

GEŚTE HEKSAGONALNE SIATKI SPRĘŻYSTE

PIOTR K L E M M (ŁÓDŹ), CZESŁAW W O Ź N I A K (WARSZAWA)

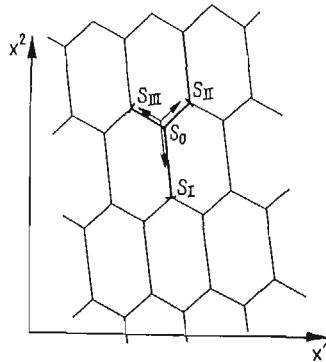
Modele ciągle gęstych i regularnych siatek sprężystych o doskonale sztywnych węzłach zostały określone dla różnych rodzajów siatek, [1, 2, 3]. Dotychczasowe opracowania, których przegląd zawiera książka [3], nie obejmują jednak ważnej w zastosowaniach technicznych siatki heksagonalnej. Schemat takiej siatki przedstawia rys. 1.

Celem tej pracy jest wyprowadzenie podstawowych równań modelu ciągłego takiej siatki. Modele ciągle różnych gęstych i regularnych siatek, utworzonych ze sprężystych prętów sztywno połączonych w węzłach, są opisywane równaniami anizotropowego ośrodka Cosseratów z pewną wewnętrzną «włóknistą» strukturą [1]. Modele ciągle poszczególnych siatek różnią się między sobą tylko budową tensorów sztywności sprężystej, występujących w związkach konstytutywnych. Tym samym rozważania tej pracy dotyczą w pierwszym rzędzie budowy potencjału sprężystego rozpatrywanych siatek, z którego wyprowadzamy związki konstytutywne oraz, przy wykorzystaniu podejścia wariacyjnego, także równania równowagi. Przyjmujemy, że wszystkie pręty są pryzmatyczne, a każde trzy pręty schodzące się w jednym węźle mają wspólną płaszczyznę symetrii sprężystej. Zakładamy ponadto, że odkształcenia są małe. Oba powyższe założenia prowadzą do rozdzielenia związków między stanem napięcia a odkształcenia na niezależne równania stanu «tarczowego» i «płytkowego». W związku z tym, w pierwszym punkcie pracy rozpatrujemy tarcze siatkowe, a w drugim — płyty siatkowe przyjmując, że siatka jest kształtowana na płaszczyźnie. Siatki heksagonalne kształtowane na dowolnej powierzchni omawiamy w trzecim punkcie pracy. Zakładamy jednocześnie, że są spełnione wszystkie założenia dotyczące stosowalności modelu ciągłego siatki [3].

1. Tarcze siatkowe

Każdą siatkę heksagonalną możemy traktować jako złożoną z wycinków w kształcie litery Y (rys. 1), połączonych ze sobą w punktach, które nazwijmy węzłami ograniczającymi (przekroje przy tych węzłach oznaczono na rys. 1 przez S_A , $A = I, II, III$). Oprócz węzłów ograniczających, siatka zawiera także po jednym węźle w obrębie każdego wycinka (węzeł S_0 na rys. 1); węzły te nazwijmy węzłami pośrednimi. Celem określenia, które węzły są ograniczające, a które pośrednie — wystarczy wyróżnić jeden «typowy» wycinek siatki,

co jest równoznaczne z podziałem całej siatki na rozłączne wycinki, powiązane węzłami ograniczającymi. Istnieją dwa sposoby podziału rozważanej siatki na wycinki (węzły ograniczające przy jednym podziale stają się węzłami pośrednimi przy drugim i odwrotnie); w dalszym ciągu przyjmujemy jako dany jeden z nich. Płaszczyznę π , na której jest kształtowana siatka, parametryzujemy prostokątnym układem współrzędnych kartezjańskich x^k ¹⁾. Rozpatrując najpierw tarcze siatkowe, płaszczyznę π traktujemy jako płaszczyznę



Rys. 1

obciążenia. Ponieważ jest to z założenia płaszczyzna symetrii sprężystej tarczy, przeto w ramach teorii I rzędu możemy przyjąć, że wszystkie węzły siatki doznają przesunięć i obrotów w płaszczyźnie π [3]. Traktując układ jako regularny [3], wprowadzimy różniczkowalne funkcje $u_K = u_K(x^1, x^2)$, $v = v(x^1, x^2)$, które:

1) w punktach płaszczyzny π odpowiadającym węzłom ograniczającym przyjmują wartości kolejno równe przesunięciom tych węzłów (w kierunku osi x^k) oraz ich kątom obrotu,

2) w każdym sześciokącie odpowiadającym jednemu «oczku» siatki możemy z wystarczającym przybliżeniem traktować jako liniowe.

Wprowadzimy następnie różniczkowalne funkcje $u_K^* = u_K^*(x^1, x^2)$, $v^* = v^*(x^1, x^2)$, które w analogiczny sposób opisują składowe wektora przesunięcia oraz obrót pośrednich węzłów siatki. Funkcje u_K^* i v^* wyrazimy przez funkcje u_K i v oraz ich pochodne. W tym celu rozpatrzmy typowy wycinek siatki (rys. 1). Składowe wektora przesunięcia i obroty $u_K(S_A)$, $v(S_A)$ przekrojów S_A przy węzłach ograniczających wycinek możemy przyjąć jako równe²⁾

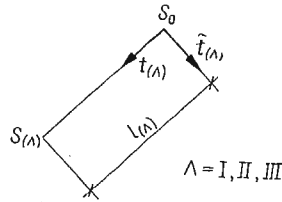
$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_K(S_A) &= u_K + t_{(A)}^L l_{(A)} u_{K,L}, \\ v(S_A) &= v + t_{(A)}^L l_{(A)} v_{,L}, \end{aligned}$$

przy czym $t_{(A)}^L$ są składowymi wektorów jednostkowych $t_{(A)}$ oraz $l_{(A)}$ są odległościami węzła ograniczającego od węzła pośredniego (rys. 2). Wartości funkcji u_K , v i ich pochodnych we wzorze (1.1) i dalej należy przyjmować w punkcie S_0 . Oznaczmy przez $N_{(A)}$, $Q_{(A)}$, $K_{(A)}$ kolejno siłę podłużną, siłę poprzeczną oraz moment zginający, działające w przekroju

¹⁾ Wskaźniki K, L, M przebiegają ciąg 1, 2 — obowiązuje dla tych wskaźników konwencja sumacyjna.

