogólnie pod warunkiem, że funkcje opisujące stan naprężenia i odkształcenia nie zawierają osobliwości oraz że objętość rozpatrywanej konstrukcji jest skończona. Zatem przypadki koncentracji naprężeń, naroża lub lokalne plastyczne płynięcie muszą być wykluczone.

Twierdzenie Melana (1938). Dla dostosowania ciała potrzeba i wystarcza, aby istniało niezależne od czasu pole naprężeń resztkowych $\varrho_{ij}(x)$ takie, by dla dowolnych zmian obciążeń w danych granicach zachodziła nierówność

$$\varphi[\sigma^e_{ij}(x, t)+\varrho_{ij}(x)] < k, \tag{2.1}$$

przy czym $\sigma^e_{ij}(x, t)$ oznacza naprężenia w identycznym geometrycznie ciele idealnie sprężystym pod takimi samymi obciążeniami.

Twierdzenie Koitera (1956). Dla zaistnienia niebezpieczeństwa zniszczenia konstrukcji wskutek niedostosowania potrzeba i wystarcza, aby istniał taki cykl tzw. kinematycznie dopuszczalnych odkształceń plastycznych $\varepsilon_{ij}(x, t)$, aby zachodziła nierówność

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\int_V D_e dV dt \geqslant \int_{t_0}^{t_0+T}\int_V D(\dot{\varepsilon}_{ij}) dV dt, \tag{2.2}$$

gdzie D_e jest szybkością pracy sił zewnętrznych, D — dysypacją mocy odkształceń plastycznych, przy czym przez cykl kinematycznie dopuszczalnych odkształceń plastycznych rozumie się cykl taki, że

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j}+\Delta u_{j,i}); \qquad \Delta u_i = \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{u}_i dt \tag{2.3}$$

oraz że pole przemieszczeń u_i spełnia wymagane warunki brzegowe. Wyrażenie tego twierdzenia w wiekościach uogólnionych jest natychmiastowe.

Twierdzenie Koitera (dla konstrukcji). Dla zaistnienia niebezpieczeństwa zniszczenia przez niedostosowanie potrzeba i wystarcza, aby istniał cykl kinematycznie dopuszczalnych odkształceń uogólnionych $q_r(\xi, t)$ w przedziale czasu (t_0, t_0+T), taki, aby zachodziła nierówność

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\int_{\alpha} D_e d\alpha\, dt \geqslant \int_{t_0}^{t_0+T}\int_{\alpha} Q_r\dot{q}_r d\alpha\, dt. \tag{2.4}$$

Dla dowodu wystarczy wziąć pod uwagę definicję odkształceń uogólnionych daną wzorem (1.1).

Zastosowanie tak uogólnionego twierdzenia Koitera znaleźć można w pracach [13, 14].

Natomiast przy formułowaniu uogólnienia twierdzenia Melana skorzystamy z wprowadzonej definicji powierzchni sprężystych.

Twierdzenie Melana (dla konstrukcji). Dla dostosowania danej konstrukcji potrzeba i wystarcza, aby istniały stałe w czasie: pole resztkowych sił uogólnionych $Q^0_r(\xi)$ oraz dla każdego przekroju ξ konstrukcji, odpowiednia powierzchnia sprężysta S_ξ, takie że dla obciążeń zewnętrznych zmieniających się w przepisanych granicach pole sił wewnętrznych

$$Q_r^e(\xi, t) + Q_r^0(\xi) \tag{2.5}$$

mieściło się dla każdego przekroju ξ w odpowiedniej powierzchni sprężystej S_ξ. Tutaj Q_r^e oznacza pole sił uogólnionych w identycznej geometrycznie lecz idealnie sprężystej konstrukcji.

Dowiedziemy, że w granicach ścisłości teorii operującej wielkościami uogólnionymi twierdzenie to jest równoważne twierdzeniu Melana.

