

ZAGADNIENIA PLASTYCZNEJ ANALIZY POWŁOK¹⁾
(KIERUNKI BADAŃ W POLSCE W DZIESIĘCIOLECIU 1960-1969)

MAREK JANAS, ANTONI SAWCZUK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Analiza plastyczna konstrukcji stanowi obecnie dobrze rozwiniętą dziedzinę studiów. Niektóre jej działy rozwinęły się jako zamknięte teorie posługujące się własnymi metodami analizy. W zakresie teorii powłok plastycznych szereg zagadnień można traktować obecnie jako klasyczne; wśród nich wymienić należy:

1) nośność graniczną, czyli analizę początkowego płynięcia sztywno-plastycznych powłok zbudowanych z materiałów metalo-podobnych;

2) analizę małych odkształceń sprężysto-plastycznych poprzedzających plastyczne płynięcie.

Szczegółowe omówienie równań opisujących te problemy znaleźć można w pracy [61] lub w monografiach [8, 11, 58, 59]; tutaj potraktujemy je marginesowo. Nasza uwaga skupia się raczej na problemach wybiegających poza zakres zagadnień klasycznych, a mianowicie, na takich zagadnieniach, jak:

3) nośność graniczna konstrukcji złożonych, np. zbrojonych lub zbudowanych z materiałów o różnych własnościach przy ściskaniu i rozciąganiu;

4) stany pokryteczne konstrukcji sztywno-plastycznych i sprężysto-plastycznych; to zagadnienie sprowadza się do analizy dużych odkształceń płyt i powłok;

5) analiza dostosowania się, czyli zachowania się konstrukcji przy obciążeniach powtarzalnych.

Z uwagi na analogię w metodach analizy powłok i konstrukcji płytowo-tarczowych, przegląd obejmuje wyniki dotyczące także tych ostatnich konstrukcji. Wyłączone z przeglądu są problemy kształtowania plastycznego, obliczania zbiorników grubościennych i większość zagadnień lepko-sprężysto-plastycznych. Dane bibliograficzne dotyczące zagadnień wykraczających poza tak określone ramy znaleźć można w pracy przeglądowej ŻYCKOWSKIEGO [99]. Omówieniu stanu aktualnego i kierunków rozwoju teorii powłok plastycznych, jednak ze zwróceniem uwagi na prace radzieckie, poświęcony jest przegląd RYCHLEWSKIEGO i SZAPIRO [71]. Badania w zakresie plastycznego formowania powłok omówił SZCZEPIŃSKI w pracach [91, 92] oraz w książce [93].

¹⁾ Praca przygotowana na kolokwium IASS «Progress in shell structures in the last 10 years and its future development», Madryt 1969.

Dla jasności przedstawimy na wstępie zasady analizy plastycznej. Pełny układ równań problemów plastyczności zawiera:

- 1) warunek plastyczności przedstawiony w przestrzeni naprężeń przez wypukłą powierzchnię zamkniętą;
- 2) prawo płynięcia, czyli prawo chwilowego ruchu elementów uplastycznionych; zwykle przyjmowane jest ono w postaci stowarzyszonego prawa płynięcia;
- 3) równania ruchu;
- 4) związki kinematyczne opisujące prędkości odkształcenia w zależności od prędkości ruchu lub odkształcenia w zależności od przemieszczeń.

Rozwiązanie problemu brzegowego podaje rozkład naprężeń i prędkości przemieszczeń zgodne z warunkami na podporach. Ponieważ ścisłe rozwiązanie tak postawionego problemu jest rzadko osiągalne, rozwinęły się pewne sposoby przybliżone. Szczególnie przydatne okazują się tu metody teorii stanów granicznych. Opierają się one na dwóch podstawowych twierdzeniach pochodzących od GWOZDIEWA [5], HILLA [6] oraz DRUCKERA, GREENBERGA i PRAGERA [1] i pozwalają wyznaczać górne i dolne oszacowania nośności. Kinematycznie dopuszczalne rozwiązania pomijają warunki statyczne i dają oszacowania od góry, podczas gdy rozwiązania statycznie dopuszczalne spełniają tylko równania równowagi i warunek plastyczności.

Różne aspekty zastosowania metod przybliżonych opartych na powyższych zasadach zostaną omówione w rozdziałach 3 i 4.

2. Powierzchnie graniczne

Aby mogło nastąpić nieograniczone płynięcie powłoki z materiału sprężysto-plastycznego lub aby powstać mogły jakiegokolwiek odkształcenia powłoki sztywno-plastycznej, cały przekrój powłoki ulec musi uplastycznieniu. Jednakże warunek plastyczności określany jest zwykle przy pomocy naprężeń i dotyczy izolowanego punktu w przekroju poprzecznym powłoki. Dla potrzeb analizy powłok warunek ten musi być odpowiednio przekształcony, czyli wyrażony przy pomocy sił wewnętrznych związanych z określonym punktem powierzchni środkowej. Taką transformację warunku plastyczności z przestrzeni naprężeń do przestrzeni sił ułatwiają założenia o prostych normalnych i o prawie płaskim stanie naprężenia. Dzięki temu deformację dowolnej warstwy opisać możemy przy pomocy sześciu parametrów odkształcenia: zmian krzywizny κ_{ij} i odkształceń powierzchni środkowej λ_{ij} . Stąd określić możemy, dla danych prędkości odkształceń, stan naprężeń w całym przekroju poprzecznym, korzystając z warunku normalności wektora płynięcia do powierzchni granicznej, czyli ze stowarzyszonego prawa płynięcia. Naprężenia mogą być więc określone przy pomocy sześciu parametrów κ_{ij} i λ_{ij} . Po scałkowaniu naprężeń po grubości powłoki otrzymujemy siły osiowe N_{ij} i momenty M_{ij} ; one także zależą od wymienionych sześciu parametrów kinematycznych. Należy zaznaczyć, że dzięki założeniu o prostych normalnych siły poprzeczne nie wchodzą do tego przekształcenia. Okazuje się, że warunek symetrii sił osiowych i momentów równoważny jest założeniu o małej grubości powłoki w porównaniu z promieniami krzywizn.

Otrzymane wyrażenia na siły wewnętrzne są jednorodne i zerowego stopnia ze względu na prędkości odkształceń. Dlatego jedynie pięć parametrów może być niezależnych. Eliminując te parametry z sześciu równań otrzymujemy hiperpowierzchnię w sześciowymiarowej przestrzeni sił osiowych N_{ij} i momentów M_{ij}

$$(2.1) \quad F(N_{ij}, M_{ij}) = 0, \quad (i, j = 1, 2).$$

Ta hiperpowierzchnia jest nazywana powierzchnią graniczną. Można też określić powierzchnię graniczną w postaci (2.1) zupełnie bez operowania naprężeniami, a traktując powłokę jako dwuwymiarową przestrzeń zakrzywioną. Taka procedura zastosowana została dla płyt w pracach [81, 82].

W teorii plastyczności szeroko stosuje się wprowadzone przez PRAGERA [17] pojęcie uogólnionych zmiennych (patrz także [7]). Występują tu uogólnione naprężenia Q_i , odkształcenia q_i i prędkości odkształceń \dot{q}_i . Wybór uogólnionych zmiennych nie jest jednoznaczny. Jeśli jako naprężenia uogólnione przyjmujemy siły wewnętrzne powłoki N_{ij} i M_{ij} , odpowiednie uogólnione prędkości odkształceń określone są przez tożsamościową zależność opisującą prędkość rozpraszania energii wewnętrznej

$$(2.2) \quad D = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_A Q_i \dot{q}_i dA \equiv \int_A (M_{ij} \dot{\kappa}_{ij} + N_{ij} \dot{\lambda}_{ij}) dA,$$

gdzie V oznacza całkowitą objętość ciała, zaś A — całkowitą powierzchnię środkową powłoki.