²⁾ Wskaźnik A przebiega ciąg I, II i III, pochodną cząstkową oznaczamy przecinkiem.

przy węźle pośrednim S_0 na ten węzeł. Oznaczmy następnie przez $E_{(A)}$ $A_{(A)}$ i $E_{(A)}$ $J_{(A)}$ kolejno sztywność podłużną i sztywność zginania pręta S_0-S_A . Z uwagi na regularność układu wszystkie te wielkości traktujemy jako różniczkowalne funkcje argumentów x^1, x^2 [3].



Rys. 2

Zakładając jednorodność i liniową sprężystość każdego pręta S_0-S_A mamy (porównaj rys. 2)

$$N_{(A)} = \frac{E_{(A)}A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K [u_K(S_{(A)}) - u_K^*],$$

$$Q_{(A)} = -\frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \left[\frac{v(S_{(A)}) + \tilde{v}}{2} - \tilde{t}_{(A)}^K \frac{u_K(S_{(A)}) - u_K^*}{l_{(A)}} \right],$$

$$\check{K}_{(A)} = -\frac{2E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \left[v(S_{(A)}) + 2\tilde{v} - 3\tilde{t}_{(A)}^K \frac{u_K(S_{(A)}) - u_K^*}{l_{(A)}} \right], \quad \tilde{t}_{(A)}^K \equiv \varepsilon_L^K t_{(A)}^L,$$

co po uwzględnieniu (1.1) prowadzi do

$$N_{(A)} = E_{(A)}A_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{E_{(A)}A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \Delta u_K,$$

$$Q_{(A)} = \frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \varkappa_K -$$

$$(1.2) \quad -\frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^3} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta u_K - \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \Delta v,$$

$$\hat{K}_{(A)} = -2E_{(A)}J_{(A)} t_{(A)}^K \varkappa_K + \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta u_K -$$

$$-\frac{4E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \Delta v,$$

gdzie oznaczono

$$(1.3) \quad \gamma_{LK} \equiv u_{K,L} + \varepsilon_{KL} v,$$

$$\varkappa_K \equiv v_{,K}$$

oraz

$$(1.4) \quad \Delta u_K = u_K^* - u_K,$$

$$\Delta v = \tilde{v} - v.$$

Warunki równowagi węzła pośredniego S_0 mają postać

$$(1.5) \quad \sum_A (t_{(A)}^M N_{(A)} + \tilde{t}_{(A)}^M Q_{(A)}) + b_*^M = 0,$$

$$\sum_A \check{K}_{(A)} + h_* = 0,$$

w której b_*^M, h_* są zewnętrznymi siłami przyłożonymi do tego węzła. Podstawiając do (1.5) prawe strony wyrażeń (1.2), otrzymamy układ trzech równań dla trzech różnic (1.4)

$$(1.6) \quad \sum_A \left(\frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^3} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K + \frac{E_{(A)}A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^M t_{(A)}^K \right) \Delta u_K + \sum_A \left(\frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^M \right) \Delta v =$$

$$= \sum_A t_{(A)}^L \left(E_{(A)}A_{(A)} t_{(A)}^M t_{(A)}^K + \frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K \right) \gamma_{LK} - \sum_A \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K \varkappa_K + b_*^M,$$

$$\sum_A \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta u_K + \sum_A \frac{4E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \Delta v = - \sum_A 2E_{(A)}J_{(A)} t_{(A)}^K \varkappa_K +$$

$$+ \sum_A \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} + h_*.$$

Wprowadzimy symetryczną macierz 3×3 , podzieloną na cztery bloki

$$\begin{bmatrix} D_{KL}, & D_K \\ D_K, & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_1 \\ D_{21} & D_{22} & D_2 \\ D_1 & D_2 & D \end{bmatrix}$$

oraz zdefiniowaną związkami

$$(1.7) \quad \begin{bmatrix} D_{KL}; & D_K \\ D_K; & D \end{bmatrix} \equiv \left[\begin{array}{l} \sum_A (12E_{(A)}J_{(A)}l_{(A)}^{-3} \tilde{t}_{(A)}^K \tilde{t}_{(A)}^L + E_{(A)}A_{(A)}l_{(A)}^{-1} t_{(A)}^K t_{(A)}^L); \quad \sum_A 6E_{(A)}J_{(A)}l_{(A)}^{-2} \tilde{t}_{(A)}^K \\ \sum_A 6E_{(A)}J_{(A)}l_{(A)}^{-2} \tilde{t}_{(A)}^K \quad ; \quad \sum_A 4E_{(A)}J_{(A)}l_{(A)}^{-1} \end{array} \right]^{-1}.$$

Rozwiązanie układu równań (1.6) napiszemy teraz w postaci

$$(1.8) \quad \begin{bmatrix} \Delta u_K \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{KL}; & D_K \\ D_K; & D \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \sum_A t_{(A)}^M (E_{(A)}A_{(A)} t_{(A)}^L t_{(A)}^N + 12E_{(A)}J_{(A)}l_{(A)}^{-2} \tilde{t}_{(A)}^L \tilde{t}_{(A)}^N) \\ \sum_A 6E_{(A)}J_{(A)}l_{(A)}^{-1} \tilde{t}_{(A)}^N t_{(A)}^M \end{bmatrix} \gamma_{MN} - \begin{bmatrix} \sum_A 6E_{(A)}J_{(A)}l_{(A)}^{-1} \tilde{t}_{(A)}^L t_{(A)}^M \\ \sum_A 2E_{(A)}J_{(A)} t_{(A)}^M \end{bmatrix} \varkappa_M + \begin{bmatrix} b_*^L \\ h_* \end{bmatrix} \right),$$

wyrażając tym samym Δu_K i Δv przez składowe stanu odkształcenia (1.3) oraz przez obciążenie węzłów pośrednich.