D o w ó d: a) Jeżeli zachodzi twierdzenie Melana, to istnieje rozkład naprężeń resztkowych $\varrho_{ij}(x)$ taki, że spełnione jest (2.1). Te naprężenia resztkowe możemy przedstawić w postaci

$$\varrho_{ij}(x) = \varrho_{ij}^0(x) + \bar{\varrho}_{ij}(x), \qquad x \in \xi, \tag{2.6}$$

gdzie $\Phi_r(\bar{\varrho}_{ij}(x)) = 0$. A zatem według (1.7) rozkład $\bar{\varrho}_{ij}(x)$ definiuje pewną powierzchnię sprężystą S_ξ. Pole sił uogólnionych

$$Q_r^0(x) = \Phi_r(\varrho_{ij}(x)) = \Phi_r(\varrho_{ij}^0(x))$$

spełnia warunki równowagi (1.6) dla $N_k = 0$, jest zatem resztkowym polem sił uogólnionych. Nierówność (2.1) stwierdza, że [wobec (1.7)] stan $Q_r^e + Q_r^0$, gdzie $Q_r^e = \Phi_r(\sigma_{ij}^e)$, znajduje się wewnątrz powierzchni sprężystej S_ξ, jak to jest wymagane przez uogólnione twierdzenie Melana.

b) Jeżeli prawdziwe jest twierdzenie uogólnione, to istnieje [wobec (1.7)] pewien stan $s_{ij}(x)$ taki, że

$$\Phi\Big[\sum_{r=1}^{m} (Q_r^e + Q_r^0) a_{ij}^r + s_{ij}\Big] \leqslant k \tag{2.7}$$

dla każdego $x \in \xi$ i dla każdego przekroju $\xi \in \alpha$, przy czym $\Phi_r(s_{ij}) = 0$. W ramach dokładności teorii w wielkościach uogólnionych pole $s_{ij}(x)$ jest polem naprężeń resztkowych, zaś $\varrho_{ij}^0 = \sum_{r=1}^{m} Q_r^0 a_{ij}^r$ stanowi pole również resztkowe, gdyż spełnia ono równania (1.6). Zatem suma $s_{ij} + \varrho_{ij}^0$ stanowi stan naprężeń resztkowych, jak tego wymaga twierdzenie Melana.

Teraz jasny staje się sposób stosowania tak uogólnionego twierdzenia Melana. Mianowicie zamiast poszukiwania pola samonaprężeń $\varrho_{ij} = \varrho_{ij}^0 + \bar{\varrho}_{ij}$ wymaganego wzorem (2.1), szukamy pola resztkowych sił uogólnionych Q_r^0 dla otrzymania członu ϱ_{ij}^0 (co odpowiada poszukiwaniu rozwiązania równania (1.6) dla $N_k = 0$) oraz dobieramy odpowiednie powierzchnie sprężyste (co odpowiada dobieraniu odpowiedniego członu $\bar{\varrho}_{ij}$). Zawieranie się sumy (2.5) w powierzchni sprężystej S_ξ dla każdego przekroju ξ daje nam wtedy spełnienie warunku (2.1) wymaganego przez twierdzenie Melana.

Metody poszukiwania resztkowych sił uogólnionych zależeć będą od formy równań równowagi w konkretnym rozpatrywanym problemie i trudno tu o jakieś uogólnienia.

Natomiast wypukłość warunku plastyczności oraz ewentualnie jego symetria względem znaku naprężeń pozwalają wysnuć pewne ogólne własności powierzchni sprężystych, które mogą być pomocne przy rozwiązywaniu problemów szczegółowych. Odpowiednie twierdzenia podano w rozdziale 3, a ich zastosowania do obliczeń praktycznych znaleźć można w pracach [18, 20].

3. Twierdzenia dotyczące powierzchni sprężystych

Powierzchnie sprężyste posiadają szereg własności, znajomość których jest pomocna przy rozwiązywaniu zagadnień szczegółowych. Niektóre z nich przedstawione zostaną poniżej.

