MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 8 (1970)

TEORIA PRZYSTOSOWYWANIA SIĘ BELEK

LESZEK KONIECZNY (GDAŃSK)

1. Wstęp

«Dla procesów związanych z pojawieniem się odkształceń plastycznych przestaje obowiązywać jednoznaczność zależności, wiążących odkształcenia z naprężeniami... Wynika stąd wniosek, że w zagadnieniach teorii plastyczności podać należy nie tylko końcowy stan obciążenia (co było wystarczające dla rozwiązywania zagadnień teorii ciał sprężystych liniowych oraz nieliniowych), lecz również całą uprzednią „historię" rozpatrywanego procesu (jego „drogę"), począwszy od pierwotnego stanu beznaprężeniowego i bezodkształceniowego... Należy jeszcze wyjaśnić, czy konieczność znajomości „historii"... nie ogranicza zbytnio naszych rozważań i możliwości ich praktycznych zastosowań. Innymi słowy, należy wyjaśnić, czy otrzymane rozwiązanie, znalezione przy pewnej ustalonej przez nas kolejności i sposobie wzrostu obciążeń... będzie istotnie tą nitką, za którą musimy zdążać do celu, jeśli konstrukcja lub element konstrukcyjny poddane będą w rzeczywistych warunkach pracy pewnym kolejnym następstwom obciążeń lub sposobowi ich narastania, które różnią się od tych, jakie wzięliśmy za podstawę naszych obliczeń.

Na pytanie to nie można dać dziś jeszcze w pełni pozytywnej odpowiedzi. Jednak duży krok naprzód stanowią twierdzenia o „dostosowywaniu się" konstrukcji czyli ich „adaptacji"... Zrezygnujemy w związku z tym z założenia przyjętego uprzednio, a dotyczącego kolejności następstw obciążeń; będziemy teraz uważali, że dana konstrukcja poddana jest działaniu takich obciążeń, iż z każdego z nich znamy tylko najmniejszą i największą możliwą jego wartość; przyjmujemy przy tym, że każde z tych obciążeń może się zmieniać dowolnie i niezależnie od drugich...»[1)]

Z twierdzeń o plastycznym zniszczeniu wynika, że obciążenie graniczne jest niezależne od poprzedniej historii obciążania konstrukcji. Można więc mówić o zabezpieczeniu konstrukcji przed zniszczeniem plastycznym w dowolnym programie obciążania, jeżeli na każdym etapie programu mnożnik obciążeń ma wartość mniejszą od odpowiedniej wartości granicznej.

Istnieje też inne kryterium dla konstrukcji, będące również inwariantem względem historii obciążania. Jest nim ograniczoność całkowitej pracy odkształceń plastycznych, jaka może być rozproszona w konstrukcji przy nieograniczonym powtarzaniu dowolnego cyklu obciążania. Są podstawy, żeby się spodziewać, że spełnienie tego kryterium zapewnia w praktyce dostateczne ograniczenie trwałych odkształceń konstrukcji.

Z punktu widzenia tego kryterium zabezpieczenie konstrukcji przed zniszczeniem plastycznym w ogólnym przypadku nie wystarcza (ograniczoność całkowitej pracy odkształ-

[1)] Cytaty zaczerpnięto z [1], z rozdziału napisanego przez W. Olszaka.

ceń plastycznych można wówczas udowodnić tylko dla skończonych programów obciążania). W przypadku powtarzających się, dostatecznie złożonych cyklów obciążeń, całkowita praca odkształceń plastycznych rośnie nieograniczenie. Typ zniszczenia konstrukcji, jaki wówczas występuje, jest nazywany ogólnie zniszczeniem w wyniku cyklicznych odkształceń plastycznych. Rozróżnia się wtedy dwa rodzaje zniszczenia. Pozostawiając na boku stronę fizyczną zjawiska można stwierdzić, że gdy obciążanie ma charakter przemienny powstaje zjawisko przemiennej plastyczności (*alternating plasticity*), co może doprowadzić do pęknięć po niewielkiej liczbie cykli.

Niech ekstremalne wartości obciążeń dadzą się opisać przez podanie jednego parametru p_0. Gdy p_0 przekracza pewną krytyczną wartość $(p_0)_{kr}$, wówczas konstrukcja nie przystosuje się i podczas każdego cyklu obciążania powstają przyrosty obrotów w plastycznych przegubach. Ustala się stan stacjonarny, w którym przyrosty obrotów w każdym przegubie są takie same w każdym cyklu. Proces ten prowadzi do nadmiernych odkształceń plastycznych; mówimy, że konstrukcja uległa przyrostowemu zniszczeniu (*incremental collapse*).

2. Podstawowe hipotezy i definicje

Rozpatruje się konstrukcje prętowe poddane głównie zginaniu, dla których wpływ innych sił wewnętrznych (oprócz momentu zginającego) na proces uplastycznienie może być pominięty. Potrzebna teoria w zasadzie istnieje (monografia Neala [2]), jakkolwiek jest ona obarczona poważnymi niedostatkami natury formalnej, które autor starał się w niniejszej pracy usunąć.[2] Istotną różnicą jest wprowadzenie tu innej matematycznej definicji przystosowania się konstrukcji w zbiorze obciążeń, co umożliwiło przeprowadzenie poprawnego wywodu warunków wystarczających przystosowania się (Twierdzenie 1). Przy przyjęciu tej definicji wywód warunków koniecznych nie jest trywialny i został również podany w niniejszej pracy (Twierdzenie 2).

Podstawowa hipoteza teorii dotyczy, jak wiadomo, charakteru zależności między momentem zginającym a krzywizną dla ustalonego przekroju belki (hipoteza o przegubach plastycznych). Dla belki znajdującej się początkowo w stanie naturalnym (bez naprężeń i odkształceń) postulowana zależność przedstawiona jest na rys. 1 (*OAB*), przy założeniu zgodności konwencji znaków dla momentu i krzywizny. Postuluje się, że gdy moment zginający M wzrasta i dąży do wartości momentu granicznego, krzywizna $\varkappa$ w rozpatrywanym przekroju rośnie nieograniczenie; odpowiada to przejściu w stan plastyczny całego przekroju belki. Jeżeli pręt znajdujący się początkowo w stanie naturalnym obciążany jest ujemnym momentem zginającym, postulowana zależność między momentem i krzywizną w ustalonym przekroju belki jest analogiczna (*OCD*).

Matematycznie, przyjęta hipoteza oznacza, że moment zginający w każdym przekroju pręta spełnia podwójną nierówność

$$-M_{gr} \leqq M \leqq M_{gr} \tag{2.1}$$

---

[2] Na nieścisłości istniejącej teorii adaptacji dla ośrodka ciągłego zwrócił uwagę J. Rychlewski w referacie: *O podstawowych twierdzeniach teorii przystosowywania się ciał sprężysto-plastycznych*, wygłoszonym na konferencji naukowej ZMOC IPPT PAN, Bielsko-Biała 1967.

oraz że przyrosty krzywizny są zawsze tego samego znaku co przyrosty momentu zginającego

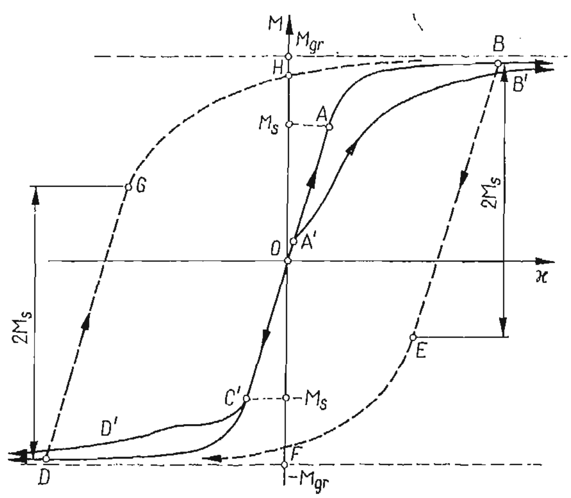
$$\frac{dM}{d\varkappa} > 0. \tag{2.2}$$

Osiągnięcie momentu granicznego odpowiada nieograniczonej krzywiźnie, a więc w przekroju obciążonym momentem granicznym mogą powstać skończone przyrosty kąta ugięcia na nieskończenie małym odcinku belki. Mogą więc wystąpić względne obroty θ obu części belki wokół przekroju obciążonego momentem granicznym, przy czym

$$M\delta\theta \geqq 0. \tag{2.3}$$

Postulowaną zależność M–$\varkappa$ można wyprowadzić przy przyjęciu materiału sprężysto-idealnie plastycznego i szeregu założeń przyjmowanych zazwyczaj w teorii belek [3].