Oznaczmy przez $P_{(A)}$, $\tilde{P}_{(A)}$, $\check{M}_{(A)}$ kolejno siłę podłużną, siłę poprzeczną, moment zginający działające w płaszczyźnie $\pi(v)$ w przekroju połowiącym pręt $S_0 - S_A$ oraz zorientowanym dodatnim zwrotem wektora t_A . Mamy oczywiście $P_{(A)} = N_{(A)}$, $\tilde{P}_{(A)} = Q_{(A)}$ oraz $\check{M}_{(A)} = \check{K}_{(A)} - 0,5 Q_{(A)} l_{(A)}$, co zgodnie z (1.2) prowadzi do³⁾

$$(1.9) \quad \begin{aligned} P_{(A)} &= E_{(A)} A_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \Delta u_K, \\ \tilde{P}_{(A)} &= \frac{12 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{6 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \varkappa_K - \frac{12 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}^3} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta u_K - \\ &\quad - \frac{6 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \Delta v, \\ \check{M}_{(A)} &= E_{(A)} J_{(A)} t_{(A)}^K \varkappa_K - \frac{E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}} \Delta v. \end{aligned}$$

Podstawiając do (1.9) wyrażenia dla Δu_K i Δv dane związkami (1.8) oraz oznaczając

$$(1.10) \quad \begin{aligned} R_{(A)}^{KL} &\equiv E_{(A)} A_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L - \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^S \left[D_{SN} \sum_{d=I}^{III} t_{(d)}^K \left(E_{(d)} A_{(d)} t_{(d)}^N t_{(d)}^L + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{12 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}^2} \tilde{t}_{(d)}^N \tilde{t}_{(d)}^L \right) + D_S \sum_{d=I}^{III} \frac{6 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K \right], \\ R_{(A)}^K &\equiv \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^S \left(D_{SL} \sum_{d=I}^{III} \frac{6 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K + D_S \sum_{d=I}^{III} 2 E_{(d)} J_{(d)} t_{(d)}^K \right), \\ P_{(A)}^* &\equiv - \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{t_{(A)}} t_{(A)}^K (D_{KL} b_K^L + D_K h_K), \\ \check{R}_{(A)}^{KL} &\equiv \frac{12 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K \tilde{t}_{(A)}^L - \frac{12 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}^3} \tilde{t}_{(A)}^S \left[D_{SN} \sum_{d=I}^{III} t_{(d)}^K \left(E_{(d)} A_{(d)} t_{(d)}^N t_{(d)}^L + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{12 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}^2} \tilde{t}_{(d)}^N \tilde{t}_{(d)}^L \right) + D_S \sum_{d=I}^{III} \frac{6 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K \right] - \\ &\quad - \frac{6 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \left[D_N \sum_{d=I}^{III} t_{(d)}^K \left(E_{(d)} A_{(d)} t_{(d)}^N t_{(d)}^L + \frac{12 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}^2} \tilde{t}_{(d)}^N \tilde{t}_{(d)}^L \right) + \right. \\ &\quad \left. + D \sum_{d=I}^{III} \frac{6 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K \right], \end{aligned}$$

³⁾ Gdy $\Delta u^K = 0$ i $\Delta v = 0$, to wyrażenie dla $\tilde{P}_{(A)}$ nie sprowadza się jednak do podanego w [3] [wzór (9.20)], gdyż w niniejszej pracy wartości składowych stanu przemieszczenia i odkształcenia należy obliczać dla współrzędnych punktu skrajnego pręta (S_0), a nie w jego połowie, jak w [3].

$$\begin{aligned}
\check{R}_{(A)}^K &\equiv -\frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K + \frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^3} \check{t}_{(A)}^S \left[D_{SL} \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(\Delta)}J_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K + \right. \\
&\quad \left. + D_S \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} 2E_{(\Delta)}^1 J_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^K \right] - \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \left[D_L \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(\Delta)}J_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K + \right. \\
&\quad \left. + D \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} 2E_{(\Delta)} J_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^K \right], \\
\check{P}_{(A)}^* &\equiv -\frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^3} \check{t}_{(A)}^K (D_{KL} b_*^L + D_K h_*) - \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} (D_L b_*^L + D h_*), \\
(1.10) \quad \check{S}_{(A)}^K &\equiv E_{(A)} J_{(A)} t_{(A)}^K + \frac{E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}} \left(D_L \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K + D \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} 2E_{(\Delta)} J_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^K \right), \\
\check{S}_{(A)}^{KL} &\equiv -\frac{E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}} \left[D_N \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} t_{(\Delta)}^K \left(E_{(\Delta)} A_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^N t_{(\Delta)}^L + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{12E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}^2} \check{t}_{(\Delta)}^N \check{t}_{(\Delta)}^L \right) + D \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K \right], \\
M_{(A)}^* &\equiv -\frac{E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}} (D_L b_*^L + D h_*),
\end{aligned}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}
(1.11) \quad P_{(A)} &= R_{(A)}^{KL} \gamma_{KL} + R_{(A)}^K \varkappa_K + P_{(A)}^*, \\
\check{P}_{(A)} &= \check{R}_{(A)}^{KL} \gamma_{KL} + \check{R}_{(A)}^K \varkappa_K + \check{P}_{(A)}^*, \\
\check{M}_{(A)} &= \check{S}_{(A)}^K \varkappa_K + \check{S}_{(A)}^{KL} \gamma_{KL} + \check{M}_{(A)}^*.
\end{aligned}$$

Oznaczmy przez σ' potencjał sprężysty tarczy siatkowej. Przyjmując, że tarcza siatkowa jest obciążona tylko w węzłach, dla potencjału sprężystego otrzymamy wyrażenie

$$\begin{aligned}
(1.12) \quad \sigma' &= \frac{1}{F} \sum_A \left(\int_{+0,5l_{(A)}}^{0,5l_{(A)}} \frac{(\check{M}_{(A)} - x\check{P}_{(A)})^2}{2E_{(A)}J_{(A)}} dx + \int_{-0,5l_{(A)}}^{0,5l_{(A)}} \frac{P_{(A)}^2}{2E_{(A)}A_{(A)}} dx \right) = \\
&= \frac{1}{F} \sum_A \left(\frac{\check{M}_{(A)}^2 l_{(A)}}{2E_{(A)}J_{(A)}} + \frac{\check{P}_{(A)}^2 l_{(A)}^3}{24E_{(A)}J_{(A)}} + \frac{P_{(A)}^2 l_{(A)}}{2E_{(A)}J_{(A)}} \right),
\end{aligned}$$