Twierdzenie 1. Powierzchnia sprężysta ogranicza obszar wypukły.

Dowód: niech $P_1 = (Q_1^1, Q_2^1, \ldots, Q_m^1)$; $P_2 = (Q_1^2, Q_2^2, \ldots, Q_m^2)$ oznaczają dwa punkty na brzegu tego obszaru. Wtedy, w myśl (1.7)

$$\varphi\Big[\sum_{r=1}^{m} Q_r^1 a_{ij}^r + \varrho_{ij}\Big] \leqslant k \quad \text{i} \quad \varphi\Big[\sum_{r=1}^{m} Q_r^2 a_{ij}^r + \varrho_{ij}\Big] \leqslant k.$$

Wobec tego na podstawie (1.8) otrzymujemy

$$\varphi\Big[\lambda \sum_{r=1}^{m} Q_r^1 a_{ij}^r + (1-\lambda) \sum_{r=1}^{m} Q_r^2 a_{ij}^r + \varrho_{ij}\Big] \leqslant k, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

To zaś oznacza, że dowolny punkt należący do odcinka prostoliniowego o końcach P_1 i P_2 leży wewnątrz tej samej powierzchni sprężystej, co stwierdza wypukłość obszaru ograniczonego przez tę powierzchnię. Dowód tej własności (również dla materiału ze wzmocnieniem) przedstawił uprzednio Mróz [12].

Twierdzenie 2. Jeżeli $s_{ij}^1(x), s_{ij}^2(x)$, $x \in \xi$ określają dwie odpowiednie powierzchnie sprężyste S_1 i S_2, to obszar S_λ określony jako zbiór wszystkich punktów P^λ kształtu

$$P^\lambda = \lambda P^1 + (1-\lambda) P^2,$$

gdzie $P^1 \in S_1$, $P^2 \in S_2$, zaś $0 < \lambda < 1$ oznacza stałą, jest zawarty w powierzchni sprężystej S_3 określonej przez rozkład naprężeń

$$s_{ij}^3(x) = \lambda s_{ij}^1 + (1-\lambda) s_{ij}^2.$$

Dowód: z założeń

$$\varphi\Big[\sum_{r=1}^{m} P_r^1 a_{ij}^r + s_{ij}^1\Big] \leqslant k, \qquad \varphi\Big[\sum_{r=1}^{m} P_r^2 a_{ij}^r + s_{ij}^2\Big] \leqslant k;$$

stąd

$$\varphi\Big[\lambda \sum_{r=1}^{m} P_r^1 a_{ij}^r + (1-\lambda) \sum_{r=1}^{m} P_r^2 a_{ij}^r + \lambda s_{ij}^1 + (1-\lambda) s_{ij}^2\Big] = \varphi\Big[\sum_{r=1}^{m} P_r^\lambda a_{ij}^r + s_{ij}^3\Big] \leqslant k.$$

Twierdzenie 3. Niech obszary A_1, A_2 leżą odpowiednio wewnątrz powierzchni sprężystych S_1, S_2 i niech A_1 przystaje do A_2 poprzez ruch sztywny bez obrotu. Wtedy obszar $A = \lambda A_1 + (1-\lambda) A_2$, gdzie $0 < \lambda < 1$ jest stałą, przystający w ten sam sposób do A_1 i A_2 i położony między nimi, leży wewnątrz pewnej powierzchni sprężystej S.

Dowód wynika z twierdzenia 2, jeżeli położyć $P^1 \in A_1$, $P^2 \in A_2$. Wtedy obszar S_λ pokrywa się z obszarem A.

Twierdzenie 4. Jeżeli warunek plastyczności $\varphi(\sigma_{ij}) = k$ spełnia (1.8) oraz funkcja $\varphi(\sigma_{ij})$ jest parzysta względem naprężeń

$$\varphi(-\sigma_{ij}) = \varphi(\sigma_{ij}), \tag{3.1}$$

to wtedy dowolna powierzchnia sprężysta może być przez odpowiedni ruch sztywny bez obrotu zawarta w początkowej powierzchni sprężystej.