Okazuje się, że stowarzyszone prawo płynięcia zachodzi także i dla zmiennych uogólnionych. Dlatego uogólnione prędkości odkształceń mogą być otrzymane z (2.1) przy pomocy zależności potencjalnej

$$(2.3) \quad \dot{\lambda}_{ij} = \nu \frac{\partial F}{\partial N_{ij}}, \quad \dot{\kappa}_{ij} = \nu \frac{\partial F}{\partial M_{ij}},$$

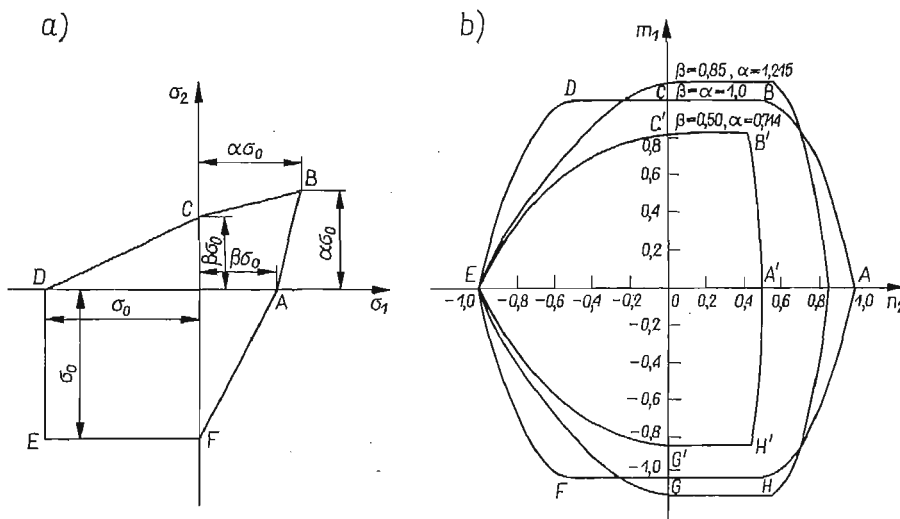
gdzie, zgodnie z zasadą o nieujemności dysypacji energii w czasie plastycznego płynięcia, skalarny mnożnik ν jest nieujemny.

Warunek plastyczności (2.1) można zapisać przy pomocy składowych stanu naprężenia, choć nie wszystkie te składowe są wielkościami uogólnionymi w rozumieniu definicji (2.2). Z drugiej strony, niewystępowanie niektórych składowych w warunku plastyczności nie musi oznaczać znikania odpowiadających im składowych prędkości odkształceń. Te składowe stają się wówczas *reakcjami kinematycznymi*.

Dla poprawnego formułowania teorii przybliżonych niezbędną okazuje się analiza własności geometrycznych powierzchni granicznych. Dyskusję takich własności dla materiałów spełniających warunki plastyczności Hubera–Misesa i Treski przeprowadzili SAWCZUK i RYCHLEWSKI [88]. Badali oni powłoki pełnościennie i sandwiczowe i wykazali, że powierzchnie graniczne uzyskane dla poszczególnych typów powłok są rzutami lub przecięciami ogólnej hiperpowierzchni opisanej w wielowymiarowej przestrzeni sił wewnętrznych. Duża liczba wymiarów jest jedną z głównych trudności w operowaniu powierzchniami granicznymi, dlatego celowe staje się dążenie do zmniejszenia tej liczby. Jedną z możliwych dróg postępowania jest wprowadzenie nowych zmiennych uogólnionych będących kombinacjami sił wewnętrznych; takie podejście było omawiane przez RYCHLEWSKIEGO [70].

Plastycznie anizotropowe powłoki otrzymuje się bądź przez zastosowanie materiałów anizotropowych (anizotropowe kontinuum), bądź przez takie rozmieszczenie materiału izotropowego, że powłoka uzyskuje własności zależne od kierunku (np. powłoki faliste, zbrojone czy żebrowane). Te dwa typy anizotropii zwane są zwykle *fizycznym* oraz *technicznym* lub *konstrukcyjnym*. Oba typy anizotropii dają inne równania powierzchni granicznej. Różnice te omawiane były przez MROZA [53] oraz w pracy [73].

Powłoki zbudowane z plastycznie nieizotropowego ośrodka ciąglego (anizotropia fizyczna) analizowało wielu badaczy. Dla materiałów spełniających warunek Hubera–Misesa (OLSZAK i URBANOWSKI [14]) powierzchnię graniczną podano w [74]. Podobne wyniki, ale dla warunku HILLA [6], otrzymał MIKELADZE [13]. Dyskusję własności powierzchni



Rys. 1. a) Warunek plastyczności dla różnych granic plastyczności przy ściskaniu i rozciąganiu przedstawiony w przestrzeni naprężeń głównych, b) powierzchnia graniczna dla kołowych powłok walcowych [72]

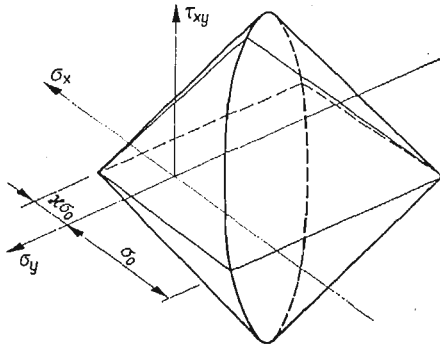
granicznych dla odcinkowo liniowych warunków plastyczności przeprowadzono w pracach [20, 58]. Powierzchnię graniczną dla żebrowanych powłok walcowych podali BIRON i SAWCZUK [22].

W przypadku materiałów, dla których obowiązują inne warunki plastyczności niż Hubera–Misesa i Treski, problem budowy powierzchni granicznych jest bardziej złożony. Przed zastosowaniem przedstawionej powyżej procedury należy określić odpowiedni warunek plastyczności. SANKARANARAYANAN i OLSZAK [72] przyjęli dla płaskiego stanu naprężenia warunek opisany w przestrzeni naprężeń głównych przez nieregularny sześciokąt. Na rys. 1 pokazano uzyskaną przez nich powierzchnię graniczną dla powłoki walcowej zbudowanej z materiału o różnych granicach plastyczności przy rozciąganiu i ściskaniu.

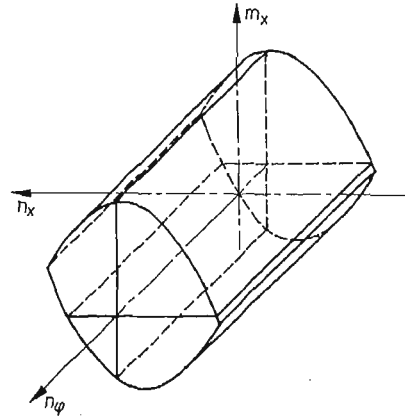
Cechy powierzchni granicznych zbudowanych z materiałów *znakoczulych* (np. beton) zasługują na specjalną uwagę. Dla materiałów charakteryzujących się w płaskim stanie naprężenia trzema granicami plastyczności: σ_c — przy ściskaniu, $\sigma_t = \kappa\sigma_c$ — przy rozcią-

ganiu i $\sigma_s = \theta \sigma_c$ — przy maksymalnym ścinaniu, można przyjąć (przy $\kappa \ll 1$), warunek maksymalnych naprężeń normalnych. Taki warunek, pokazany na rys. 2, zastosowano w pracy [30] do wyznaczenia powierzchni granicznej dla powłok niesymetrycznych.

W przypadku przekrojów niejednorodnych (wielowarstwowych lub zbrojonych), przy całkowaniu naprężeń po grubości przekroju należy uwzględnić zmienność warunku plastyczności [35]. Szczególnie ważny jest tu przypadek żelbetu. Dla żelbetowych płyt zbrojonych ortogonalnie przyjmuje się na ogół warunek *kwadratowy* lub *prostokątny*, chociaż niektórzy autorzy (np. KWIECIŃSKI [44–47]) podają inne propozycje. Jeśli pominąć wytrzymałość betonu na rozciąganie, to cały przekrój żelbetowy może być traktowany jako spełniający



Rys. 2. Warunek największych naprężeń głównych dla materiałów znakoczulych [30]



Rys. 3. Powierzchnia graniczna dla żelbetowego zbiornika walcowego [86]

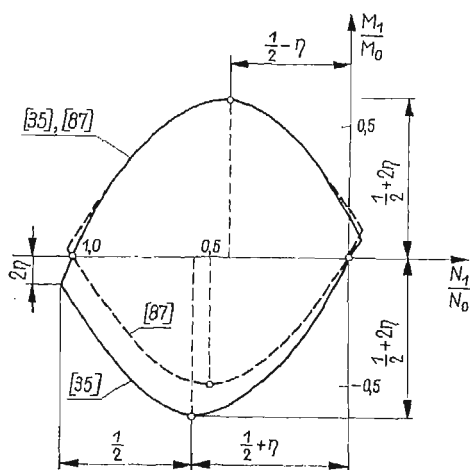
warunek największych naprężeń normalnych (rys. 2). Mamy wówczas $\kappa = 0$ w betonie oraz $\kappa = 1$ w warstwach zbrojenia. Dla zbrojenia rozłożonego symetrycznie w co najmniej dwóch warstwach, dobre przybliżenie daje przyjęcie przekroju jednorodnego z odpowiednio dobranymi zastępczymi granicami plastyczności przy ścisaniu i rozciąganiu (JANAS, KÖNIG [35]).