Obecność naprężeń własnych w przekroju belki w stanie początkowym wpływa na zależność *moment zginający-krzywizna.* W ogólnym przypadku funkcja ta nie jest określona jednoznacznie i może być np. taka, jak $OA'B'$, $OC'D'$ na rys. 1. Podstawowe własności (2.1) — (2.3) pozostają jednak zawsze zachowane.

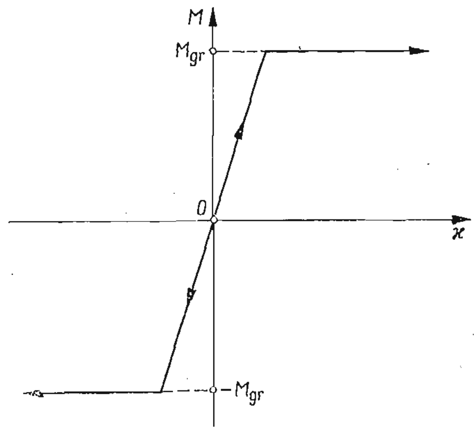


Rys. 1

Przy odciążaniu belki obciążonej poza granicą sprężystości zależność między momentem zginającym i krzywizną jest inna, niż przy obciążaniu. Jeżeli belka, znajdująca się początkowo w stanie naturalnym, jest obciążona momentem zginającym większym od momentu M_s (wywołującego uplastycznienie skrajnych włókien) i następnie moment maleje, to obowiązuje sprężysta zależność między zmianami krzywizny i momentu zginającego tak długo, dopóki nie nastąpi powtórne uplastycznienie, po czym — gdy moment zginający dąży do — M_{gr} — krzywizna maleje nieograniczenie (rys. 1, *BEF*). Przy odciążaniu od ujemnego momentu zginającego obowiązuje analogiczne prawo (*DGH*). Postuluje się, że zakres sprężystej pracy belki jest niezależny od historii obciążania i równy $2M_s$ (podwojonemu zakresowi sprężystemu dla belki obciążanej od stanu naturalnego).

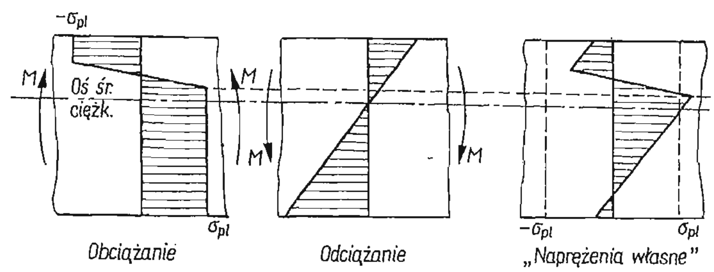
Dla belki o przekroju z dwiema osiami symetrii, znajdującej się początkowo w stanie naturalnym, można uzasadnić hipotezę o odciążaniu w oparciu o założenia wspomniane wyżej [3].

Dla belek o przekroju z jedną tylko osią symetrii, hipoteza o sprężystym odciążaniu nie jest słuszna w całym zakresie możliwych momentów zginających. Można to wykazać



Rys. 2

rozważając belkę, dla której oś dzieląca pole przekroju poprzecznego na połowy nie pokrywa się z osią przechodzącą przez środek ciężkości przekroju. Odciążając belkę od stanu, w którym obszar płynięcia przekroczył środek ciężkości przekroju zauważymy, że gdyby miało miejsce sprężyste odciążanie, to po jednej stronie osi środków ciężkości naprężenia



Rys. 3

zmniejszałyby się poniżej granicy plastyczności, natomiast po drugiej stronie naprężenia musiałyby wzrastać powyżej granicy plastyczności (w części przekroju między osią środków ciężkości i osią dzielącą przekrój na połowy), co jest niemożliwe dla materiału idealnie plastycznego.

Przy spełnieniu hipotezy płaskich przekrojów, nie można znaleźć takiego przyrostu naprężeń, który dawałby zerową siłę osiową oraz nie powodował przekroczenia granicy plastyczności w żadnym punkcie przekroju belki. W przypadku odciążania stan odkształceń belki z jedną osią symetrii nie zawsze więc może być opisany przez podanie krzywizny.

W dążeniu do maksymalnego uproszczenia przyjmuje się dalej tak zwaną idealną zależność między momentem zginającym i krzywizną (rys. 2). Postuluje się zachowanie sprężyste aż do chwili całkowitego uplastycznienia przekroju, kiedy przekrój nie może przenosić momentu większego od granicznego, a krzywizna jest równa odpowiedniej krzywiźnie sprężystej, bądź nieskończona. Zależność taka jest spełniona dla hipotetycznego idealnego przekroju — dźwigara dwupasowego. Zakłada się również w tym przypadku słuszność hipotezy o sprężystym odciążaniu.

Podamy definicje szeregu pojęć używanych dalej.

D e f i n i c j a 1. *Zniszczeniem plastycznym* nazywamy stan, w którym mogą powstać niezerowe przyrosty ugięć w konstrukcji przy zerowych przyrostach obciążeń zewnętrznych (przy równoczesnym spełnieniu warunków równowagi z obciążeniami zewnętrznymi). Odpowiednie obciążenia nazywamy obciążeniami granicznymi, a stan równowagi — równowagą graniczną [4].

Można udowodnić [2], że wszystkie możliwe położenia równowagi granicznej konstrukcji różnią się o przemieszczenia mechanizmu, zwanego mechanizmem zniszczenia plastycznego.

D e f i n i c j a 2. *Statycznie dopuszczalny rozkład momentów* jest to taki rozkład momentów zginających w konstrukcji, że:

1°. Funkcja $M(x)$ określona jest z równania

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q(x)$$

z dokładnością do wielkości hiperstatycznych;

2°. Momenty nigdzie nie przekraczają momentu granicznego co do wartości bezwzględnej.

D e f i n i c j a 3. *Bezpieczny statycznie możliwy rozkład momentów* określamy jak wyżej, wymagając ponadto, aby momenty zginające były wszędzie mniejsze od momentu granicznego co do bezwzględnej wartości.

D e f i n i c j a 4. *Zbiór obciążeń ograniczony.* Niech będzie dany nieskończenie-parametrowy zbiór obciążeń Ω, który jest podzbiorem przestrzeni liniowej unormowanej (przestrzeń funkcyjna). Mówimy, że zbiór ten jest *ograniczony*, jeżeli norma każdego elementu $p \in \Omega$ spełnia nierówność

$$\bigvee_{N>0} \bigwedge_{p\in\Omega} \|p\| \leqq N.$$

D e f i n i c j a 5. *Momenty zginające własne.* Momentem sprężystym $\mathscr{M}_{(x)}$ w przekroju x pręta nazywamy moment zginający obliczony dla dowolnego danego obciążenia przy założeniu, że cała konstrukcja znajduje się w zakresie sprężystym (materiał jest idealnie liniowo sprężysty). $\mathscr{M}^{\max}_{(x)}$ i $\mathscr{M}^{\min}_{(x)}$ są ekstremalnymi wartościami funkcjonału $\mathscr{M}_{(x)}$ w zbiorze Ω. Jeżeli oznaczyć przez $M_{(x)}$ rzeczywisty moment zginający jaki powstanie w przekroju x na dowolnym etapie programu obciążania, to moment *własny* $r_{(x)}$ w tym przekroju jest zdefiniowany następująco

$$r_{(x)} = M_{(x)} - \mathscr{M}_{(x)}. \tag{2.4}$$

Tak określony moment $r_{(x)}$ może być różny od momentu, jaki pozostanie w konstrukcji po usunięciu obciążeń zewnętrznych, ze względu na możliwość powstawania nowych odkształceń plastycznych podczas odciążania.