w którym F jest polem sześciokąta stanowiącego «oczko» siatki oraz w którym za $P_{(A)}$, $\tilde{P}_{(A)}$, $\check{M}_{(A)}$, należy przyjąć wyrażenia (1.11). Po rozpisaniu prawej strony (1.12) zgodnie z (1.11) oraz po wprowadzeniu następujących tensorów sztywności sprężyste

$$\begin{aligned}
 A^{KLMN} &\equiv \frac{1}{F} \sum_{A=I}^{III} \left(\frac{l_{(A)}}{E_{(A)}J_{(A)}} \check{S}_{(A)}^{KL} \check{S}_{(A)}^{MN} + \frac{l_{(A)}^3}{12E_{(A)}J_{(A)}} \tilde{R}_{(A)}^{KL} \tilde{R}_{(A)}^{MN} + \frac{l_{(A)}}{E_{(A)}A_{(A)}} R_{(A)}^{KL} R_{(A)}^{MN} \right), \\
 (1.13) \quad C^{KL} &\equiv \frac{1}{F} \sum_{A=I}^{III} \left(\frac{l_{(A)}}{E_{(A)}J_{(A)}} \check{S}_{(A)}^K \check{S}_{(A)}^M + \frac{l_{(A)}^3}{12E_{(A)}J_{(A)}} \tilde{R}_{(A)}^K \tilde{R}_{(A)}^M + \frac{l_{(A)}}{E_{(A)}A_{(A)}} R_{(A)}^K R_{(A)}^M \right), \\
 'B^{KLM} &\equiv \frac{1}{F} \sum_{A=I}^{III} \left(\frac{l_{(A)}}{E_{(A)}J_{(A)}} \check{S}_{(A)}^{KL} \check{S}_{(A)}^M + \frac{l_{(A)}^3}{12E_{(A)}J_{(A)}} \tilde{R}_{(A)}^{KL} \tilde{R}_{(A)}^M + \frac{l_{(A)}}{E_{(A)}A_{(A)}} R_{(A)}^{KL} R_{(A)}^M \right),
 \end{aligned}$$

oraz poniższych wielkości charakteryzujących obciążenia węzłów pośrednich

$$\begin{aligned}
 p_*^{KL} &\equiv \frac{1}{F} \sum_{A=I}^{III} \left(\frac{l_{(A)}}{E_{(A)}J_{(A)}} \check{S}_{(A)}^{KL} \check{M}_{(A)}^* + \frac{l_{(A)}^3}{12E_{(A)}J_{(A)}} \tilde{R}_{(A)}^{KL} \tilde{P}_{(A)}^* + \frac{l_{(A)}}{E_{(A)}A_{(A)}} R_{(A)}^{KL} P_{(A)}^* \right), \\
 (1.14) \quad m_*^K &\equiv \frac{1}{F} \sum_{A=I}^{III} \left(\frac{l_{(A)}}{E_{(A)}J_{(A)}} \check{S}_{(A)}^K \check{M}_{(A)}^* + \frac{l_{(A)}^3}{12E_{(A)}J_{(A)}} \tilde{R}_{(A)}^K \tilde{P}_{(A)}^* + \frac{l_{(A)}}{E_{(A)}A_{(A)}} R_{(A)}^K P_{(A)}^* \right), \\
 \sigma'_* &\equiv \frac{1}{F} \sum_{A=I}^{III} \left[\frac{l_{(A)}}{2E_{(A)}J_{(A)}} (\check{M}_{(A)}^*)^2 + \frac{l_{(A)}^3}{24E_{(A)}J_{(A)}} (\tilde{P}_{(A)}^*)^2 + \frac{l_{(A)}}{2E_{(A)}A_{(A)}} (P_{(A)}^*)^2 \right],
 \end{aligned}$$

otrzymamy dla potencjału sprężystego wyrażenie

$$(1.15) \quad \sigma' = \frac{1}{2} A_1^{KLMN} \gamma_{KL} \gamma_{MN} + 'B^{KLM} \gamma_{KL} \varkappa_M + \frac{1}{2} C^{KL} \varkappa_K \varkappa_L + p_*^{KL} \gamma_{KL} + m_*^K \varkappa_K + \sigma'_*.$$

Jeżeli węzły pośrednie nie są obciążone, wtedy

$$p_*^{KL} = 0, \quad m_*^K = 0, \quad \sigma'_* = 0.$$

Gdy składowe stanu napięcia p^{KL} , m^K określimy związkami

$$(1.16) \quad p^{KL} \equiv \frac{\partial \sigma'}{\partial \gamma_{KL}}, \quad m^K \equiv \frac{\partial \sigma'}{\partial \varkappa_K},$$

czyli

$$\begin{aligned}
 (1.17) \quad p^{KL} &= A^{KLMN} \gamma_{MN} + 'B^{KLM} \varkappa_M + p_*^{KL}, \\
 m^K &= C^{KL} \varkappa_L + 'B^{MNK} \gamma_{MN} + m_*^K,
 \end{aligned}$$

to warunki równowagi przyjmą postać (por. [3], część I)

$$(1.18) \quad \begin{aligned}
 p^{KL}{}_{,K} + b^L &= 0, \\
 m^K{}_{,K} + \varepsilon_{KLP}{}^{KL} + h &= 0,
 \end{aligned}$$

w której b^L oraz h są funkcjami charakteryzującymi obciążenie węzłów ograniczających.

Określmy teraz związki zachodzące między wprowadzonymi składowymi stanu napięcia p^{KL} , m^K a wielkościami $P_{(A)}$, $\tilde{P}_{(A)}$, $\check{M}_{(A)}$. Zgodnie z definicjami (1.16), oraz związkiem (1.12), po oznaczeniu

$$(1.19) \quad \tilde{l}_{(A)} \equiv \frac{F}{l_{(A)}},$$

mamy

$$(1.20) \quad p^{KL} = \sum_{A=I}^{III} \frac{1}{\tilde{l}_{(A)}} \left(\frac{\tilde{R}_{(A)}^{KL} l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} J_{(A)}} \tilde{P}_{(A)} + \frac{R_{(A)}^{KL}}{E_{(A)} A_{(A)}} P_{(A)} + \frac{\check{S}_{(A)}^{KL}}{E_{(A)} J_{(A)}} \check{M}_{(A)} \right),$$