D o w ó d: niech $P^1 = (Q_1^1, Q_2^1, \ldots, Q_m^1)$; $P^2 = (Q_1^2, Q_2^2, \ldots, Q_m^2)$ oznaczają dwa punkty początkowej powierzchni sprężystej leżące na tej samej prostej przechodzącej przez początek układu. Wtedy wobec (3.1) musi być $Q_r^2 = -Q_r^1$, $r = 1, 2, \ldots, m$.

W każdym punkcie rozważanego przekroju $x \in \xi$ mamy

$$\varphi\Big[\sum_{r=1}^{m} Q_r^1 a_{ij}^r\Big] = \varphi\Big[\sum_{r=1}^{m} Q_r^2 a_{ij}^r\Big] \leqslant k, \tag{3.2}$$

przy czym istnieje punkt $x_0 \in \xi$, dla którego zachodzi równość.

Rozpatrzmy teraz taki sam obszar przesunięty o wektor Q_r^0 i niech $s_{ij}(x)$ oznacza pole naprężeń określające według (1.7) jakąś dowolną powierzchnię sprężystą. Niech $R_r^1 = Q_r^1 + Q_r^0$, $R_r^2 = Q_r^2 + Q_r^0$. Jeżeli co najmniej jeden z tych punktów R^1, R^2, powiedzmy R^1, leży wewnątrz tej powierzchni sprężystej, a drugi wewnątrz niej lub na brzegu, to wtedy dla każdego $x \in \xi$ musi, wobec (1.8), zachodzić

$$\varphi\Big[\sum_{r=1}^{m} (Q_r^1 + Q_r^0) a_{ij}^r(x) + s_{ij}(x)\Big] < k; \quad \varphi\Big[\sum_{r=1}^{m} (Q_r^2 + Q_r^0) a_{ij}^r(x) + s_{ij}(x)\Big] \leqslant k. \tag{3.3}$$

Ale wobec (3.2) możemy napisać

$$\varphi(\sigma_{ij}) = \varphi(-\sigma_{ij}) = k, \quad \text{gdzie} \quad \sigma_{ij} = \sum_{r=1}^{m} Q_r^1 a_{ij}^r(x). \tag{3.4}$$

Warunki (3.3) oznaczają, że

$$\varphi(\sigma_{ij} + \alpha_{ij}) < k, \quad \text{gdzie} \quad \alpha_{ij} = \sum_{r=1}^{m} Q_r^0 a_{ij}^r(x_0) + s_{ij}(x_0), \tag{3.5}$$

$$\varphi(-\sigma_{ij} + \alpha_{ij}) \leqslant k, \quad \text{tj.} \quad \varphi(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \leqslant k.$$

Z dwóch warunków (3.5) wynika dla $\lambda = 1/2$, że

$$\varphi\left[\frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \alpha_{ij}) + \frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})\right] = \varphi(\sigma_{ij}) < k,$$

co wraz z (3.4) stanowi sprzeczność. Zatem oba punkty R^1, R^2 muszą leżeć na brzegu lub na zewnątrz tej samej powierzchni sprężystej, a to dowodzi już twierdzenia.

Twierdzenie 5. Jeżeli program obciążenia określony jest przez układ nierówności

$$-\alpha_i p_i^s < p_i < p_i^s, \quad p_i^s > 0, \quad \alpha_i \geqslant -1, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.6}$$

gdzie p_i oznaczają współczynniki obciążenia jak we wzorach (1.9), to wtedy obszar dostosowania w przestrzeni współczynników p_i^s jest wypukły.