D e f i n i c j a 6. Mówimy, że konstrukcja *przystosowała się*, jeżeli dla dowolnego nieskończonego programu obciążania całkowita praca plastyczna dysypowana w konstrukcji jest ograniczona, tzn.

$$\bigvee_{N>0} \bigwedge_{p(t)\in\Omega} \int_0^\infty \int_L \dot{w}_p dx\delta t \leqq N.$$

Przyjęte całkowe kryterium przystosowania się nie zabezpiecza przed lokalnym (występującym na zbiorze miary zero) zmęczeniem plastycznym. Jest ono równoważne kryterium lokalnemu, o ile występujące funkcje są wystarczająco regularne względem współrzędnych, a obszar ciała ograniczony.

3. Teoria dla idealnego profilu

T w i e r d z e n i e 1. Jeżeli istnieje taki szczególny rozkład momentów własnych $\varrho(x)$, do którego można dodać ekstremalne momenty zginające (w ograniczonym zbiorze Ω) nie osiągając (z danym współczynnikiem zapasu $m > 1$) w żadnym przekroju momentu granicznego, to konstrukcja przystosuje się w każdym programie obciążania $p(t) \in \Omega$.

Daleko precyzyjniej można wypowiedzieć to twierdzenie używając zapisu logicznego:

$$\bigvee_{\varrho\in R} \bigvee_{m>1} \bigwedge_{x} \left\{ \begin{aligned} \varrho(x) + \mathscr{M}_{(x)}^{\max} &\leqq \frac{M_{gr}(x)}{m} \\ \varrho(x) + \mathscr{M}_{(x)}^{\min} &\geqq -\frac{M_{gr}(x)}{m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bigwedge_{p(t)\in\Omega} \int_0^\infty \dot{W}_p \delta t \leqq \frac{m}{m-1} \int_L \frac{\varrho^2}{2EJ} dx.$$

D o w ó d. Rozpatrzymy dowolny program obciążania. Wprowadzimy wielkość e określoną przez równanie

$$e = \int_L \frac{(r-\varrho)^2}{2EJ} dx,$$

gdzie r oznacza rzeczywisty moment własny w przekroju x na dowolnym etapie programu obciążania (dla określonego t). Całkowanie rozciąga się na wszystkie pręty konstrukcji. Z definicji wynika, że e jest nieujemne; jest to miara różnicy między rzeczywistym i hipotetycznym rozkładem momentów własnych.

Zakładamy, że podczas nieskończenie małego przedziału czasu δt powstaną takie zmiany przykładanych obciążeń, że rzeczywisty moment zginający w dowolnym przekroju x zmieni się o $\delta M(x)$. Niech $\delta\mathscr{M}(x)$ i $\delta r(x)$ będą odpowiednio przyrostami momentów sprężystych i własnych.

W tym samym czasie przyrosty obrotów plastycznych przegubów wynoszą $\delta\theta_k$ $(k = 1,\ldots, n)$.

Przyrost e wynosi

$$\delta e = \int_L (r-\varrho) \frac{\delta r}{EJ} dx.$$

Napiszemy równanie prac przygotowanych dla samozrównoważonego rozkładu momentów własnych $(r-\varrho)$. Zauważymy, że rzeczywiste przyrosty krzywizny $\delta M/EJ$ muszą spełniać warunki geometrycznej zgodności z rzeczywistymi przyrostami obrotów w przegubach plastycznych $\delta\theta_k$. Co więcej, przyrostom krzywizny $\frac{\delta\mathcal{M}}{EJ}$ (które miałyby miejsce, gdyby cała konstrukcja zachowywała się w sposób czysto sprężysty) powinny odpowiadać zerowe przyrosty obrotów w plastycznych przegubach. Stąd wynika, że przyrosty krzywizny

$$\frac{\delta r}{EJ}=\frac{\delta M-\delta\mathcal{M}}{EJ}$$

muszą być zgodne z rzeczywistymi przyrostami $\delta\theta_k$ obrotów w plastycznych przegubach.

Z zasady prac przygotowanych wynika

$$\int\limits_L (r-\varrho)\frac{\delta r}{EJ}dx+\sum_k (r_k-\varrho_k)\delta\theta_k=0;$$

tutaj sumowanie obejmuje wszystkie przekroje k, w których występują obroty w plastycznych przegubach w rozpatrywanym, nieskończenie małym przedziale czasu δt. Otrzymujemy więc

$$\delta e=-\sum_k (r_k-\varrho_k)\delta\theta_k. \tag{a}$$

Rozpatrzymy teraz przekrój k taki, że

$$r_k-\varrho_k<0.$$

Biorąc pod uwagę nierówność, tkwiącą w założeniu twierdzenia, otrzymamy

$$r_k+\mathcal{M}_k^{\max}<M_{gr,k}$$

lecz z definicji momentu własnego wynika, że

$$r_k+\mathcal{M}_k^{\max}=M_k^{\max},$$

gdzie $M_k^{\max}$ jest rzeczywistym maksymalnym momentem zginającym, jaki mógłby powstać w przekroju k, gdyby moment własny był równy r_k. Tak więc

$$M_k^{\max}<M_{gr,k}.$$

Wynik ten wskazuje, że obroty w przegubie plastycznym w tym przekroju mogą wystąpić tylko w kierunku ujemnym $\delta_k\theta<0$, ponieważ $\delta\theta_k$ mogłyby być tylko wtedy dodatnie, gdyby $M_k=M_{gr,k}$.
Stąd wynika, że

$$(r_k-\varrho_k)\delta\theta_k>0.$$

W podobny sposób można pokazać, że gdy $r_k-\varrho_k>0$, to $\delta\theta_k$ musi być dodatnie, tak że również w tym przypadku

$$(r_k-\varrho_k)\delta\theta_k>0.$$

W konkluzji stwierdzamy, że

$$(r_k-\varrho_k)\delta\theta_k\geqq 0.$$

Znak równości dotyczy przekrojów, w których na danym etapie obciążania $r_k = \varrho_k$. Z zależności (a) otrzymujemy więc $\delta e \leqslant 0$. Jeżeli w nieskończenie małym przedziale czasu δt nie ma obrotów w plastycznych przegubach, to oczywiście wtedy $\delta e = 0$.

Pokazaliśmy więc, że e maleje, gdy występują obroty w przegubach plastycznych i pozostaje stałe, gdy zachowanie jest czysto sprężyste. Ponieważ e jest oczywiście nieujemne, więc może albo osiągnąć zero, albo pewną wartość dodatnią.[3]

Można pokazać, że całkowita praca odkształceń plastycznych jest ograniczona dla dowolnego nieskończonego programu. Biorąc pod uwagę poprzednie rozważania mamy

$$\left|\int\limits_0^\infty \delta e\right| = |e(\infty)-e(0)| \leqq e(0) \leqq \int\limits_L \frac{\varrho^2}{2EJ}dx.$$

Stąd

$$\int\limits_L \frac{\varrho^2}{2EJ}dx \geqq \int\limits_0^\infty \sum_k (r_k-\varrho_k)\delta\theta_k = \int\limits_0^\infty \sum_k |r_k-\varrho_k|\cdot|\delta\theta_k|.$$

Wykorzystano tutaj fakt, że $(r_k-\varrho_k)\delta\theta_k > 0$.