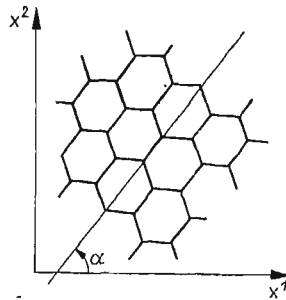
$$m^K = \sum_{A=I}^{III} \frac{1}{\tilde{l}_{(A)}} \left(\frac{\check{S}_{(A)}^K}{K_{(A)} J_{(A)}} \check{M}_{(A)} + \frac{\tilde{R}_{(A)}^K l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} J_{(A)}} \tilde{P}_{(A)} + \frac{R_{(A)}^K}{E_{(A)} A_{(A)}} P_{(A)} \right).$$

Należy zauważyć, że dla rozpatrywanych tu siatek składowe p^{KL} zależą także od $\check{M}_{(A)}$, a składowe m^K — od $P_{(A)}$ oraz $\tilde{P}_{(A)}$. Jeżeli obciążenia b_*^L i h^* przyłożone do węzłów pośrednich są takie, że $\Delta u_K = 0$ i $\Delta v = 0$, wtedy z (1.20), (1.9) i (1.11) wynika, że

$$\frac{\tilde{R}_{(A)}^{KL} l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} J_{(A)}} = \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L, \quad \frac{R_{(A)}^{KL}}{E_{(A)} A_{(A)}} = t_{(A)}^K t_{(A)}^L, \quad \frac{\check{S}_{(A)}^{KL}}{E_{(A)} J_{(A)}} = 0,$$

$$\frac{\check{S}_{(A)}^K}{E_{(A)} J_{(A)}} = t_{(A)}^K, \quad \frac{\tilde{R}_{(A)}^K l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} J_{(A)}} = -\frac{l_{(A)}}{2} t_{(A)}^K, \quad \frac{R_{(A)}^K}{E_{(A)} A_{(A)}} = 0,$$

co sprowadza wzory (1.20) do postaci podobnej jak w [3] [por. wzory (9.21) w cytowanej książce oraz ostatni odsyłacz].



Rys. 3

Równania równowagi (1.18), związki geometryczne (1.9) oraz związki między składowymi stanu napięcia i odkształcenia (1.17) tworzą podstawowy układ równań heksagonalnych tarcz siatkowych. Składowe tensorów sztywności sprężystej wyznaczamy na podstawie wzorów (1.13), (1.10) i (1.7). Układ równań dla rozpatrywanych siatek różni się formalnie od układów równań wyprowadzonych oraz omówionych w [3], tylko budową związków (1.17). Natomiast warunki brzegowe dla siatek heksagonalnych przyjmujemy w takiej samej postaci, jak dla siatek rozważanych w [3], w związku z czym nie będziemy ich tu omawiać.

Założmy teraz, że «oczka» siatki są sześciokątami foremnymi, oraz że sztywności wszystkich prętów są takie same. Wtedy

$$l_{(A)} = l, \quad E_{(A)}A_{(A)} = EA, \quad E_{(A)}J_{(A)} = EJ, \quad F = 1,5\sqrt{3}l^2.$$

Oznaczając $\Phi''(\alpha) \equiv \cos\alpha(3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$, $\Phi'(\alpha) \equiv \sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$, $\Phi(\alpha) \equiv [\Phi'(\alpha)]^2 + [\Phi''(\alpha)]^2$, $\lambda' \equiv l^2AJ^{-1}$, po przeprowadzeniu rachunku zgodnie z wzorami (1.12), (1.10) i (1.7) otrzymamy

$$(1.21) \quad \begin{aligned} A^{1111} &= A^{2222} = \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{EJ}{l^3} \left[3(4+\lambda') - \frac{(12-\lambda')^2}{12+\lambda'} \Phi(\alpha) \right], \\ A^{1122} &= A^{2211} = \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{EJ}{l^3} \left[\lambda' - 12 + \frac{(12-\lambda')^2}{12+\lambda'} \Phi(\alpha) \right], \\ A^{1212} &= A^{2121} = \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{EJ}{l^3} \left[63 + \lambda' - \frac{(12-\lambda')^2}{12+\lambda'} \Phi(\alpha) \right], \\ A^{2112} &= A^{1221} = \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{EJ}{l^3} \left[9 + \lambda' - \frac{(12-\lambda')^2}{12+\lambda'} \Phi(\alpha) \right]; \\ A^{KLLL} &= A^{LKLL} = A^{LLKL} = A^{LLLL} = 0, \quad L \neq K; \\ C^{11} &= C^{22} = \frac{4\sqrt{3}EJ(\lambda'+3)}{3l(\lambda'+12)}, \quad C^{12} = C^{21} = 0; \\ 'B^{111} &= -'B^{122} = -'B^{212} = -'B^{221} = \frac{2\sqrt{3}EJ\lambda'}{l^2(12+\lambda')} \Phi'(\alpha) \\ 'B^{222} &= -'B^{112} = -'B^{121} = -'B^{211} = -\frac{2\sqrt{3}EJ\lambda'}{l^2(12+\lambda')} \Phi''(\alpha) \end{aligned}$$

Pokazany na rys. 3 kąt α można przyjąć jako równy zero. Powyższe zależności są prawdziwe tylko w prostokątnym układzie współrzędnych kartezjańskich.

2. Płyty siatkowe

Zgodnie z przyjętymi założeniami, w płytach siatkowych stan przemieszczenia węzłów ograniczających opisywać będziemy różniczkowalnymi funkcjami $u = u(x^1, x^2)$, $v_K = v_K(x^1, x^2)$, które: 1) w punktach płaszczyzny π odpowiadającym węzłom ograniczającym są kolejno równe przesunięciom tych węzłów (w kierunku normalnym do π) oraz składowym wektora małego obrotu (w płaszczyznach normalnych do π); 2) w każdym sześciokącie odpowiadającym jednemu «oczku» siatki możemy traktować jako liniowe.