Przy kwadratowym warunku plastyczności siły wewnętrzne w jednym kierunku głównym nie zależą w stanie plastycznym od sił w drugim kierunku. Wobec tego powierzchnię graniczną w przestrzeni głównych sił uogólnionych można przedstawić w postaci dwóch niezależnych krzywych w płaszczyznach $M_1 N_1$ i $M_2 N_2$. Podejście oparte na tej własności było zastosowane przez MROZA [53, 56] oraz SAWCZUKA i OLSZAKA [87]. Dla powłok walcowych powierzchnia graniczna uzyskana przy pominięciu zbrojenia ściszanego podana została przez SAWCZUKA i KÖNIGA [86] i przedstawia sobą skończony walec paraboliczny (rys. 3) w przestrzeni siły obwodowej N_θ oraz osiowego momentu M_x i siły N_x .

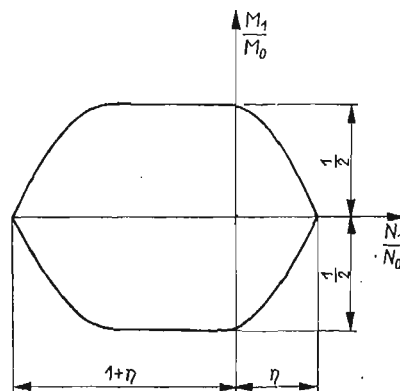
Założenie o niezależności uplastycznienia w każdym z kierunków głównych może być wykorzystane także i w przypadku odkształceń nie spełniających warunku obrotowej symetrii. Mamy wówczas powierzchnię graniczną dla każdego z kierunków głównych identyczną z zależnością dla prostokątnych prętów obciążanych mimośrodowo. Odpowied-

nie krzywe graniczne dla różnych rodzajów przekrojów podano w pracy [32]. Na rys. 4 pokazano ogólną krzywą graniczną dla przekroju podwójnie zbrojonego; linia przerywana przedstawia uproszczoną zależność [87] pomijającą zbrojenie ściskane. Na rys. 5 pokazano krzywą graniczną dla jednowarstwowego zbrojenia ułożonego w środku przekroju [55].

Pewne uproszczenia powierzchni granicznych wprowadzić można w szczególnych rozpatrywanych przypadkach. MRÓZ i XU-BING-YE [57] zaproponowali wygodne uprosz-



Rys. 4. Krzywa graniczna dla podwójnie zbrojonego przekroju żelbetowego [35]



Rys. 5. Krzywa graniczna dla symetrycznego, pojedynczo zbrojonego przekroju żelbetowego

czenie powierzchni uzyskanej przez ONATA i PRAGERA [16] dla powłok obrotowo symetrycznych spełniających warunek Treski. Przybliżone powierzchnie graniczne stosuje się niemal we wszystkich rozwiązaniach zagadnień z dużymi odkształceniami powłok.

3. Nośność graniczna

Głównym problemem teorii stanów granicznych jest określenie obciążenia niszcącego. Uzyskane dotychczas rozwiązania problemów brzegowych dla początkowego plastycznego płynięcia dotyczą niemal wyłącznie przypadków obrotowej symetrii (szczegóły — patrz HODGE [8]). Dużą liczbę wyników przytoczyli MASSONNET i SAVE [11] oraz OLSZAK i SAWCZUK [61].

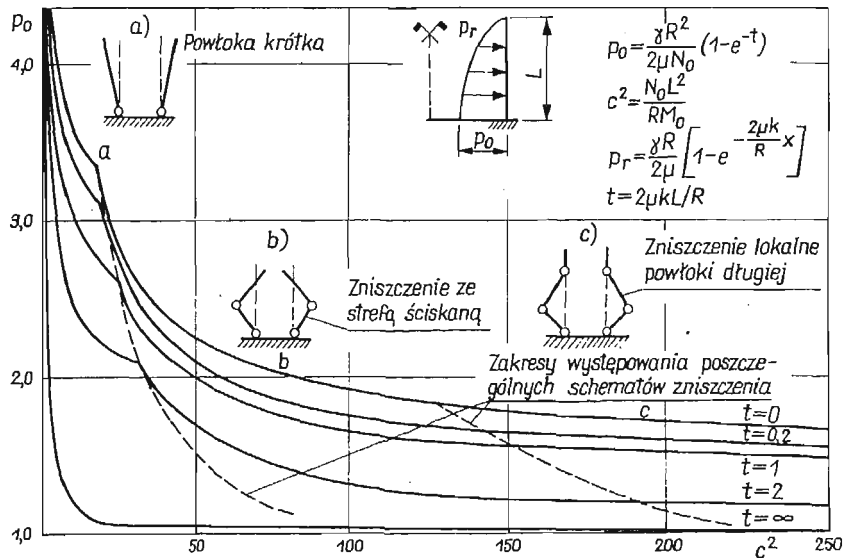
Ścisłe rozwiązania oraz górne i dolne oszacowania nośności metalowych kopuł sferycznych uzyskane zostały przez MROZA i XU BING-YE [57] przy odpowiednio uproszczonej powierzchni granicznej dla materiału Treski. KÖNIG [40] porównał pola prędkości w stanie zniszczenia powłok walcowych dla dwóch różnych praw płynięcia: dla prawa potencjalnego (2.3) i dla pewnego prawa niestowarzyszonego. BIRON i SAWCZUK [22] zaproponowali metodę całkowania równań opisujących stan graniczny powłok żebrowanych i podali pewne rozwiązania dla przypadku powłok walcowych. Porównanie analizy plastycznej

powłoki walcowej przy różnych powierzchniach granicznych przeprowadzone zostało przez SAWCZUKA i HODGE'A [85]. Wynika zeń, że pola naprężeń i prędkości przemieszczeń zależą wyraźnie od przyjętego warunku plastyczności, podczas gdy ciśnienie niszczące zmienia się w mniejszym stopniu.

Kompletne rozwiązania zadań nośności granicznej dla przypadków nie spełniających warunku obrotowej symetrii są bardzo rzadkie. Wymienić tu należy pracę RYCHLEWSKIEGO [69] dotyczącą powłok helikoidalnych, gdzie główną uwagę poświęcono mechanizmom zniszczenia.

W ogólnym przypadku, gdy równania opisujące problem nośności granicznej rzeczywiście zależą od dwóch współrzędnych, stosowane być muszą metody oszacowania nośności od góry i od dołu. MROWIEC i ŻYCZKOWSKI [51, 52] podali oszacowania dolne dla nośności rurociągu poddanego zginaniu i ciśnieniu wewnętrznemu. Metody oszacowania nośności od góry omówione zostaną w następnym rozdziale.

Odształcenia sprężysto-plastyczne badane były przez KÖNIGA [39], który podał ogólne wyrażenia opisujące przemieszczenia. KÖNIG i KLEPACZKO [43] badali teoretycznie i doświadczalnie wpływ zamocowania brzegów powłoki walcowej na pola naprężeń w fazie poprzedzającej wyboczenie.



Rys. 6. Obciążenia graniczne dla silosów żelbetowych [86]

Metody poszukiwania rozwiązań kompletnych pokrewne są metodom stosowanym w projektowaniu optymalnym. Optymalne projektowanie konstrukcji plastycznych polega na określaniu ich wymiarów przy pewnych dodatkowych warunkach dotyczących funkcji kosztów (np. objętość materiału, koszty wykonania itp.). W tej dziedzinie prace MROZA [54-56] wnoszą duży wkład dotyczący twierdzeń podstawowych oraz konkretnych rozwiązań dla powłok zbrojonych. ŁUKASIEWICZ [48] rozpatrywał obrotowo-symetryczne powłoki zbliżone kształtem do stożkowych, zbudowane z materiału spełniającego warunek

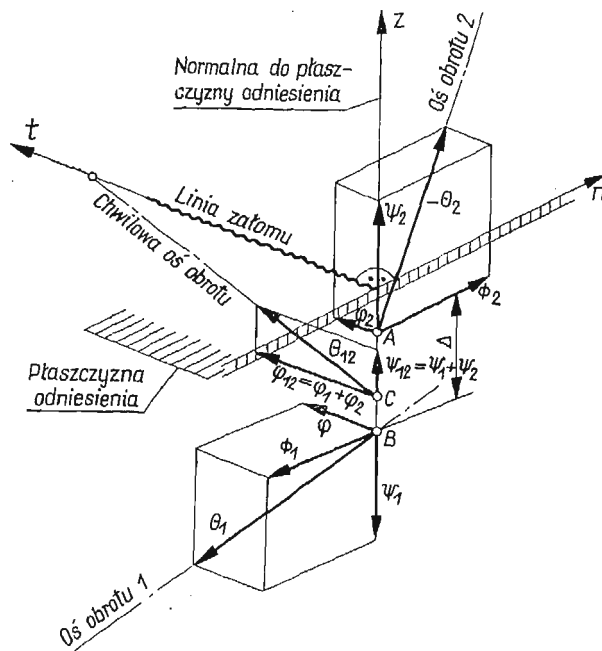
Treski. Warunek jednakowego wyężenia całej konstrukcji w stanie błonowym pozwolił na określenie optymalnego kształtu i grubości powłoki.