Wybierzmy taki przekrój k, w którym

$$\delta\theta_k < 0.$$

Wtedy w tym przekroju

$$r_k+\mathcal{M}_k = -M_{gr,k},$$

a ponieważ z założenia

$$-\frac{M_{gr,k}}{m} \leqq \varrho_k+\mathcal{M}_k \leqq \frac{M_{gr,k}}{m},$$

więc

$$|r_k-\varrho_k| = |-M_{gr,k}-\mathcal{M}_k-\varrho_k| = |-M_{gr,k}-(\varrho_k+\mathcal{M}_k)| \geqq \left|-M_{gr,k}+\frac{M_{gr,k}}{m}\right| = \frac{m-1}{m}M_{gr,k}.$$

Podobnie w przekroju, w którym $\delta\theta_k > 0$ mamy

$$r_k+\mathcal{M}_k = M_{gr,k}$$

oraz

$$|r_k-\varrho_k| = |M_{gr,k}-\mathcal{M}_k-\varrho_k| = |M_{gr,k}-(\varrho_k+\mathcal{M}_k)| \geqq \left|M_{gr,k}-\frac{M_{gr,k}}{m}\right| = \frac{m-1}{m}M_{gr,r}.$$

Otrzymujemy więc, że

$$\int\limits_L \frac{\varrho^2}{2EJ}dx \geqq \frac{m-1}{m}\int\limits_0^\infty \left(\sum_k M_{gr,k}\cdot|\dot\theta_k|\right)\delta t = \frac{m-1}{m}\int\limits_0^\infty \dot W_p\delta t.$$

---

[3] Z faktu tego (po upewnieniu się, że e = const tylko wtedy, gdy brak jest przyrostów obrotów w przegubach plastycznych) NEAL [2] wyciąga zbyt daleko idący wniosek, że powstanie rozkład momentów własnych, umożliwiający przenoszenie dalszych zmian ograniczonych obciążeń w sposób czysto sprężysty

Ostatnia całka po prawej stronie jest całkowitą pracą plastyczną rozproszoną w konstrukcji dla belki o idealnym przekroju mamy bowiem

$$\dot{W}_p = \sum_k M_{gr,k} \cdot |\theta_k|.$$

Uwzględniono przy tym, że w każdym przegubie plastycznym praca ta jest nieujemna, co wynika z podstawowej hipotezy. W konkluzji dowodu otrzymaliśmy więc, że dla każdego nieskończonego programu obciążania i współczynnika zapasu ze względu na przystosowanie $m > 1$ całkowita praca plastyczna jest ograniczona

$$\int_0^\infty \dot{W}_p \delta t \leq \frac{m}{m-1} \int_L \frac{\varrho^2}{2EJ} dx,$$

co kończy dowód Twierdzenia 1.

Warunki podane w twierdzeniu są warunkami wystarczającymi dla przystosowania się konstrukcji z prętów o przekroju idealnym.

T w i e r d z e n i e 2. Jeżeli konstrukcja się przystosowała, to istnieje taki szczególny rozkład momentów własnych $\varrho(x)$ (niezależny od czasu), że wszystkie możliwe zmiany obciążeń, wewnątrz danych ograniczeń, są przenoszone bez naruszenia warunku uplastycznienia.

$$\bigvee_{N>0} \bigwedge_{p(t)\in\Omega} \int_0^\infty \dot{W}_p \delta t \leqq N \Rightarrow \bigvee_{\varrho\in R} \bigwedge_x \left\{ \begin{matrix} \varrho(x) + \mathcal{M}_{(x)}^{\max} \leqq M_{gr}(x) \\ \varrho(x) + \mathcal{M}_{(x)}^{\min} \geqq -M_{gr}(x) \end{matrix} \right\}.$$

Istnienie hipotetycznego rozkładu momentów własnych $\varrho(x)$ takiego, że dla każdego x

$$\varrho(x) + \mathcal{M}_{(x)}^{\max} \leqq M_{gr}(x),$$
$$\varrho(x) + \mathcal{M}_{(x)}^{\min} \geqq -M_{gr}(x),$$

jest więc warunkiem koniecznym dla przystosowania się konstrukcji.

D o w ó d. Niech nie istnieje taki rozkład momentów własnych $\varrho(x)$, który spełniałby warunki podane w tezie. Rozważmy cykliczny program obciążania, przy czym realizacja każdego cyklu trwa skończony odcinek czasu Δt (czas odgrywa tutaj jedynie rolę parametru, charakteryzującego kolejność przykładania obciążeń).

W każdym z przekrojów k, w których występują przyrosty obrotów w przegubach plastycznych na różnych etapach tego samego cyklu, muszą być spełnione warunki

$$r_k + \mathcal{M}_k = M_{gr,k} \quad \text{gdy} \quad \delta\theta_k > 0,$$
$$r_k + \mathcal{M}_k = -M_{gr,k} \quad \text{gdy} \quad \delta\theta_k < 0.$$

Niech całkowite przyrosty (za jeden cykl obciążania) momentów, krzywizn i kątów obrotu będą równe

$$\Delta M = \int_0^{\Delta t} \delta M; \quad \Delta\varkappa = \int_0^{\Delta t} \delta\varkappa; \quad \Delta\theta_k = \int_0^{\Delta t} \delta\theta_k.$$

Napiszmy równanie prac przygotowanych dla przyrostów $\Delta M(x)$, które spełniają warunki równowagi z zerowymi przyrostami obciążeń zewnętrznych (obciążenia zewnętrzne na początku i na końcu każdego cyklu są takie same)

$$\int_L \Delta M \Delta \varkappa dx + \sum_k \Delta M_k \Delta \theta_k = 0$$

lub uwzględniając, że $\Delta \mathcal{M} \equiv 0$ mamy

$$\text{(b)} \qquad \int_L \frac{(\Delta r)^2}{EJ} dx + \sum_k \Delta r_k \Delta \theta_k = 0.$$

Wskazujemy cykliczny program obciążania taki, że po każdym cyklu sumaryczne przyrosty $\Delta\theta_k$ obrotów w przegubach plastycznych spełniają warunek

$$\sum_k \Delta r_k \Delta \theta_k = 0.$$

Program taki nazywać będziemy *złożonym programem obciążania.*[4)]

Na podstawie (b) mamy wtedy $\Delta r \equiv 0$ (przy $\delta r \not\equiv 0$), a więc na początku i na końcu każdego cyklu rozkład momentów własnych w konstrukcji jest identyczny, proces jest więc całkowicie powtarzalny. Oczywiście konstrukcja nie przystosuje się, gdyż przy powtarzaniu cykli obciążania praca plastyczna rośnie nieograniczenie. Gdy zachodzi teza twierdzenia, wówczas można pokazać (podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1), że $\delta\theta_k \underset{t/\infty}{\to} 0$, a więc również $\Delta\theta_k \underset{t/\infty}{\to} 0$, co kończy dowód.

D e f i n i c j a 7. Zbiór $\{\Delta\theta_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, przyrostów obrotów w przegubach plastycznych po jednym cyklu, dla którego spełniony jest warunek

$$\text{(2.5)} \qquad \sum_k \Delta r_k \Delta \theta_k = 0,$$

nazywamy — *mechanizmem zniszczenia przyrostowego* — (*mechanism of incremental collapse*).

Zauważmy, że gdyby takie obroty wystąpiły równocześnie, to konstrukcja istotnie przekształciłaby się w mechanizm. Wynika stąd praktyczny sposób budowania takich mechanizmów dla danej konstrukcji.