Dla dowolnego typowego wycinka siatki (rys. 3) mamy teraz

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u(S_A) &= u + t_{(A)}^L l_{(A)} u_{,L}, \\ v_K(S_A) &= v_K + t_{(A)}^L l_{(A)} v_{K,L}, \end{aligned}$$

gdzie wartości funkcji u , v_K oraz ich pochodnych należy przyjmować w punkcie S_0 . Przesunięcia i składowe wektora małego obrotu pośredniego węzła S_0 tego wycinka oznaczymy przez u^* , v_K^* (rys. 1). Oznaczmy następnie przez $K_{(A)}$, $\tilde{K}_{(A)}$, $\check{Q}_{(A)}$ kolejno moment skręcający, moment zginający i siłę poprzeczną w przekroju przy węźle pośrednim S_0 , działające na ten węzeł w przekroju przywęzłowym S_A . Oznaczając dalej przez $C_{(A)}$, $E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}$ kolejno sztywność skręcania i zginania pręta S_0-S_A , przy analogicznych założeniach, jak w poprzednim punkcie pracy, otrzymamy

$$K_{(A)} = C_{(A)} t_{(A)}^K \frac{v_K(S_A) - v_K^*}{l_{(A)}},$$

$$\tilde{K}_{(A)} = -\frac{2E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \left[\tilde{t}_{(A)}^K (v_K(S_A) + 2v_K^*) + 3 \frac{u(S_A) - u^*}{l_{(A)}} \right],$$

$$\check{Q}_{(A)} = \frac{12E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \left[\tilde{t}_{(A)}^K \frac{v_K(S_A) + v_K^*}{2} + \frac{u(S_A) - u^*}{l_{(A)}} \right].$$

Oznaczmy

$$(2.2) \quad \Delta v_K \equiv v_K^* - v_K, \quad \Delta u \equiv u^* - u,$$

oraz wprowadźmy składowe stanu odkształcenia płyty siatkowej [3]

$$(2.3) \quad \alpha_{KL} = v_{L,K},$$

$$\gamma_K = u_{,K} + \varepsilon_{KL} v^L.$$

Zgodnie z (2.1) otrzymamy wtedy

$$K_{(A)} = C_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \alpha_{LK} - \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \Delta v_K,$$

$$(2.4) \quad \tilde{K}_{(A)} = -2E_{(A)}\tilde{J}_{(A)} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \alpha_{LK} - \frac{6E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \gamma_K + \frac{6E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \Delta u - \frac{4E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta v_K,$$

$$\check{Q}_{(A)} = \frac{12E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K \gamma_K + \frac{6E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \alpha_{LK} - \frac{12E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^3} \Delta u + \frac{6E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta v_K.$$

Oznaczając przez b_* , h_*^M obciążenie węzła pośredniego S_0 siłą (normalną do płaszczyzny π) oraz momentem (którego wektor jest styczny do π), warunki równowagi tego węzła napiszemy w postaci

$$(2.5) \quad \sum_{A=1}^{\text{III}} (t_{(A)}^M K_{(A)} + \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{K}_{(A)}) + h_*^M = 0,$$

$$\sum_{A=1}^{\text{III}} \check{Q}_{(A)} + b_* = 0.$$

Podstawiając do (2.5) prawe strony wyrażeń (2.4), otrzymamy układ trzech równań dla trzech wielkości Δv_K , Δu

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{A=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^M \Delta u + \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^M t_{(A)}^K + \frac{4E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K \right) \Delta v_K = \\
 & = - \sum_{A=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K \gamma_K - \sum_{A=1}^{\text{III}} (2E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K - C_{(A)} t_{(A)}^M t_{(A)}^K) t_{(A)}^L \varkappa_{LK} + h_*^M, \\
 (2.6) \quad & - \sum_{A=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta v_K + \sum_{A=1}^{\text{III}} \frac{12E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^3} \Delta u = \sum_{A=1}^{\text{III}} \frac{12E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K \gamma_K + \\
 & + \sum_{A=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \varkappa_{LK} + b_*.
 \end{aligned}$$

Wprowadzimy symetryczną macierz 3×3 , utworzoną z bloków o wyrazach

$$\begin{bmatrix} H_{KL}, H_K \\ H_K, H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_1 \\ H_{21} & H_{22} & H_2 \\ H_1 & H_2 & H \end{bmatrix}$$

oraz zdefiniowaną wzorem

$$(2.7) \quad \begin{bmatrix} H_{KL}, H_K \\ H_K, H \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sum_A (C_{(A)} l_{(A)}^{-1} t_{(A)}^M t_{(A)}^K + 4E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-1} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K); & - \sum_A 6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-2} \tilde{t}_{(A)}^M \\ - \sum_A 6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-2} \tilde{t}_{(A)}^M & ; \sum_A 12E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-3} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Rozwiązanie układu równań (2.6) możemy wtedy napisać w postaci

$$(2.8) \quad \begin{bmatrix} \Delta v_K \\ \Delta u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{KL}, H_K \\ H_L, H \end{bmatrix} \left(- \begin{bmatrix} \sum_A 6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-1} t_{(A)}^L t_{(A)}^M \\ - \sum_A 12E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-2} t_{(A)}^M \end{bmatrix} \gamma_M - \begin{bmatrix} \sum_A (2E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-1} \tilde{t}_{(A)}^L \tilde{t}_{(A)}^K - C_{(A)} t_{(A)}^L t_{(A)}^K) t_{(A)}^M \\ - \sum_A 6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-1} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^M \end{bmatrix} \varkappa_{MN} + \begin{bmatrix} h_*^L \\ b_* \end{bmatrix} \right).$$

Oznaczmy teraz przez $M_{(A)}$, $\tilde{M}_{(A)}$, $\tilde{P}_{(A)}$ kolejno moment skręcający, moment zginający i siłę poprzeczną (działające w płaszczyznach normalnych do π) w przekroju połowicznym

pręć $S_0 S_A$ oraz zorientowanym dodatnim zwrotem wektora $t_{(A)}$. Mamy tutaj $M_{(A)} = K_{(A)}$, $\tilde{M}_{(A)} = \tilde{K}_{(A)} + 0,5 l_{(A)} \check{Q}_{(A)}$, $\check{P}_{(A)} = \check{Q}_{(A)}$ co zgodnie z (2.4) prowadzi do⁴⁾

$$(2.9) \quad \begin{aligned} M_{(A)} &= C_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \varkappa_{LK} - \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \Delta v_K, \\ \tilde{M}_{(A)} &= E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \varkappa_{LK} - \frac{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta v_K, \\ \check{P}_{(A)} &= \frac{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K \gamma_K + \frac{6 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \varkappa_{LK} - \\ &\quad - \frac{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^3} \Delta u + \frac{6 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta v_K. \end{aligned}$$