D o w ó d: jeżeli punkty $P^1 = (p_1^s, p_2^s, \dots, p_m^s)$; $P^2 = (p_1^{s'}, p_1^{s'}, \dots, p_m^{s'})$ należą do obszaru dostosowania, tzn. dana konstrukcja dostosowuje się do programu

$$-\alpha_i p_i^s < p_i < p_i^s$$

oraz do programu

$$-\alpha_i p_i^{s'} < p_i < p_i^{s'},$$

to wtedy według twierdzenia Melana istnieją dwa pola naprężeń resztkowych $\varrho_{ij}^1(x)$, $\varrho_{ij}^2(x)$ takie, że dla każdego punktu tej konstrukcji zachodzi

$$\tag{3.7} \begin{gathered} \varphi\Big[\sum_{r=1}^{m} \beta_r p_r^s \sigma_{ij}^r(x) + \varrho_{ij}^1(x)\Big] \leqslant k, \\ \varphi\Big[\sum_{r=1}^{m} \beta_r p_r^{s'} \sigma_{ij}^r(x) + \varrho_{ij}^2(x)\Big[\leqslant k, \end{gathered}$$

gdzie σ_{ij}^r oznaczają naprężenia sprężyste w konstrukcji dla $p_1 = p_2 = \dots = p_{r-1} = p_{r+1} = 0$, $p_r = 1$, zaś $\beta_r = 1$ lub $\beta_r = -\alpha_r$.

Warunki (3.7) zachodzą dla dowolnej kombinacji współczynników β_r. Wobec (1.8) otrzymujemy

$$\varphi\Big[\sum_{r=1}^{m} \beta_r(\lambda p_r^s + (1-\lambda)p_r^{s'})\sigma_{ij}^r + \lambda\varrho_{ij}^1 + (1-\lambda)\varrho_{ij}^2\Big] \leqslant k,$$

to zaś wskazuje, że punkt $P = \lambda P^1 + (1-\lambda)P^2$ należy do obszaru dostosowania.

Twierdzenie to wynika też jako wniosek z twierdzenia 1, jeżeli całą konstrukcję potraktować jako przekrój, jednakże autor sądzi, że czytelnika może zainteresować dowód nie korzystający z pojęcia powierzchni sprężystej.

Przykłady wykorzystania przytoczonych twierdzeń do efektywnego obliczania obszarów dostosowywania się płyt i ram znaleźć można w pracach [18, 20].

4. Powierzchnie sprężyste w przestrzeniach o mniejszej liczbie wymiarów

Powierzchnie graniczne, dla przypadku gdy niektóre z uogólnionych sił lub uogólnionych odkształceń znikają, były badane w pracy [10]. Stwierdzono tam, w oparciu o stowarzyszone prawo płynięcia, że:

1) jeżeli jedna z sił uogólnionych zeruje się, np. $Q_1 = 0$, to wtedy odpowiednią powierzchnię graniczną w podprzestrzeni $m-1$ wymiarowej otrzymuje się przez przecięcie oryginalnej powierzchni granicznej płyszczyzną $Q_1 = 0$;

2) jeżeli zeruje się jedno z odkształceń uogólnionych, np. $q_1 = 0$, wtedy $m-1$ wymiarowa powierzchnia graniczna jest rzutem powierzchni m-wymiarowej na płaszczyznę $Q_1 = 0$.

W przypadku powierzchni sprężystych w obu wypadkach nową $m-1$ wymiarową powierzchnię sprężystą otrzymuje się przez przecięcie płaszczyzną $Q_1 = 0$ w przypadku 1), zaś płaszczyzną $B_{1j}Q_j = 0$ w przypadku 2), pierwotnej m-wymiarowej powierzchni sprężystej. Związek $q_i = B_{ij}Q_j$ jest wyrażeniem prawa Hooke'a w wielkościach uogólnionych.

W rezultacie tej różnicy, dla pewnych przypadków otrzymać można sytuację, że pewna powierzchnia sprężysta w m-wymiarowej przestrzeni sił uogólnionych ma punkty wspólne z powierzchnią graniczną, nie będzie ich natomiast miała po przejściu do $m-1$ wymiarowej podprzestrzeni.