Dobrze rozwiniętą dziedziną teorii stanów granicznych dysponującą szeregiem kompletnych, zamkniętych rozwiązań jest analiza powłok żelbetowych. Rozwiązanie dla walcowego zbiornika poddanego ciśnieniu wewnętrznemu podali SAWCZUK i OLSZAK [87], zaś SAWCZUK i KÖNIG [86] rozważali przypadek wykładniczo narastającego ciśnienia. Jedyne dla niektórych schematów zniszczenia obciążenie graniczne wyraża się w postaci zamkniętej; w innych przypadkach rozwiązanie określa układ równań przestępnych. Na rys. 6 podano wykres ciśnienia p_0 w zależności od parametru geometrycznego $c^2 = N_0 L^2 / RM_0$, gdzie N_0 i M_0 oznaczają moduły plastyczne. Wykresy są podane dla różnych wartości parametru $t = 2\mu kL/R$ (μ jest współczynnikiem tarcia o ścianki, k — współczynnikiem tarcia wewnętrznego, γ — ciężarem objętościowym materiału). Przypadki szczególne $\mu = 0$, $k = 1$ oraz $k \rightarrow \infty$ dają odpowiednio ciśnienia: hydrostatyczne i równomierne.

MRÓZ [53] uzyskał rozwiązania kompletne dla żelbetowej kopuły, dla ściętego stożka i dla walca, przy zastosowaniu zlinearyzowanej krzywej granicznej.

4. Metoda kinematyczna

Z wyjątkiem przypadków symetrii obrotowej kompletne rozwiązania zagadnień analizy plastycznej są rzadko osiągalne. Dlatego podejście dające górne oszacowania nośności przyciąga szczególną uwagę. Wśród pierwszych prac stosujących tę metodę do powłok niesymetrycznych wymienić należy wyniki FIAŁKOWA [2] i RŻANICYNA [18]. Ten ostatni

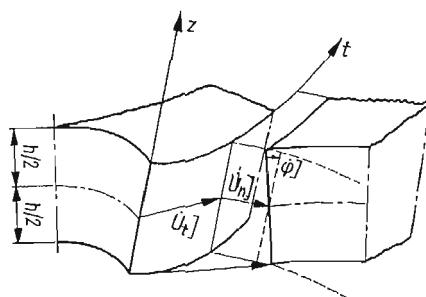


Rys. 7. Zależności kinematyczne w uogólnionym przegubie plastycznym [37]

zastosował w przypadku powłok pojęcie linii załomu wprowadzone przez JOHANSENA [9] dla płyt.

Eksperymentalne i teoretyczne studium dotyczące podstaw teorii linii załomów dla żelbetowych powłok walcowych podano w pracy [75]. W pracy [28] rozpatrzono mechanizmy zniszczenia odpowiadające obrotom sztywnych płyt względem przestrzennego układu osi. Dla takich mechanizmów w przegubach plastycznych występują ścinania w płaszczyznach stycznych do powłoki i linie *skupionych odkształceń* nie pokrywają się z głównymi kierunkami odkształceń.

Pojęcie takich *uogólnionych przegubów plastycznych* wyjaśnione jest na rys. 7 i 8. Rysunek 7 podaje wektorowe przedstawienie chwilowego ruchu dwóch sztywnych płyt



Rys. 8. Nieciągłości przemieszczeń w uogólnionym przegubie plastycznym [35]

płaskiej konstrukcji. Na linii dzielącej płyty występują nieciągłości kąta obrotu oraz normalnych i stycznych przemieszczeń płaszczyzny środkowej, które są odpowiednio równe

$$(4.1) \quad \dot{\varphi}] = \varphi_{12}, \quad \dot{U}_n] = t\psi_{12}, \quad \dot{U}_t] = \Phi_1 \Delta = \Phi_2 \Delta.$$

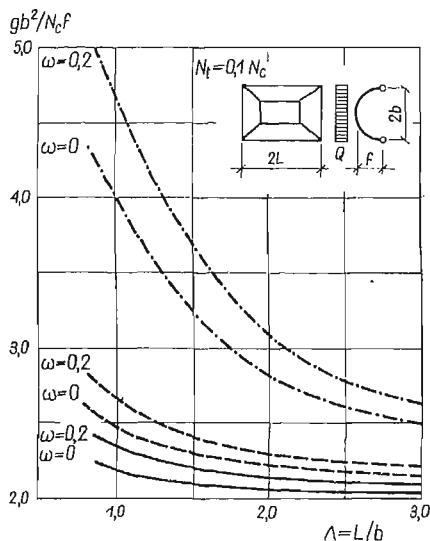
Jak pokazuje rys. 8, nieciągłości te dają *skupione odkształcenia*. Są one nowymi uogólnionymi prędkościami odkształceń: krzywizną — $\bar{\kappa}_{nn} = \dot{\varphi}]$, osiowym odkształceniem normalnym $\bar{\lambda}_{nn} = \dot{U}_n]$ i odkształceniem postaciowym na powierzchni środkowej $\bar{\lambda}_{nt} = \dot{U}_t]$. Obliczenie dysypacji energii jest wówczas pracochłonne, lecz uzyskane na tej drodze górne oszacowania nośności mogą dawać znacznie niższe wartości w porównaniu z wynikami opartymi na prostej teorii linii załomów, jak np. w pracy [18]. Na rys. 9 podano górne oszacowania nośności małowyniosłego przekrycia walcowego uzyskane w pracy [29] dla różnych wielkości parametrów stosunków *długość–szerokość* $\Lambda = L/b$ i *grubość–wyniosłość* $\omega = h/f$. Przedstawione wyniki dotyczą wytrzymałości przekroju przy osiowym rozciąganiu N_t równej 10% wytrzymałości przy ściskaniu N_c . Linie ciągłe oznaczają omawiane rozwiązanie, zaś linie przerywane odpowiadają rozwiązaniu przybliżonemu opartemu na warunku plastyczności w postaci ośmiościanu opisanego na pokazanych na rys. 1 stożkach. Linie osiowe przedstawiają wyniki dla uproszczonej teorii linii załomów.

Podójście podobne do omówionego powyżej zastosowane zostało w pracy [37] do analizy łukowych zapór żelbetowych. Szereg ważnych wzorów na dysypację energii w uogólnionych przegubach plastycznych podany został przez JANASA i KÖNIGA w pracy [35]. W przypadku, gdy udział energii pochłoniętej przez odkształcenia giętne jest mały w porównaniu

z całą energią rozpraszaną w procesie odkształcenia plastycznego, wyrazi się ona wzorem

$$(4.2) \quad D = \frac{N_c}{2} \left\{ \left(1 + 2 \sum_i \eta_i \right) \sqrt{\dot{U}_n^2 + \dot{U}_r^2} - \dot{U}_n \right\}.$$

Intensywność i -tej warstwy zbrojenia oznaczono przez η_i , N_c oznacza wytrzymałość przekroju betonowego na ściskanie, zaś nieciągłości \dot{U}_n i \dot{U}_r objaśnia wzór (4.1) i rys. 8. W [35] podano przykłady liczbowe górnych oszacowań nośności dla przekryć walcowych, paneli o podwójnej krzywiznie i dla tarczownic.



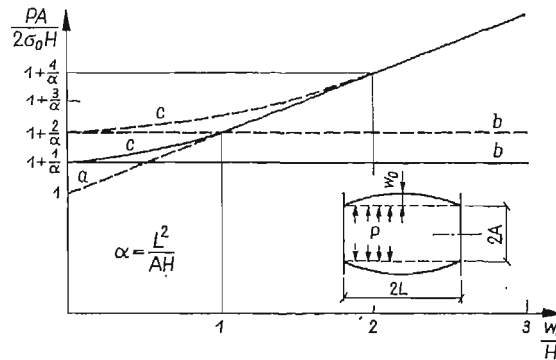
Rys. 9. Obciążenia graniczne dla małowyniosłego przekrycia walcowego [29]

Mechanizmy zniszczenia realizujące się poprzez powstanie układu linii załomów badane były w pracach [31, 38]. Wykazano tam, że jeśli przy różnoimiennym zginaniu momenty graniczne są różne, to powierzchnia środkowa musi doznawać odkształceń nawet w przypadku czystego zginania. Jeśli więzy poprzeczne przeciwstawiają się powstaniu takich odkształceń, to od samego początku procesu deformacji występują także i w płytach siły osiowe (efekt tarczowy). Płyty zachowują się wtedy nawet przy małych odkształceniach jak powłoki, czy tarczownice. Okazuje się, że klasyczna teoria linii załomów jest wówczas kinematycznie niedopuszczalna i niezbędne jest wprowadzenie do niej omówionego poprzednio pojęcia uogólnionych przegubów plastycznych.