Podstawiając do (2.9) wyrażenia dla Δu i Δv_K określone związkami (2.8) oraz oznaczając

$$(2.10) \quad \begin{aligned} S_{(A)}^{KL} &\equiv C_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L + \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^S \left[H_{SN} \sum_{\Delta=I}^{III} t_{(\Delta)}^K (2 E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)} \tilde{t}_{(\Delta)}^N \tilde{t}_{(\Delta)}^L - \right. \\ &\quad \left. - C_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^N t_{(\Delta)}^L) - H_S \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{6 E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K \right], \\ S_{(A)}^K &\equiv \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^S \left(H_{SL} \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{6 E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K - H_S \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{12 E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}^2} t_{(\Delta)}^K \right), \\ M_{(A)}^* &\equiv - \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K (H_{KL} h_*^L + H_K b_*), \\ \tilde{S}_{(A)}^{KL} &\equiv E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} t_{(A)}^K \tilde{t}_{(A)}^L + \frac{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^S \left[H_{SN} \sum_{\Delta=I}^{III} t_{(\Delta)}^K (2 E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)} \tilde{t}_{(\Delta)}^N \tilde{t}_{(\Delta)}^L - \right. \\ &\quad \left. - C_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^N t_{(\Delta)}^L) - H_S \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{6 E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K \right], \\ \tilde{S}_{(A)}^K &\equiv \frac{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^S \left(H_{SL} \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{6 E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K - H_S \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{12 E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}^2} t_{(\Delta)}^K \right), \\ \tilde{M}_{(A)}^* &\equiv - \frac{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K (H_{KL} h_*^L + H_K b_*), \\ \check{P}_{(A)}^K &\equiv \frac{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K + \frac{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^3} \left(H_L \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{6 E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K - \right. \end{aligned}$$

⁴⁾ Gdy $\Delta u = 0$ i $\Delta v_K = 0$, to wyrażenia dla $M_{(A)}$ i $\tilde{M}_{(A)}$ sprowadzają się do podanych w [3], natomiast w wyrażeniu dla $\check{P}_{(A)}$ pozostaje składnik zależny od \varkappa_{LK} . Powód występowania takiego składnika wyjaśniono w poprzednim odsyłaczu.

$$\begin{aligned}
& -H \sum_{d=1}^{\text{III}} \frac{12 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)}}{l_{(d)}^2} t_{(d)}^K \Big) - \frac{6 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)}}{l_{(d)}^2} \tilde{t}_{(d)}^S \left(H_{SL} \sum_{d=1}^{\text{III}} \frac{6 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - H_S \sum_{d=1}^{\text{III}} \frac{12 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)}}{l_{(d)}^2} t_{(d)}^K \right), \\
(2.10) \quad \check{R}_{(A)}^{KL} & \equiv \frac{6 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^L t_{(A)}^K + \frac{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^3} \left[H_N \sum_{d=1}^{\text{III}} t_{(d)}^K (2 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)} \tilde{t}_{(d)}^N \tilde{t}_{(d)}^L - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - C_{(d)} t_{(d)}^L t_{(d)}^L) - H \sum_{d=1}^{\text{III}} \frac{6 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K \right] - \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{6 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^S \left[H_{SN} \sum_{d=1}^{\text{III}} (2 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)} \tilde{t}_{(d)}^N \tilde{t}_{(d)}^L - C_{(d)} t_{(d)}^N t_{(d)}^L) t_{(d)}^K - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - H_S \sum_{d=1}^{\text{III}} \frac{6 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K \right], \\
\check{P}_{(A)}^* & \equiv - \frac{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^3} (H_L h_*^L + H b_*) + \frac{6 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K (H_{KL} h_*^L + H_K b_*),
\end{aligned}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}
(2.11) \quad M_{(A)} & = S_{(A)}^{KL} \varkappa_{KL} + S_{(A)}^K \gamma_K + M_{(A)}^*, \\
\tilde{M}_{(A)} & = \tilde{S}_{(A)}^{KL} \varkappa_{KL} + \tilde{S}_{(A)}^K \varkappa_K + \tilde{M}_{(A)}^*, \\
\check{P}_{(A)} & = \check{R}_{(A)}^K \gamma_K + \check{R}_{(A)}^{KL} \varkappa_{KL} + \check{P}_{(A)}^*.
\end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów (2.11) możemy wyznaczyć potencjał sprężysty σ'' płyty siatkowej. Przyjmując, że obciążenia zewnętrzne płyty są zaczepione tylko w węzłach, otrzymamy

$$\begin{aligned}
(2.12) \quad \sigma'' & = \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\int_{-0,5l_{(A)}}^{0,5l_{(A)}} \frac{(\tilde{M}_{(A)} + x\check{P}_{(A)})^2}{2E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}} dx + \int_{-0,5l_{(A)}}^{0,5l_{(A)}} \frac{M_{(A)}^2}{2C_{(A)}} dx \right) = \\
& = \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{\check{P}_{(A)}^2 l_{(A)}^3}{24 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{\tilde{M}_{(A)}^2 l_{(A)}}{2 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{M_{(A)}^2 l_{(A)}}{2 C_{(A)}} \right),
\end{aligned}$$

przy czym za $\check{P}_{(A)}$, $\tilde{M}_{(A)}$ i $M_{(A)}$ należy tu podstawić wyrażenia (2.11). Po wprowadzeniu następujących tensorów sztywności sprężystej

$$\begin{aligned}
(2.13) \quad C^{KLMN} & \equiv \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{\check{R}_{(A)}^{KL} \check{R}_{(A)}^{MN} l_{(A)}^3}{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{\tilde{S}_{(A)}^{KL} \tilde{S}_{(A)}^{MN} l_{(A)}}{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{S_{(A)}^{KL} S_{(A)}^{MN} l_{(A)}}{C_{(A)}} \right), \\
A^{KL} & \equiv \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{\check{R}_{(A)}^K \check{R}_{(A)}^L l_{(A)}^3}{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{\tilde{S}_{(A)}^K \tilde{S}_{(A)}^L l_{(A)}}{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{S_{(A)}^K S_{(A)}^L l_{(A)}}{C_{(A)}} \right), \\
{}''B^{KLM} & \equiv \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{\check{R}_{(A)}^{KL} \check{R}_{(A)}^M l_{(A)}^3}{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{\tilde{S}_{(A)}^{KL} \tilde{S}_{(A)}^M l_{(A)}}{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{S_{(A)}^{KL} S_{(A)}^M l_{(A)}}{C_{(A)}} \right),
\end{aligned}$$