Literatura cytowana w tekście

1. M. GRÜNING, *Die Tragfähigkeit statisch unbestimmten Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung*, Springer, Berlin 1926.
2. H. BLEICH, *Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes*, Bauingenieur **13**, (1932), 261.
3. E. MELAN, *Die Spannungszustand eines Mises–Henkyscher Kontinuums bei verädlicher Belastung*, Sitz.-Ber. Ak. Wiss., Wien, Abt. IIa, **147**, (1938), 73.
4. E. MELAN, *Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums*, Ing. Archiv, **9**, (1938), 116–126.
5. W. T. KOITER, *A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures*, Proc. Kon. Nederl. Ak. Wet. B, **59**, (1956), 24–34.
6. W. T. KOITER, *General theorems for elastic-plastic solids*, Progress in Solid Mechanics, North Holland, Amsterdam 1960.
7. W. PRAGER, *Shakedown in elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature*, Mem. Symp. Plast. Sci. Constr., Varenna 1956, 239–244.
8. В.И. РОЗЕНБЛЮМ, *О приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел*, Изв. АН. СССР, ОТН, Мех. Маш., 1957, № 7, 136–138.
9. В.И. РОЗЕНБЛЮМ, *К анализу приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел*, ПМТФ, № 5, 1965, 98–101.
10. A. SAWCZUK, J. RYCHLEWSKI, *On yield surfaces for plastic shells*, AMS 1, **12**, (1960), 29–53.
11. P. G. HODGE, Jr, CHANG-KUEI SUN, *General properties of yield-point load surfaces*, J. Appl. Mech., March 1968, 107–110.
12. Z. MRÓZ, *On forms of constitutive laws*, AMS 1, **18**, (1966).
13. A. SAWCZUK, *On incremental collapse of shells under cyclic loading*, Proc. IUTAM Symp. Theory of Thin Shells (Copenhagen 1967) Springer, Berlin 1969, 328–340.
14. A. SAWCZUK, *Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shells*, J. Mech. Phys. Solids, No 4, (1969).
15. P. G. HODGE Jr, A. J. KALINOWSKI, *Shakedown interaction curve for a circular arch*, DOMITT Rep. No 1–36, August 1967.
16. J. A. KÖNIG, *Theory of shakedown of elastic-plastic structures*, AMS 2, **18**, (1966), 227–238.
17. J. A. KÖNIG, *A shakedown theorem for temperature dependent elastic moduli*, Bull. Ac. Pol., Ser. Sci. Techn., **17**, 3 (1969), 161–165.
18. J. A. KÖNIG, *Shakedown theory of plates*, AMS, 5, **21**, (1969), 623-637.
19. J. A. KÖNIG, *Shakedown of strainhardening structures*, ZAMP (w druku).
20. J. A. KÖNIG, *Shakedown of frames and arches with arbitrary cross-sections*, (w przygotowaniu).

Резюме

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИСПОСОБЛИВАЕМОСТИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ К ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ВО ВРЕМЕНИ НАГРУЗКАМ

В работе [18] продемонстрирован метод, по возможности наиболее точного, применения теоремы Мелана о приспособливаемости, в тех случаях, когда теория рассматриваемой конструкции выражается через обобщенные величины, и введено понятие упругой поверхности, с помощью кото-

рого теорема формулировалась соответствующим образом обобщенном виде. В настоящей работе сведены те свойства выше упомянутых поверхностей, которые могут найти прикладное применение.

Summary

BASIC THEOREMS ON SHAKEDOWN OF ELASTIC-PLASTIC STRUCTURES UNDER TIME-DEPENDENT LOADINGS

Paper [18] presented how to apply the Melan theorem when the theory of structures considered is formulated in terms of generalized stresses and generalized strains. There the notation of elastic locus has been introduced to express the appropriate generalized theorem. Some essential properties of these elastic loci which may be useful in applications to particular groups of structures are collected in the present paper.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 czerwca 1969 r.