Niech dany będzie dowolny zbiór obciążeń (skończony, przeliczalny lub nieprzeliczalny), ograniczony w taki sposób, że ograniczenia normy dane są przez podanie wartości jednego parametru $p_0 > 0$. Niech ponadto ekstremalne momenty sprężyste dla ustalonego przekroju ($\mathcal{M}^{\max}$, $\mathcal{M}^{\min}$) będą liniowymi funkcjami p_0

D e f i n i c j a 8. Obciążeniem krytycznym $(p_0)_{kr}$ ze względu na przystosowywanie się w zbiorze obciążeń Ω nazywamy taką wartość parametru p_0, że gdy $p_0 \leqq \frac{(p_0)_{kr}}{m}$, to konstrukcja przystosuje się w każdym programie obciążania, którego elementy należą do Ω

4) Przyjmujemy taki cykl obciążania, że po pewnej liczbie powtórzeń ustala się stan stacjonarny, w którym gdyby przyrosty obrotów w plastycznych przegubach wystąpiły równocześnie, to konstrukcja przekształciłaby się w mechanizm. Przykład takiego programu dla ramy podaje Neal [2].

i gdy $p_0 > (p_0)_{kr}$, to można znaleźć taki program obciążania, którego elementy należą do Ω, że konstrukcja nie przytosuje się ($m > 1$ jest współczynnikiem zapasu).

T w i e r d z e n i e 3 (twierdzenie statyczne o przystosowywaniu się). Jeżeli istnieje taki szczególny rozkład momentów własnych $\varrho(x)$, do którego można dodać ekstremalne momenty sprężyste, odpowiadające wartości p_0 bez naruszenia warunku uplastycznienia, to wartość $p_0 \leqq (p_0)_{kr}$ i odwrotnie.

$$\bigvee_{\varrho(x)\in R} \bigwedge_{x} \begin{cases} \varrho(x) + p_0 \overline{\mathscr{M}}_{(x)}^{\max} \leqq M_{gr}(x) \\ \varrho(x) + p_0 \overline{\mathscr{M}}_{(x)}^{\min} \geqq -M_{gr}(x) \end{cases} \Leftrightarrow p_0 \leqq (p_0)_{kr}.$$

D o w ó d. Zakładamy, że są spełnione założenia twierdzenia, jeżeli istnieje taki rozkład $\varrho(x)$ momentów własnych w konstrukcji, dla którego spełnione są nierówności podane w założeniach. Dzieląc obie strony tych nierówności przez współczynnik zapasu $m > 1$ otrzymujemy

$$\frac{\varrho(x)}{m} + \frac{p_0}{m} \overline{\mathscr{M}}(x) \leqq \frac{M_{gr}(x)}{m},$$

$$\frac{\varrho(x)}{m} + \frac{p_0}{m} \overline{\mathscr{M}}(x) \geqq -\frac{M_{gr}(x)}{m}.$$

Dla wartości parametru p_0/m istnieje więc taki rozkład $\varrho(x)/m$ momentów własnych w konstrukcji, że spełnione są warunki wystarczające przystosowania się (Twierdzenie 1), a więc z definicji 8 wynika, że $p_0 \leqq (p_0)_{kr}$.

Udowodnimy teraz, że gdy $p_0 = (p_0)_{kr}$, to spełnione są założenia twierdzenia. Założenia te są warunkami koniecznymi przystosowania się konstrukcji w zbiorze obciążeń (Twierdzenie 2), jeśli więc nie są spełnione, to $p_0 > (p_0)_{kr}$.

D e f i n i c j a 9. Mówimy, że *wartość p_0 odpowiada danemu mechanizmowi zniszczenia przyrostowego* (określonemu przez zbiór przyrostów obrotów $\{\theta_k\}$), gdy istnieje taki rozkład momentów własnych $r(x)$, że:

1°. W każdym przekroju k, w którym zdarzają się obroty w danym mechanizmie, spełniony jest jeden z dwóch warunków:

$$r_k + p_0 \overline{\mathscr{M}}_k^{\max} = (M_{gr})_k \qquad \text{dla} \qquad \theta_k > 0,$$

$$r_k + p_0 \overline{\mathscr{M}}_k^{\min} = -(M_{gr})_k \qquad \text{dla} \qquad \theta_k < 0.$$

2°. Równocześnie z równania prac przygotowanych dla danego mechanizmu musi wynikać równość

$$\sum_k r_k \theta_k = 0.$$

Zauważmy, że obydwa warunki określają jednoznacznie wartość p_0 — wystarczy dla każdego k określić r_k z warunku 1 i podstawić do warunku 2.

Twierdzenie 4 (twierdzenie kinematyczne o przystosowywaniu się). Wartość p_0, odpowiadająca dowolnemu założonemu mechanizmowi przyrostowego zniszczenia, jest większa lub równa obciążeniu krytycznemu $(p_0)_{kr}$.

$$\bigvee_{\{\theta_k\}_{k=1,\dots,n}} \bigvee_{p_0} \sum_k r_k\theta_k = 0 \wedge \left\{ \begin{array}{ll} r_k + p_0 \overline{\mathcal{M}}_k^{\max} = M_{gr,k} & \text{dla } \theta_k > 0 \\ r_k + p_0 \overline{\mathcal{M}}_k^{\min} = -M_{gr,k} & \text{dla } \theta_k < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow p_0 \geqq (p_0)_{kr}.$$

Dowód tego twierdzenia został podany przez NEALA [2].

Definicja 10. *Rozwiązaniem zupełnym* problemu przystosowywania się nazywamy określenie $(p_0)_{kr}$ dla danej konstrukcji i danego ograniczonego zbioru obciążeń.

4. Przypadki szczególne

Zajmijmy się teraz ważnymi przypadkami szczególnymi podanej teorii.

I. Niech $\varrho(x) \equiv 0$; jest to oczywiście jeden z możliwych rozkładów momentów własnych. Warunki wystarczające przystosowania można wówczas zapisać w postaci

$$\bigvee_{m>1} \bigwedge_{x} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{(x)}^{\max} \leqq \dfrac{1}{m} M_{gr}(x) \\ \mathcal{M}_{(x)}^{\min} \geqq -\dfrac{1}{m} M_{gr}(x) \end{array} \right\}.$$

Dla konstrukcji z prętów o przekroju idealnym odpowiada to osiągnięciu tzw. nośności sprężystej. Analiza konstrukcji oparta o model ciała sprężystego, sprowadza się więc do zapewnienia warunków wystarczających przystosowania. Otrzymane w ten sposób oszacowanie $(p_0)_{kr}$ od dołu jest na ogół bardzo mało ostre.

II. Rozpatrzymy program obciążenia tego rodzaju, że dowolny element $p(x) \in \Omega$ mnożymy przez liczbę λ, zależną od czasu t (tworzymy jednowymiarową podprzestrzeń unormowanej przestrzeni liniowej). Jest rzeczą oczywistą, że w takim przypadku mechanizm zniszczenia przyrostowego staje się mechanizmem zniszczenia plastycznego. Jeżeli bowiem w takim programie zdarzą się przyrosty obrotów w plastycznych przegubach $\Delta\theta_k$ spełniające warunek

$$\sum_k \Delta r_k \Delta\theta_k = 0,$$

to przyrosty te zachodzą równocześnie (na jednym i tym samym etapie programu obciążania). W omawianym przypadku $(p_0)_{kr} = (p_0)_{gr}$, a więc konstrukcja przystosuje się przy takich programach obciążania[5]), gdy tylko $p_0 \leqq \dfrac{(p_0)_{gr}}{m}$.