5. Duże ugięcia

Studia z zakresu dużych odkształceń plastycznych przyciągają wciąż wzrastające zainteresowanie ze względu na ich znaczenie przy określaniu rzeczywistego współczynnika bezpieczeństwa konstrukcji. Efekty wzmocnienia geometrycznego badane są bądź w fazie niewielkich ugięć jako tzw. *stany pokrytyczne*, bądź dla bardzo zaawansowanych odkształceń plastycznych, gdy powłoki i płyty zachowują się jak membrany.

Teoria niewielkich, skończonych ugięć zakłada małość odkształceń, a więc pomija zmiany grubości powłoki. Natomiast kąty obrotu odkształconej powierzchni środkowej wpływają na postać równań równowagi i zależności kinematycznych. Teorię tego typu dla idealnie plastycznych powłok rozwinęła DUSZEK [23] i zastosowała do badania *stanów pokrytycznych* konstrukcji sztywno-plastycznych. Ze swej przybliżonej teorii otrzymała ona zależności między obciążeniem i ugięciem w przejściowej fazie między początkowym plastycznym płynięciem i czysto membranowym stanem dla obciążonych równomiernym ciśnieniem zbiorników walcowych o różnych warunkach podparcia krawędzi [23, 24, 26]. Okazuje się, że walec przechodzi w stan czysto membranowy już dla ugięć rzędu grubości powłoki. Pokazano to na rys. 10 dla przegubowego podparcia (linie ciągłe) i dla pełnego zamocowania krawędzi (linie przerywane). Przy tych samych założeniach DUSZEK otrzymała w pracach [25, 27] wyniki dla małowyniosłych kopuł.



Rys. 10. Zależności między obciążeniem i przemieszczeniem dla powłok walcowych obciążonych ciśnieniem równomiernym [24]; *a* — rozwiązanie błonowe, *b* — teoria małych przemieszczeń, *c* — przybliżona teoria dla skończonych przemieszczeń

Przy większych odkształceniach konieczne jest podejście dokładniejsze niż pozwala na to teoria Kármána. Stosując współrzędne Lagrange'a, WASZCZYŹYŃ [95] zbudował uściślone równania dla teorii małych odkształceń i dużych ugięć powłok obrotowo-symetrycznych. Równania te wykorzystał przy rozwiązywaniu zagadnień w oparciu o teorię odkształceń sprężysto-plastycznych. Obliczenia numeryczne zilustrowane zostały przykładem małowyniosłego stożka ściętego.

ORKISZ zastosował w swych badaniach dużych odkształceń membranowych powłok obrotowych podejście GRIGORIEWA (patrz np. [4]). Stan bardzo dużych odkształceń powłok mogących przenosić jedynie rozciągające siły obwodowe analizował on w ramach deformacyjnej teorii plastyczności. W szeregu prac przedstawił metody i wyniki rozwiązań numerycznych dla pierścieniowych membran, ściętych stożków [62, 63] i dla powłok ortotropowych [65]. Ważny problem odciążania badany był w pracy [64]. ORKISZ i WILK [68] podali numeryczny sposób całkowania równań uzyskanych w pracy [66], a opisujących duże deformacje powłok w ramach teorii plastycznego płynięcia. Praca [67] stanowi podsumowanie i rozwinięcie wymienionych publikacji ORKISZA.

Duże odkształcenia i utratę stateczności powłok poddanych działaniu ciśnienia wewnętrznego i rozciągających sił krawędziowych badał MARCINIAK [49, 50] dla celów teorii

formowania plastycznego. Bogaty przegląd prac poświęconych formowaniu plastycznemu znaleźć można w opracowaniach i książkach SZCZEPIŃSKIEGO [91–93].

Bardzo duże odkształcenia ciśnieniowych walcowych zbiorników stalowych były badane przez JANASĄ i SAVE'A (badania na rozerwanie dla potrzeb optymalnego projektowania). Doświadczenia te [36] pozwalają określić taki sposób rozdzielenia materiału pomiędzy powłokę i dna, który daje konstrukcję optymalną. WIERZBICKI i ANDRZEJEWSKI [97] pokazali, że efekty geometrycznej nieliniowości grają istotną rolę w przypadku dynamicznych obciążeń (obciążenia wybuchowe).

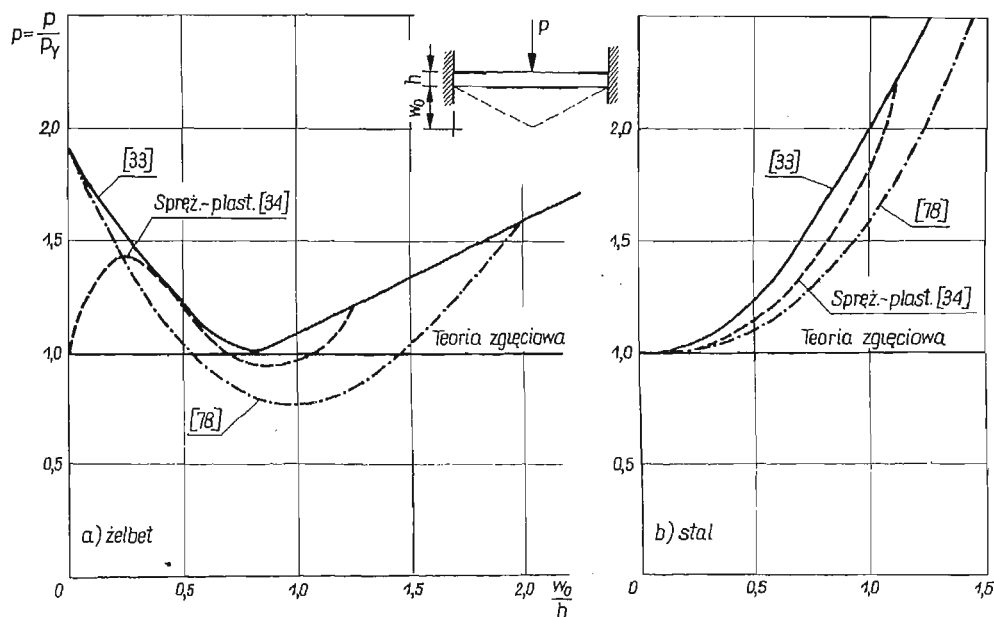
Analiza płyt przy skończonych ugięciach wykorzystuje metody stosowane w teorii powłok. Z tego względu omówimy tu w skrócie także i wyniki dotyczące płyt. WASZCZY-SZYN [94] zastosował wyprowadzone przez siebie ścisłe równania do numerycznej analizy sprężysto-plastycznych ugięć płyt kołowych. Podał on przykład dla pierścieniowej płyty z materiału o liniowym wzmocnieniu. WIERZBICKI i KELLY [96, 98] wykorzystali dla sztywno-plastycznych płyt kołowych obciążonych dynamicznie metodę opartą na teorii Kármána, zbliżoną do metody stosowanej do powłok [23–27].

Jak już zaznaczono, kompletne rozwiązania problemów dla dużych przemieszczeń rzadko prowadzą do wyników w postaci analitycznej. Stąd wynika zainteresowanie metodami przybliżonymi pozwalającymi określić zależność między obciążeniem i ugięciem w fazie *pokrytycznej*, czyli po wyczerpaniu początkowej nośności granicznej konstrukcji. Podejście kinematyczne zastosowane zostało do płyt przez ONATA i HAYTHORNTHWAITA [15]. Rozpatrywali oni odkształconą płytę kołową jako powłokę stożkową o wzrastającej wyniosłości, określając dla każdej wartości ugięcia odpowiednie obciążenie graniczne. RŻANICYN [19] zastosował do dużych ugięć metodę linii załomów przy pewnych uproszczeniach dotyczących sił wewnętrznych w przegubach plastycznych. Pierwsze rozwiązania dotyczące zachowania pokrytycznego płyt żelbetowych podał WOOD [21]. Metoda linii załomów zastosowana została przez SAWCZUKA i WINNICKIEGO [89, 90] do prostokątnych płyt żelbetowych. Rozpatrywano tam mechanizm zniszczenia płyt w postaci układu płatów połączonych przegubami *obrotowymi* i *rozciągliwymi*, w których siły wewnętrzne zależały od ugięcia. Badano różne warunki podparcia i uzyskane zależności obciążenie–ugięcie porównano z wynikami doświadczeń. Dalsze wyniki dla dużych odkształceń płyt sztywno-plastycznych podano w pracach [77–80].