III. Można postawić pytanie o wyznaczanie $(p_0)_{gr}$ w dowolnym ograniczonym zbiorze obciążeń Ω, gdzie przez $(p_0)_{gr}$ w zbiorze obciążeń będziemy rozumieć minimalną wartość

---

[5]) Można je nazwać *prostymi programami obciążania.*

$(p_0)_{gr}$ dla wszystkich elementów zbioru Ω. Z twierdzeń o zniszczeniu plastycznym [3, 4] wynika, że jeżeli istnieje taki szczególny rozkład momentów własnych $\varrho(x)$, że na każdym etapie dowolnego programu ze zbioru Ω nie jest naruszony warunek plastyczności, to $p_0 \leqq (p_0)_{gr}$ w zbiorze Ω.

Poszukiwanym rozwiązaniem $(p_0)_{gr}$ w zbiorze obciążeń Ω jest największa wartość parametru p_0, dla której istnieją jeszcze takie dwa szczególne rozkłady $\varrho_1(x)$ i $\varrho_2(x)$ momentów własnych w konstrukcji, że dla każdego x spełnione są nierówności

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} \varrho_1(x)+p_0\bar{\mathscr{M}}^{\max}_{(x)} &\leqq M_{gr}(x), \\ \varrho_2(x)+p_0\bar{\mathscr{M}}^{\min}_{(x)} &\geqq -M_{gr}(x), \end{aligned}$$

ponieważ dla ustalonego x ekstremalne w zbiorze Ω momenty sprężyste $\mathscr{M}^{\max}_{(x)}$ i $\mathscr{M}^{\min}_{(x)}$ na pewno nie powstają na tym samym etapie programu obciążenia.

Można uważać, że zagadnienie określenia $(p_0)_{gr}$ w zbiorze Ω jest szczególnym przypadkiem problemu przystosowywania się, gdy ograniczyć się tylko do programów prostych (z których każdy utworzony jest w ten sposób, że ustaloną funkcję $p(x) \in \Omega$ mnożymy przez liczbę zależną od czasu). Podane warunki (c) są słabsze niż warunki przystosowania się w ogólnym przypadku, więc $(p_0)_{kr} \leqq (p_0)_{gr}$.

5. Ogólne twierdzenie o przystosowywaniu się belek

Do tego miejsca zakładaliśmy konsekwentnie, że obowiązuje tzw. idealna zależność między momentem zginającym i krzywizną belki (rys. 2). Dla profili rzeczywistych zakładamy bardziej ogólną zależność *moment–krzywizna* (rys. 1). Dla profili tych pewne plastyczne płynięcie może się zdarzyć w skrajnych włóknach belki, bez całkowitego uplastycznienia przekroju. Jakkolwiek nie wpływa to na przyrostowe zniszczenie konstrukcji, to jednak może doprowadzić do pęknięć wskutek przemiennej plastyczności. Warunki przystosowania się konstrukcji z prętów o idealnym przekroju nie wystarczają dla przekrojów rzeczywistych. Poniżej podamy warunki wystarczające do przystosowania się belki o takim przekroju, ostrzejsze niż dla profilu idealnego. Ponieważ nie potrafimy równocześnie podać odpowiednich nowych warunków koniecznych przystosowania się, to teoria traci swój charakter, w którym warunki konieczne i wystarczające wzajemnie się uzupełniały. Nie można więc dla przekrojów rzeczywistych podać rozwiązania zupełnego problemu przystosowywania się, można jedynie oszacować od góry i od dołu wartość $(p_0)_{kr}$.

T w i e r d z e n i e 5. Dla przystosowania się belki o dowolnym przekroju[6)] w ograniczonym zbiorze obciążeń Ω, oprócz warunków podanych w Twierdzeniu 1, wystarczy spełnienie dla każdego x dodatkowego warunku

$$\text{(5.1)} \qquad m[\mathscr{M}^{\max}_{(x)}-\mathscr{M}^{\min}_{(x)}] \leqq \frac{2M_{gr}(x)}{\alpha(x)},$$

gdzie $\alpha > 1$ jest współczynnikiem zależnym od kształtu przekroju, $m > 1$ jest współczynnikiem zapasu.

[6)] Zakładamy, że dla belki słuszna jest hipoteza o przegubach plastycznych, warunki obciążenia muszą być więc takie, aby występowało płaskie zginanie.

Współczynnik α zdefiniowany jest następująco:

$$\alpha \overset{\text{df}}{=} \frac{\dfrac{M_{gr}}{M_s}}{1-\dfrac{M_{gr}}{M_s}+\dfrac{M^*}{M_s}},$$

gdzie M^* oznacza moment zginający, któremu (przy obciążaniu od stanu naturalnego) odpowiada taki rozkład naprężeń w przekroju belki, że granica strefy uplastycznienia osiąga właśnie środek ciężkości przekroju.

1°. Dla przekroju idealnego mamy $M^* = M_s = M_{gr}$ i stąd $\alpha = 1$. Dodatkowy warunek (5.1) ma wówczas postać

$$m[\mathscr{M}^{\max}_{(x)} - \mathscr{M}^{\min}_{(x)}] \leqq 2M_{gr}(x).$$

Warunek ten jest nieistotny, gdyż jak łatwo sprawdzić, jest tożsamościowo spełniony, gdy tylko są spełnione założenia Twierdzenia 1.

2°. Dla przekroju rzeczywistego o dwóch osiach symetrii mamy $M^* = M_{gr} > M_s$ i stąd $\alpha = M_{gr}/M_s$. Dodatkowy warunek $m(\mathscr{M}^{\max}_{(x)} - \mathscr{M}^{\min}_{(x)}) = 2\,M_s$ jest znany [2, 3], ale przy $m = 1$.

D o w ó d T w i e r d z e n i a 5. Dowód przeprowadzimy dla jednowymiarowego stanu naprężeń, przy założeniu materiału sprężysto-idealnie plastycznego. Całkowite odkształcenia przedstawimy w postaci sumy odkształceń sprężystych i plastycznych

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon'';$$

wtedy

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}''.$$

Jeżeli σ i ε są rzeczywistymi naprężeniami i odkształceniami na danym etapie programu obciążania, to odpowiedni stan naprężeń własnych jest określony jako

$$\sigma^r = \sigma - \sigma^e,$$

gdzie σ^e jest odpowiednim naprężeniem dla materiału idealnie liniowo-sprężystego.

W pierwszej części dowodu wykażemy, że jeżeli można znaleźć taki ustalony rozkład $\bar{\sigma}^r$ naprężeń własnych w belce, że w każdym punkcie belki będzie spełniona nierówność (przy $m > 1$)

(d) $$-\frac{\sigma_{pl}}{m} \leqq \bar{\sigma}^r + \sigma^e \leqq \frac{\sigma_{pl}}{m}$$

dla wszystkich σ^e, które mogą być osiągnięte przy danych warunkach obciążania, to belka przystosuje się, czyli przy dowolnym nieskończonym programie obciążania całkowita praca plastyczna będzie ograniczona.

Rozpatrujemy energię sprężystą odkształcenia dla naprężeń własnych $(\sigma^r - \bar{\sigma}^r)$

(e) $$\mathscr{F} = \int\limits_V \frac{1}{2E} (\sigma^r - \bar{\sigma}^r)^2 dV.$$

Pokażemy, że $\mathscr{F} = \text{const}$, gdy nie zachodzi plastyczne płynięcie i maleje, gdy prędkość odkształceń plastycznych jest różna od zera.

Różniczkując (e) względem czasu t otrzymujemy

$$\dot{\mathcal{F}} = \int_V \frac{\dot{\sigma}^r}{E}(\sigma^r - \overline{\sigma}^r)dV.$$

Uwzględniając, że

$$\frac{\dot{\sigma}^r}{E} = \frac{\dot{\sigma}}{E} - \frac{\dot{\sigma}^e}{E} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}'' - \dot{\varepsilon}^e,$$

$$\sigma^r - \overline{\sigma}^r = \sigma - (\overline{\sigma}^r + \sigma^e),$$

otrzymujemy

(f) $$\dot{\mathcal{F}} = \int_V \{(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e)[\sigma - (\overline{\sigma}^r + \sigma^e)] - \dot{\varepsilon}''[\sigma - (\overline{\sigma}^r + \sigma^e)]\} dV.$$

Należy podkreślić, że ε jest rzeczywistym odkształceniem, a ε^e jest odkształceniem, jakie mogłoby istnieć w tej samej konstrukcji, lecz wykonanej z materiału idealnie liniowo-sprężystego.