Jeśli warunki podparcia uniemożliwiają poziome przemieszczenia krawędzi płyty, to odkształceniom towarzyszą ściskające siły osiowe. Ściskanie to maleje ze wzrostem ugięć i dlatego zależność między obciążeniem i ugięciem ma charakter niestateczny. Zagadnienie to badane było w pracy [33] i zilustrowane przykładami dla sztywno-plastycznych płyt kwadratowych i kołowych.

Okazuje się, że jeśli uwzględniona zostaje osiowa ściśliwość sprężysta płyty żelbetowej [34], to wzmacniający efekt ściskania (efekt tarczowy) jest znacznie słabszy. Maksymalne obciążenie, które przenieść może płyta występuje dla ugięć mniejszych od połowy jej grubości. Wyniki uzyskane przy uwzględnieniu ściśliwości sprężystej dają przejście od czysto zgięciowej teorii do analizy sztywno-plastycznej efektu tarczowego. Rysunek 11 podaje syntetyczne wyniki z prac [33, 34, 78] dla najprostszego przypadku walcowego zginania zamocowanego pasma płytowego. Obciążenie P podano jako funkcję ugięcia środka w_0 ; obie zmienne przedstawione są w postaci bezwymiarowej: P/P_y , (stosunek obciążenia do

zgięciowego obciążenia granicznego) i w_0/h (stosunek ugięcia do grubości). Krzywe z rys. 11a dotyczą pasma żelbetowego, zaś z rys. 11b — pasma stalowego. Jak widać, jedynie krzywe dla żelbetu mają charakter niestateczny.



Rys. 11. Zależności między obciążeniem i przemieszczeniem dla zamocowanego pasma płytowego

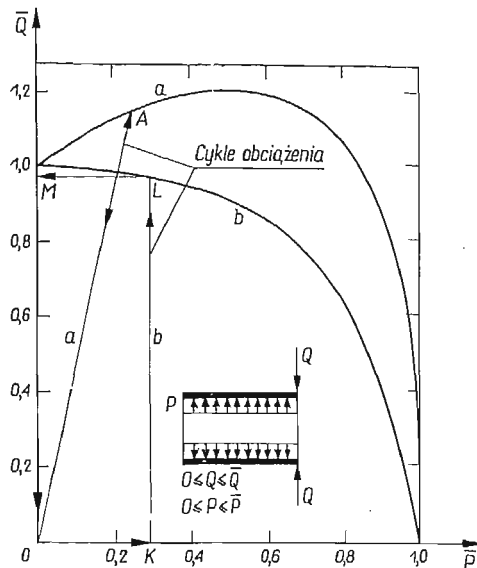
6. Dostosowanie konstrukcji

Konstrukcja sprężysto-plastyczna poddana działaniu obciążeń powtarzalnych lub działaniu kilku obciążeń zmieniających się niezależnie w pewnych granicach może utracić cechy użytkowe bądź wskutek narastania odkształceń (zniszczenie *przyrostowe*), bądź wskutek zmęczenia plastycznego (przemienne odkształcenia plastyczne). Analiza dostosowania się konstrukcji polega na znalezieniu ograniczeń programu obciążenia, przy których konstrukcja zachowywać się będzie sprężysto. Uznajemy, że konstrukcja dostosuje się do danego programu obciążenia, jeśli po skończonej liczbie cykli odkształcenia plastycznego powstanie w niej taki układ naprężeń resztkowych, że dalsze odkształcenia będą już czysto sprężyste.

Kompletne rozwiązanie dla przypadku zmiennych obciążeń winno polegać na określaniu, krok po kroku, całej historii zachowania się konstrukcji. Podejście takie jest na ogół zbyt pracochłonne i dlatego opracowano metody pozwalające oszacowywać dopuszczalne obszary zmienności obciążeń. Twierdzenie MELANA [12] pozwala uzyskać dolne oszacowanie obszaru dostosowania się konstrukcji. Głosi ono, że konstrukcja dostosuje się do danego obciążenia, jeśli istnieje taki niezależny od czasu układ naprężeń resztkowych, że w każdej chwili suma naprężeń resztkowych i naprężeń otrzymanych z analizy sprężystej

nie będzie przekraczać warunku plastyczności. Dla zastosowania w teorii płyt i powłok używającej zmiennych uogólnionych twierdzenie to wymaga odpowiedniego zmodyfikowania. Takie uogólnienia podał KÖNIG [41, 42] wraz z szeregiem przykładów. Zasadniczym elementem jego rozważań jest wprowadzenie pojęcia powierzchni sprężystej. Jest ona wypukłą funkcją uogólnionych naprężeń i znajduje się wewnątrz powierzchni granicznej; przy stanach naprężenia odpowiadających wnętrzu powierzchni sprężystej konstrukcja zachowuje się czysto sprężysto. Zagadnienia związane z określaniem takiej powierzchni oraz jej przemieszczania się i odkształcenia przy wzroście plastycznych odkształceń omówione zostały w pracach [41, 42].

Górne oszacowania obszarów dostosowania się konstrukcji uzyskać można wykorzystując twierdzenie KOITERA o *nieprzystosowaniu* [10]. Mówi ono, że konstrukcja nie przystosuje się do rozpatrywanego programu obciążenia, jeśli można znaleźć taki kinematycznie dopuszczalny cykl odkształceń, że praca obciążeń zewnętrznych przewyższa energię rozpraszaną w trakcie tego cyklu. Energia jest wówczas rozpraszana w każdym cyklu i w końcu



Rys. 12. Granice dopuszczalnych obszarów obciążenia dla powłoki walcowej; *a* — krzywa obciążenia granicznego dla jednoparametrowego obciążenia; *b* — górne oszacowanie obszaru dostosowywalności [83]

konstrukcja ulec musi zniszczeniu bądź przez wzrost odkształceń, bądź przez plastyczne zmęczenie. Twierdzenie to jest analogiczne do twierdzenia teorii stanów granicznych o górnej granicy obciążenia. W celu zastosowania twierdzenia Koitera w teorii powłok, musi być ono zapisane przy pomocy zmiennych uogólnionych. Łącząc twierdzenie z warunkami określającymi pola przemieszczeń dopuszczalnych związanych z określonym profilem naprężeń w stanie granicznym, można uzyskać oszacowanie od góry obszaru dostosowania się. W szczególności udaje się to przeprowadzić dla przypadku odcinkowo liniowych powierzchni granicznych.

Na możliwość wykorzystania twierdzenia Koitera w praktycznych obliczeniach wskazał pierwszy GOCHFELD [3]. Niezależną od czasu postać tego twierdzenia przydatną do analizy

powłok podano w pracy [83]. Na rys. 12 podano krzywe określające obszar zniszczenia przyrostowego oraz nośność graniczną powłoki walcowej obciążonej pierścieniem sił i ciśnieniem wewnętrznym. Pokazano tam także odpowiednie drogi obciążenia. Rozwiązanie zagadnienia nośności granicznej dotyczy obu grup obciążeń wzrastających proporcjonalnie, zaś krzywa zniszczenia przyrostowego odpowiada dowolnej drodze obciążenia, np. oznaczonego „na” rysunku łamaną *OKLM*. Warto zwrócić uwagę na fakt, że „dla obciążenia jednoparametrowego (np. droga *OAO*) krzywa nośności granicznej wyraźnie różni się od krzywej oszacowującej od góry obszar zniszczenia przyrostowego uzyskanej z przyrostowej postaci twierdzenia Koitera podanej w [83] dla dowolnego cyklu obciążenia. Zastosowanie tego twierdzenia wymaga jednak na ogół w praktycznych przypadkach sięgnięcia do metod numerycznych.

7. Wnioski

Obecny stan badań w dziedzinie powłok plastycznych wydaje się wskazywać, że nowe rozwiązania z zakresu teorii stanów granicznych uzyskać można przez szersze zastosowanie technik numerycznych.

Koncepcyjnie nowych wyników oczekiwać można w dziedzinach takich, jak:

1) Nośność graniczna konstrukcji złożonych (konstrukcje zbrojone i krucho-plastyczne); zwrócenia uwagi wymaga tak dobór właściwych warunków plastyczności, jak i odpowiednich metod analizy.

2) Teoria dużych odkształceń powłok; problem stateczności odkształceń plastycznych staje się istotniejszy od klasycznych zagadnień początkowej nośności granicznej.

3) Przybliżone metody analizy dużych przemieszczeń opartych na odpowiednio uogólnionych twierdzeniach teorii stanów granicznych lub na nowych twierdzeniach, na przykład o oszacowaniach przemieszczeń.

4) Analiza odkształceń sprężysto-plastycznych przy obciążeniach wieloparametrowych; w dziedzinie dostosowywania się konstrukcji brak wciąż efektywnych metod obliczeniowych.