Oba pola odkształceń są więc związane z pewnymi polami przemieszczeń u i u^e,

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial e}, \qquad \varepsilon^e = \frac{\partial u^e}{\partial x},$$

stąd ich różnica jest również związana z pewnym polem przemieszczeń

$$\varepsilon - \varepsilon^e = \frac{\partial}{\partial x}(u - u^e).$$

Całka z pierwszego składnika sumy w nawiasie klamrowym (f) jest równa pracy sił zewnętrznych, będących w równowadze z $[\sigma - (\overline{\sigma}^r + \sigma^e)]$, wykonanej na pochodnej czasowej pola przemieszczeń $(u - u^e)$. Ponieważ oba pola naprężeń: σ i $(\overline{\sigma}^r + \sigma^e)$ są w równowadze z takimi samymi obciążeniami zewnętrznymi, więc

$$\int_V (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e)[\sigma - (\overline{\sigma}^r + \sigma^e)]dV = 0;$$

stąd

$$\dot{\mathcal{F}} = -\int_V [\sigma - (\overline{\sigma}^r + \sigma^e)]\dot{\varepsilon}'' dV.$$

Jeżeli $\dot{\varepsilon}'' > 0$ to $\sigma = \sigma_{pl}$. Korzystając z założenia (d), że

$$\overline{\sigma}^r + \sigma^e < \sigma_{pl},$$

otrzymujemy

$$[\sigma - (\overline{\sigma}^r + \sigma^e)]\dot{\varepsilon}'' > 0.$$

Analogicznie, gdy $\dot{\varepsilon}'' < 0$, to $\sigma = -\sigma_{pl} < \overline{\sigma}^r + \sigma^e$ i również w tym przypadku mamy

$$[\sigma - (\overline{\sigma}^r + \sigma^e)]\dot{\varepsilon}'' > 0.$$

Ostatnią możliwością jest $\dot{\varepsilon}'' = 0$. W każdym przypadku mamy więc

$$[\sigma - (\overline{\sigma}^r + \sigma^e)]\dot{\varepsilon}'' \geqq 0,$$

skąd zawsze

$$\dot{\mathcal{F}} \leqq 0.$$

$\mathcal{F}$ maleje, gdy tylko zachodzi plastyczne płynięcie. Ponieważ $\mathcal{F}$ jest oczywiście nieujemne, więc może albo osiągnąć zero, albo pewną wartość dodatnią[7].

Pokażemy, że całkowita praca odkształceń plastycznych jest ograniczona dla dowolnego nieskończonego programu obciążenia. Uwzględniając, że $\dot{\mathcal{F}} \leqslant 0$, mamy

$$\left|\int_0^\infty \dot{\mathcal{F}} \delta t\right| = |\mathcal{F}(\infty) - \mathcal{F}(0)| \leqq \mathcal{F}(0) \leqq \int_V \frac{(\bar{\sigma}^r)^2}{2EJ} dV$$

lub

$$\int_V \frac{(\bar{\sigma}^r)^2}{2EJ} dV \geqq \int_0^\infty \int_V [\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] \dot{\varepsilon}'' dV \delta t.$$

W ostatnim kroku uwzględniono, że zawsze

$$[\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] \dot{\varepsilon}'' \geqq 0.$$

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $\dot{\varepsilon}'' > 0$. Wtedy

$$\sigma = \sigma_{pl} \quad \text{oraz} \quad [\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] > 0.$$

Uwzględniając założenia (d), otrzymujemy

$$\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e) = \sigma_{pl} - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e) \geqq \sigma_{pl} - \frac{1}{m}\sigma_{pl} = \frac{m-1}{m}\sigma_{pl}.$$

W przypadku, gdy $\dot{\varepsilon}'' < 0$ mamy

$$\sigma = -\sigma_{pl} \quad \text{oraz} \quad [\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] < 0.$$

Uwzględniając założenia (d) otrzymujemy

$$\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e) = -\sigma_{pl} - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e) \leqq -\sigma_{pl} + \frac{1}{m}\sigma_{pl} = -\frac{m-1}{m}\sigma_{pl}.$$

Otrzymujemy więc ostatecznie, że w każdym przypadku

$$\int_V \frac{(\bar{\sigma}^r)^2}{2EJ} dV \geqq \int_0^\infty \int_V [\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] \dot{\varepsilon}'' dV \delta t \geqq \frac{m-1}{m} \int_0^\infty \int_V \sigma_{pl} \dot{\varepsilon}'' dV \delta t.$$

Ostatnia całka po prawej stronie jest całkowitą pracą plastyczną dysypowaną w dowolnym, nieskończonym programie obciążania.

W konkluzji otrzymujemy więc, że gdy są spełnione założenia (d), to całkowita praca plastyczna dysypowana w dowolnym, nieskończonym programie obciążania, jest ograniczona

$$W_p = \int_0^\infty \int_V \sigma_{pl} \dot{\varepsilon}'' dV \delta t \leqq \frac{m}{m-1} \int_V \frac{(\bar{\sigma}^r)^2}{2EJ} dV,$$

co kończy pierwszą część dowodu twierdzenia.

[7] HODGE [3] na tym kończy pierwszą część dowodu stwierdzając, że w dowolnym programie obciążania nastąpi skończone plastyczne płynięcie.

W drugiej części dowodu pokażemy, że jeżeli są spełnione założenia twierdzenia, to dla każdego przekroju istnieje rozkład naprężeń własnych $\bar{\sigma}^r$ zapewniający przystosowanie się, a więc spełniający warunki (d).

Dowód przeprowadzimy dla belki o przekroju z jedną tylko płaszczyzną symetrii, będącą płaszczyzną zginania[8] (dla przekroju o dwóch płaszczyznach symetrii dowód został podany przez HODGE'A [3], dla takich przekrojów wystarczy przyjąć $\alpha = M_{gr}/M_s$). W przypadku przekroju o jednej osi symetrii, hipoteza o sprężystym odciążaniu obowiązuje, jak wiadomo, jedynie w pewnym ograniczonym zakresie. Rozpatrując cykl obciążania od stanu naturalnego stwierdziliśmy (na wstępie niniejszej pracy), że sprężyste odciążanie zachodzi jedynie od takich stanów naprężeń, w których strefa uplastycznienia nie przekroczyła jeszcze osi środków ciężkości przekrojów. Gdy przekrój jest odciążany od momentów co do bezwzględnej wartości większych, wywołujących uplastycznienie w punktach przekroju leżących między osią środków ciężkości a osią dzielącą przekrój poprzeczny na połowy, to w punktach tych może nastąpić wtórne plastyczne płynięcie przy odciążaniu (rys. 3). Z tego powodu istniało nawet przekonanie, że problemu przystosowywania się belek o przekroju z jedną osią symetrii wogóle nie można formułować w momentach lecz należy wprost rozpatrywać rozkłady naprężeń [2].