5) Metody optymalnego projektowania plastycznego dla specjalnych funkcji kosztu, włączając w to optymalne projektowanie z uwagi na dostosowanie się konstrukcji.

6) Dynamiczne zachowanie się powłok plastycznych i kruchych, szczególnie z uwzględnieniem dużych przemieszczeń.

Literatura cytowana w tekście

Bibliografia ogólna

1. D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG, W. PRAGER, *The safety factor of an elastic plastic body in plane strain*, J. Appl. Mech., **18** (1951), 371.
2. M. N. FIALKOW, *Limit analysis of simply supported circular shell roofs*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., **84** (1958), EM3, Pap. 1706.

3. Д. А. ГОХФЕЛЬД, *Некоторые задачи теории приспособляемости пластин и оболочек*, Труды VI Вс. Конф. Обол. Пласт. Баку, Наука, Москва 1966, 284.
4. A. S. GRIGORIEV, *The stress state and carrying capacity of flexible plates and shells at large deformations. Non-classical shell problems* (Proc. Symp. IASS, Warszawa 1963), North Holland, PWN, Amsterdam-Warszawa 1964, 890.
5. А. А. ГВОЗДЕВ, *Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределенных систем, претерпевающих пластические деформации*, Труды Конф. Пласт. Деформ., АН СССР, Москва 1938; по английски: *Int. J. Mech. Sci.*, 1 (1960), 322.
6. R. HILL, *Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Univ. Press, London 1950.
7. P. G. HODGE, *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill, New York 1959.
8. P. G. HODGE, *Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. I. 1963.
9. K. W. JOHANSEN, *Yield-line Theory*, Cement and Concrete Assoc., London 1961; по ду́нски: Kobenhavn 1943.
10. W. T. KOITER, *A new general theorem on shake-down of elasto-plastic structures*, Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetensch., B 59 (1956), 24.
11. Ch. MASSONNET, M. SAVE, *Calcul Plastique des Constructions*, 2, CBLIA, Bruxelles 1963.
12. E. MELAN, *Der Spannungszustand eines Hencky-Miseschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung*, Sitz. Ber. Ak. Wiss., Wien, IIa 147 (1938), 73.
13. М. Ш. МИГЕЛАДЗЕ, *Статика анизотропных пластичных оболочек*, Изд. АН ГРУЗ. ССР, Тбилиси 1963.
14. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elasto-plastic bodies*, Arch. Mech. Stos., 8 (1956), 85.
15. E. T. ONAT, R. T. HAYTHORNTHWAITE, *The load-carrying capacity of circular plates at large deflection*, J. Appl. Mech., 23 (1956), 49.
16. E. T. ONAT, W. PRAGER, *Limit analysis of shells of revolution*, Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetensch., B 57 (1954), 534.
17. W. PRAGER, *The general theory of limit design*, Proc. 8th Int. Congr. Appl. Mech. (Istanbul 1952), 2, Istanbul 1956, 65.
18. A. R. RZHANITSYN, *Calculation of shallow shells by the limit design method*, Simplified Calculation Methods of Shell Structures (Proc. Coll. Brussels 1961), North-Holland, Amsterdam 1962, 438; по росы́нски: ЦНИИСК — Иссл. Вопр. Теории Пласт. Проч. Стр. Констр., Москва 1958.
19. A. R. RZHANITSYN, *The design of plates and shells by the kinematical method of limit equilibrium*, IX Congr. Int. Méc. Appliquée, 6, Université de Bruxelles, Brussels 1957, 331.
20. A. SAWCZUK, *Linear theory of plasticity of anisotropic bodies and its applications to problems of limit analysis*, Arch. Mech. Stos., 11 (1959), 541.
21. R. H. WOOD, *Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates*, Thames and Hudson, London 1961.

Prace Polskie 1960-1969

22. A. BIRON, A. SAWCZUK, *Plastic analysis of rib-reinforced cylindrical shells*, J. Appl. Mech., 34 (1967), 37.
23. M. DUSZEK, *Effect of geometry changes on the carrying capacity of cylindrical shells*, Bull. Acad. Pol. Sci., 13 (1965), 183.
24. M. DUSZEK, *Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections*, Arch. Mech. Stos., 18 (1966), 599.
25. М. ДУШЕК, *Пластическое поведение пологих сферических оболочек при больших прогибах*, Bull. Acad. Pol. Sci., 15 (1967), 565.
26. M. DUSZEK, *Analiza plastyczna dwuwarstwowych powłok walcowych uwzględniająca wpływ zmian kształtu*, Rozp. Inżyn., 15 (1967), 653.
27. M. DUSZEK, *Plastic analysis of shallow spherical shells at moderately large deflections*, Theory of Thin Shells (Proc. Symp. IUTAM Copenhagen 1967), Springer Verlag, Berlin 1969, 374.
28. M. JANAS, *Nośność graniczna przekrycia walcowego*, Arch. Inż. Łąd., 8 (1962), 365.

29. M. JANAS, *Limit analysis of non-symmetric plastic shells by a generalized yield-line method*, Non-classical Shell Problems (Proc. Symp. IASS Warszawa 1963), North-Holland-PWN, Amsterdam-Warszawa 1964, 997.
30. M. JANAS, *Yield loci for non-symmetric plastic shells*, Bull. Acad. Pol. Sci., **13** (1965), 9.
31. M. JANAS, *Kinematical compatibility problems in yield-line theory*, Mag. Concr. Res., **19** (1967), 33.
32. M. JANAS, *Nośność graniczna łuków i sklepień*, Arkady, Warszawa 1967.
33. M. JANAS, *Large plastic deformations of reinforced concrete slabs*, Int. J. Solids Struct., **4** (1968), 61.
34. M. JANAS, *An elastic-plastic analysis of the arching action in reinforced concrete slabs*, Bull. Inf. CEB (in press).
35. M. JANAS, J. A. KÖNIG, *Nośność graniczna powłok — przekrycia i zbiorniki*, Arkady, Warszawa 1968.
36. M. JANAS, M. SAVE, *Investigation of optimal design of cylindrical vessels for assigned bursting pressure*, Pipes and Tanks (Proc. Symp. IASS, Weimar 1968).
37. M. JANAS, A. SAWCZUK, *Some aspects of the load-carrying capacities of arch dams*, Theory of Arch Dams (Proc. Symp. IASS, Southampton 1964), Pergamon Press, Oxford 1964, 627.
38. M. JANAS, A. SAWCZUK, *Influence of position of lateral restraints on carrying capacities of plates*, Arch. Inż. Ląd., **12** (1966), 231.
39. J. A. KÖNIG, *Deformations of cylindrical elastic-plastic shells*, Bull. Acad. Pol. Sci., **12** (1964), 13.
40. J. A. KÖNIG, *Przybliżone określanie odkształceń płyt i powłok plastycznych w oparciu o niestowarzyszone prawo płynięcia*, Rozp. Inżyn., **13** (1965), 55.
41. J. A. KÖNIG, *Theory of shakedown of elastic-plastic structures*, Arch. Mech. Stos., **18** (1966), 228.
42. J. A. KÖNIG, *Shakedown theory of plates*, Arch. Mech. Stos., **21** (1969), 623.
43. J. A. KÖNIG, J. KLEPACZKO, *Ściskanie osiowe powłoki cylindrycznej z równoczesnym ciśnieniem wewnętrznym*, Rozp. Inżyn., **14** (1966), 263.
44. M. W. KWIECIŃSKI, *Yield criterion for initially isotropic reinforced slab*, Mag. Concr. Res., **17** (1965), 97.
45. M. W. KWIECIŃSKI, *Some tests on the yield criterion for a reinforced concrete slab*, Mag. Concr. Res., **17** (1965), 135.
46. M. W. KWIECIŃSKI, *Yield criterion for an orthotropic reinforced slab*, Int. J. Solids Struct., **1** (1965), 439.
47. M. W. KWIECIŃSKI, *Yield condition for orthotropically reinforced slab*, Arch. Mech. Stos., **18** (1966), 615.
48. S. ŁUKASIEWICZ, *On the optimum design of shells loaded with concentrated forces*, Theory of Thin Shells (Proc. IUTAM Symp. Copenhagen 1967), Springer Verlag, Berlin 1969, 161.
49. Z. MARCINIAK, *Stability of plastic shells under tension with kinematic boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **17** (1965), 577.
50. Z. MARCINIAK, *Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych*, Mech. Teor. Stos., **4** (1966), 13.
51. M. MROWIEC, *Stan graniczny rurociągu cienkościennego w przypadku ciśnienia wewnętrznego i zginania*, Rozp. Inżyn., **14** (1966), 513; po angielsku: Bull. Acad. Pol. Sci., **15** (1967), 615.
52. M. MROWIEC, M. ŻYCZKOWSKI, *Krzywe nośności granicznej dla cienkościennego rurociągu poddanego ciśnieniu wewnętrznemu i zginaniu*, Rozp. Inżyn., **15** (1967), 615.
53. Z. MRÓZ, *The load-carrying capacity of orthotropic shells*, Arch. Mech. Stos., **12** (1960), 85.
54. Z. MRÓZ, *On a problem of minimum weight design*, Quart. Appl. Math., **19** (1961), 127.
55. Z. MRÓZ, *Limit analysis of plastic structures subjected to boundary variations*, Arch. Mech. Stos., **15** (1963), 63.
56. Z. MRÓZ, *Optimum design of reinforced shells of revolution*, Non-classical Shell Problems (Proc. Symp. IASS, Warszawa 1963), North-Holland — PWN, Amsterdam-Warszawa 1964, 732.
57. Z. MRÓZ, XU BING-YE, *The load carrying capacities of symmetrically loaded spherical shells*, Arch. Mech. Stos., **15** (1963), 245.
58. W. OLSZAK, Z. MRÓZ, P. PERZYŃA, *Recent Trends in the Development of the Theory of Plasticity*, Pergamon Press, Oxford 1963; po rosyjsku: Mir, Moskwa 1964; po czesku: CSAV, Praha 1964.
59. W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI, W. URBANOWSKI, *Plasticity under nonhomogeneous conditions*, Advances in Applied Mechanics, **8** (1962), 131; po rosyjsku: Mir, Moskwa 1964.
60. W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Théorie de la capacité portante des constructions non-homogènes et orthotropes*, Ann. Inst. Techn. Bat. Trav. Publ., **13** (1960) 517; po portugalsku: Tecnica Revista de Engenharia, **34** (1960), 31 i 111.

61. W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Inelastic Behaviour in Shells*, Nordhoff, Groningen 1967.
62. Я. ОРКИШ, *Большие деформации безмоментных конических оболочек вращения*, Инжен. Журн., 5 (1965), 976.
63. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy pewnych typach fizycznej nieliniowości*, Rozpr. Inżyn., 13 (1965), 693, po angielsku: Bull. Acad. Pol. Sci., 15 (1967), 31.
64. J. ORKISZ, *Problem odciążania obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych*, Mech. Teor. Stos., 3 (1965), 63.
65. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia niesprężystych wiotkich osiowo-symetrycznych powłok ortotropowych w stanie błonowym*, Rozpr. Inżyn., 15 (1967), 697.
66. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym w świetle teorii plastycznego płynięcia*, Mech. Teor. Stos., 5 (1967), 463.
67. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok z uwzględnieniem reologicznych własności materiału*, Zesz. Nauk. Polit. Krak., Kraków 1967.
68. J. ORKISZ, J. WILK, *Numeryczne obliczanie wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok poddanych plastycznemu płynięciu w zakresie dużych odkształceń*, Mech. Teor. Stos., 7 (1969), 179.
69. J. RYCHLEWSKI, *Limit analysis of helicoidal shells*, Non-classical Shell Problems (Proc. Symp. IASS, Warszawa 1963), North-Holland-PWN, Amsterdam-Warszawa 1964, 819.
70. Я. РЫКЛЕВСКИЙ, *К общей теории идеально пластических оболочек*, Труды VI Всес. Конф. Обол. Пласт., Баку, Наука, Москва 1966, 873.
71. Я. РЫКЛЕВСКИЙ, Г. С. ШАПИРО, *Идеально пластические пластинки и оболочки*, Труды VI Всес. Конф. Обол. Пласт., Баку, Наука, Москва 1966, 987.
72. R. SANKARANARAYANAN, W. OLSZAK, *The load-carrying capacities of plates and shells*, Non-classical Shell Problems (Proc. Symp. IASS, Warszawa 1963), North-Holland-PWN, Amsterdam-Warszawa 1964, 842.
73. A. SAWCZUK, *Yield condition for anisotropic shells*, Bull. Acad. Pol. Sci., 8 (1960), 273.
74. A. SAWCZUK, *On the theory of anisotropic plates and shells*, Arch. Mech. Stos., 13 (1961), 355.
75. A. SAWCZUK, *On experimental foundations of the limit analysis theory of reinforced concrete shells*, Shell Research (Proc. Symp., Delft 1961), North-Holland, Amsterdam 1961, 217.
76. A. SAWCZUK, *On limit analysis of anisotropic shells*, Non-classical Shell Problems (Proc. Symp. IASS, Warszawa 1963), North-Holland-PWN, Amsterdam-Warszawa 1964, 909.
77. A. SAWCZUK, *On initiation of the membrane action in rigid-plastic plates*, J. Mécanique, 3 (1964), 15.
78. A. SAWCZUK, *Membrane action in flexure of rectangular plates with restrained edges*, Flexural Mechanics of Reinforced Concrete (Proc. Symp., Miami 1964), ASCE, New York 1965, 347.
79. A. SAWCZUK, *Estimation of the post-yield-load-deflection relationship of perfectly plastic plates*, Theory of Plates and Shells (Proc. Conf., Smolenice 1963), SAV., Bratislava 1966, 435.
80. A. SAWCZUK, *Large deflections of rigid plastic plates*, Applied Mechanics (Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech., Munich 1964), Springer Verlag, Berlin 1966, 224.
81. A. SAWCZUK, *On formulation of the equations of limit analysis of structures*, Z. angew. Math. Mech., Sonderheft, 46 (1966), 28.
82. A. SAWCZUK, *On yield criteria and collapse modes for plates*, J. Non-Linear Mech., 2 (1967), 233.
83. A. SAWCZUK, *On incremental collapse of shells under cyclic loading*, Theory of Thin Shells (Proc. IUTAM Symp., Copenhagen 1967), Springer Verlag, Berlin 1969, 328.
84. A. SAWCZUK, *Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shells*, J. Mech. Phys. Solids, 17 (1969), 291.
85. A. SAWCZUK, P. G. HODGE, *Comparison of yield condition for circular cylindrical shells*, J. Franklin Inst., 269 (1960), 362.
86. A. SAWCZUK, J. A. KÖNIG, *Analiza stanu zniszczenia walcowych silosów żelbetowych*, Arch. Inż. Łąd., 8 (1962), 161.
87. A. SAWCZUK, W. OLSZAK, *A method of limit analysis of reinforced concrete tanks*, Simplified Calc. Meth. Shell Struct. (Proc. Coll. Brussels 1961), North-Holland, Amsterdam 1962, 416.
88. A. SAWCZUK, J. RYCHLEWSKI, *On yield surfaces for plastic shells*, Arch. Mech. Stos., 12 (1960), 29.

89. A. SAWCZUK, L. WINNICKI, *Analiza plastyczna płyt żelbetowych przy dużych ugięciach*, Arch. Inż. Łąd., **9** (1963), 461.
90. A. SAWCZUK, L. WINNICKI, *Plastic behaviour of simply supported reinforced concrete plates at moderately large deflections*, Int. J. Solids Struct., **1** (1965), 97.
91. W. SZCZEPIŃSKI, *Recent advances in the theory of drawing of thin shells*, Appl. Mech. Rev., **14** (1961), 173.
92. W. SZCZEPIŃSKI, *Recent Advances in the Theory of Drawing of Metals*, Applied Mechanics Surveys, Spartan Books-McMilan, Washington 1966, 525.
93. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki*, PWN, Warszawa 1967.
94. Z. WASZCZYŻYŃ, *Skończone sprężysto-plastyczne ugięcia płyt kołowo-symetrycznych*, Rozpr. Inżyn., **15** (1967), 123.
95. Z. WASZCZYŻYŃ, *Ścisłe równania i obliczenie sprężysto-plastycznych ugięć powłok obrotowo-symetrycznych*, Rozpr. Inżyn., **16** (1968), 363.
96. T. WIERZBICKI, *Large deflections of a strain rate sensitive plate loaded impulsively*, Arch. Mech. Stos. **21** (1969), 67.
97. T. WIERZBICKI, H. ANDRZEJEWSKI, *An experimental and theoretical study of impulsively loaded viscoplastic cylindrical shells*, Prace IPPT 12/1969, Warszawa (publikacja wstępna).
98. T. WIERZBICKI, J. M. KELLY, *Finite deflections of a circular viscoplastic plate subject to projectile impact* Int. J. Solids Struct., **4** (1968), 1081.
99. M. ŻYCZKOWSKI, *Rozwój teorii plastyczności i wyteżenia w Polsce w pierwszym dziesięcioleciu istnienia Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (1958-1967)*, Mech. Teor. Stos., **6** (1968), 361.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 stycznia 1970 r.