Okazuje się, że również w tym przypadku można podać pewne warunki wystarczające dla przystosowania się, wyrażone w momentach zginających. Zakładamy, że każdy przekrój belki został obciążony do największego co do bezwzględnej wartości momentu zginającego, pomnożonego przez współczynnik zapasu $m > 1$ i następnie odciążony do hipotetycznego momentu własnego ϱ, zapewniającego przystosowanie się, a więc takiego, że

$$
\text{(g)} \qquad \begin{aligned} \varrho + m\mathcal{M}^{\max} &\leqq M_{gr}, \\ \varrho + m\mathcal{M}^{\min} &\geqq -M_{gr}. \end{aligned}
$$

Zakładamy, że belka znajdowała się początkowo w stanie naturalnym, można więc na każdym etapie aktywnego procesu podać jednoznaczny rozkład naprężeń. Dla ustalenia uwagi rozpatrzymy przekrój, w którym największym co do bezwzględnej wartości momentem jest $\mathcal{M}^{\max}$. Oznaczymy przez M^* moment, któremu (przy obciążaniu od stanu naturalnego) odpowiada taki rozkład naprężeń w przekroju belki, że granica strefy uplastycznienia osiągnęła właśnie oś środków ciężkości.

Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy

$$m\mathcal{M}^{\max} \leqq M^*,$$

obowiązuje więc jeszcze hipoteza o sprężystym odciążaniu. Po odciążeniu do momentu ϱ można więc jednoznacznie wskazać rozkład $\bar{\sigma}^r$ naprężeń własnych w przekroju taki, że przekrój może być ponownie obciążony do momentu $m\mathcal{M}^{\max}$ w sposób sprężysty. Natomiast przy obciążaniu do momentu $m\mathcal{M}^{\min}$ również nie będzie odkształceń plastycznych, gdy tylko maksymalny zakres zmian momentów zginających nie przekroczy $2M_s$, ze współczynnikiem zapasu m. Wystarczy więc w założeniu twierdzenia (5.1) przyjąć w tym przypadku $\alpha = M_{gr}/M_s$.

---

[8] Dowód jest również słuszny w ogólniejszym przypadku przekroju bez płaszczyzn symetrii, gdy zachodzi płaskie zginanie.

Przejdziemy teraz do przypadku, gdy $m\mathcal{M}^{\max} > M^*$. Wprowadzimy oznaczenie $\Delta r = m\mathcal{M}^{\max} - M^*$.

Przyjmiemy, że przed obciążaniem istnieje w rozpatrywanym przekroju moment własny $r_0 = -\Delta r$, któremu odpowiada rozkład naprężeń własnych σ_0^r zmieniających się liniowo na wysokości belki

$$\sigma_0^r = -\frac{\Delta r}{J} z.$$

Gdy od takiego stanu będziemy obciążać przekrój do momentu $m\mathcal{M}^{\max}$, to sumaryczny moment zginający w przekroju będzie równy M^*. Po sprężystym odciążeniu do momentu własnego ϱ, spełniającego warunki (g), jest określony jednoznacznie pewien rozkład naprężeń $\tilde{\sigma}^r$ odpowiadający temu momentowi własnemu.

Przekrój może być obciążony ponownie momentem $m\mathcal{M}^{\max}$ w sposób sprężysty, ponieważ odciążanie od tego samego momentu zginającego do ϱ było sprężyste, a więc powtarzalne. Natomiast przy obciążaniu momentem przeciwnego znaku przekrój pozostanie w zakresie sprężystym, gdy będzie spełniony warunek (rys. 4)

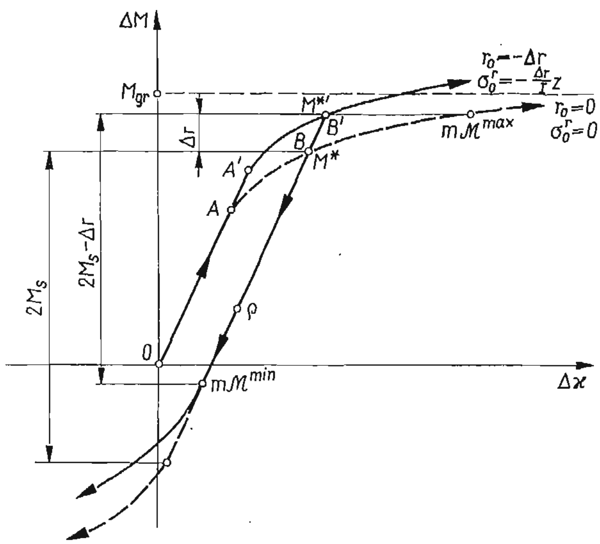
$$m\mathcal{M}^{\max} - m\mathcal{M}^{\min} \leq 2M_s - \Delta r^{\max},$$

przy czym oczywiście $\Delta r^{\max} = M_{gr} - M^*$.

Po przekształceniach otrzymujemy założenie (5.1), przy czym

$$\alpha = \frac{\dfrac{M_{gr}}{M_s}}{1 - \dfrac{M_{gr}}{M_s} + \dfrac{M^*}{M_s}}.$$

Współczynnik ten jest więc zależny od kształtu przekroju belki.



Rys. 4

Otrzymaliśmy więc wniosek, że gdy są spełnione założenia twierdzenia, to można wskazać takie pole naprężeń własnych w konstrukcji $\tilde{\sigma}^r = \frac{\bar{\sigma}^r}{m}$, że w każdym punkcie będzie spełniona nierówność

$$-\frac{\sigma_{pl}}{m} \leqq \tilde{\sigma}^r + \sigma^e \leqq \frac{\sigma_{pl}}{m}$$

dla wszystkich σ^e, które mogą być osiągnięte przy danych warunkach obciążania, co kończy dowód twierdzenia.

Literatura cytowana w tekście

1. Praca zbiorowa, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.
2. B. G. NEAL, *The plastic methods of structural analysis*, Chapman and Hall Ltd., London 1963.
3. P. G. HODGE, *Plastic analysis of structures*, McGraw-Hill, New York-Toronto-London 1959.
4. В. Т. КОЙТЕР, *Общие теоремы теории упруго-пластических сред*, Изд. Ин. Лит., Москва 1961 (tłumaczenie z angielskiego).

Резюме

ТЕОРИЯ ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ БАЛОК

В работе рассматриваются стержневые конструкции, подвергнутые изгибу. Считается, что пластическое состояние в сечении достигается под действием изгибающего момента (влиянием других внутренних усилий пренебрегаем). Предполагается справедливой гипотеза пластических шарниров. В основу первой части работы заложена идеальная зависимость изгибающий момент-кривизна.

Основное отличие данной работы от существующей теории приспособляемости балок заключается в другом математическом определении пластического приспособления конструкций во множестве нагрузок. Это дало возможность провести правильное доказательство достаточных условий приспособляемости. Доказательство необходимых условий не является тривиальным и также содержится в работе.

Вводится определение критической «нагрузки» с точки зрения приспособляемости в ограниченном множестве нагрузок и приводятся так называемые статические и кинематические теоремы о приспособляемости. В основу теории входят: обычный упругий анализ конструкции и метод предельных нагрузок.

В работе представлены достаточные условия приспособляемости балок с произвольным поперечным сечением выраженные как функции от изгибающих моментов.

Summary

SHAKE-DOWN THEORY OF BEAMS

The beam structures considered in the paper are subject mainly to bending moments, the influence of other stresses on the plastic yielding of the cross-section being neglected. The plastic hinges hypothesis is assumed to hold, and the first part of the paper is based upon the ideal *moment-curvature* relation.

The main difference between the presented approach and the earlier theories consists in the introduction of a different definition of plastic shake-down of structures in the set of loadings, what made it possible

to derive the sufficient conditions of shake-down. With the new definition, the derivation of the necessary condition becomes non-trivial; the corresponding proof is given in the paper.

The definition of *critical loadings* with respect to the shake-down phenomenon in a bounded set of loadings is also introduced, and the so-called statical and kinematical shakedown theorems are given. Particular cases of the presented theory are the conventional, elastic structural analysis and the limit analysis.

The sufficient conditions of shake-down for beams of arbitrary cross-section expressed in terms of bending moments have been given.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 stycznia 1970 r.