oraz wielkości charakteryzujących obciążenie węzłów pośrednich

$$(2.14) \quad \begin{aligned} m_*^{KL} &\equiv \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{\check{R}_{(A)}^{KL} l_{(A)}^3}{12 E_{(A)} \check{J}_{(A)}} \check{P}_{(A)}^* + \frac{\check{S}_{(A)}^{KL} l_{(A)}}{E_{(A)} \check{J}_{(A)}} \check{M}_{(A)}^* + \frac{S_{(A)}^{KL} l_{(A)}}{C_{(A)}} M_{(A)}^* \right), \\ p_*^K &\equiv \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{\check{R}_{(A)}^K l_{(A)}^3}{12 E_{(A)} \check{J}_{(A)}} \check{P}_{(A)}^* + \frac{\check{S}_{(A)}^K l_{(A)}}{E_{(A)} \check{J}_{(A)}} \check{M}_{(A)}^* + \frac{S_{(A)}^K l_{(A)}}{C_{(A)}} M_{(A)}^* \right), \\ \sigma_*'' &\equiv \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left[\frac{l_{(A)}^3}{24 E_{(A)} \check{J}_{(A)}} (\check{P}_{(A)}^*)^2 + \frac{l_{(A)}}{E_{(A)} \check{J}_{(A)}} (\check{M}_{(A)}^*)^2 + \frac{l_{(A)}}{C_{(A)}} (M_{(A)}^*)^2 \right], \end{aligned}$$

dla potencjału sprężystego płyty siatkowej otrzymamy wyrażenie

$$(2.15) \quad \sigma'' = C^{KLMN} \varkappa_{KL} \varkappa_{MN} + {}''B^{KLM} \varkappa_{KL} \gamma_M + A^{KL} \gamma_K \gamma_L + m_*^{KL} \varkappa_{KL} + p_*^K \gamma_K + \sigma_*''.$$

Jeżeli wprowadzimy składowe stanu napięcia zdefiniowane związkami

$$(2.16) \quad m^{KL} \equiv \frac{\partial \sigma''}{\partial \varkappa_{KL}}, \quad p^K \equiv \frac{\partial \sigma''}{\partial \gamma_K},$$

to muszą one spełniać następujące warunki równowagi (por. [3], część I), w których h^L i b są funkcjami charakteryzującymi obciążenia węzłów ograniczających

$$(2.17) \quad \begin{aligned} m^{KL}{}_{,K} + \varepsilon^L{}_K p^K + h^L &= 0, \\ p^K{}_{,K} + b &= 0. \end{aligned}$$

Zgodnie z (2.15) mamy jednocześnie

$$(2.18) \quad \begin{aligned} m^{KL} &= C^{KLMN} \varkappa_{MN} + {}''B^{KLM} \gamma_M + m_*^{KL}, \\ p^K &= A^{KL} \gamma_L + {}''B^{MKN} \varkappa_{MN} + p_*^K. \end{aligned}$$

Równania równowagi (2.17), związki (2.18) między składowymi stanu napięcia i odkształcenia oraz związki geometryczne (2.3) tworzą podstawowy układ równań teorii heksagonalnych płyt siatkowych (rozpatrywanych oczywiście przy stosowaniu ciągłego modelu tych płyt). Powyższy układ równań różni się od układu równań płyt siatkowych omawianych w [3] tylko inną budową tensorów sztywności C^{KLMN} , A^{KL} oraz występowaniem wielkości ${}''B^{KLM}$, m_*^{KL} , p_*^K . Warunki brzegowe mają natomiast taką samą postać jak w [3], w związku z czym nie będziemy ich tutaj omawiać.

Dla płyt siatkowych, omówionych w [3], między składowymi stanu napięcia, a wielkościami $M_{(A)}$, $\check{M}_{(A)}$, $\check{P}_{(A)}$, zachodzą związki

$$\begin{aligned} m^{KL} &= \sum_A (t_{(A)}^K t_{(A)}^L M_{(A)} + t_{(A)}^K \check{t}_{(A)}^L \check{M}_{(A)}) \check{I}_{(A)}^{-1}, \\ p^K &= \sum_A t_{(A)}^K \check{P}_{(A)} \check{I}_{(A)}^{-1}; \quad \check{I}_{(A)} \equiv \frac{F}{l_{(A)}}. \end{aligned}$$

Określmy teraz odpowiedniki tych związków dla płyt siatkowych heksagonalnych. Wynikają one z definicji (2.16) oraz wyrażenia (2.12) dla potencjału sprężystego. Przeprowa-

dzając różniczkowanie potencjału (2.12) podług \varkappa_{KL} i γ_K oraz korzystając z (2.11), otrzymamy

$$(2.19) \quad \begin{aligned} m^{KL} &= \sum_{A=I}^{III} \left(\frac{S_{(A)}^{KL}}{C_{(A)}} M_{(A)} + \frac{\tilde{S}_{(A)}^{KL}}{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} \tilde{M}_{(A)} + \frac{\check{R}_{(A)}^{KL} l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} \check{J}_{(A)}} \check{P}_{(A)} \right) \check{l}_{(A)}^{-1}, \\ p^K &= \sum_{A=I}^{III} \left(\frac{\check{R}_{(A)}^K l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} \check{J}_{(A)}} \check{P}_{(A)} + \frac{S_{(A)}^K}{C_{(A)}} M_{(A)} + \frac{\tilde{S}_{(A)}^K}{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} \tilde{M}_{(A)} \right) \check{l}_{(A)}^{-1}, \end{aligned}$$

przy czym wykorzystano tu oznaczenie (1.19). Są to związki między składowymi stanu napięcia, formalnie zdefiniowanymi przez (2.16), a momentami $M_{(A)}$, $\tilde{M}_{(A)}$ oraz siłami $\check{P}_{(A)}$ w przekrojach połowiących pręty siatki. Dla $\Delta u = 0$ i $\Delta v_K = 0$, związki (2.19) stają się podobne do odpowiednich związków dla płyt siatkowych omówionych w [3], które powyżej przytoczyliśmy.

Na zakończenie tego punktu rozpatrzmy jeszcze ważny w zastosowaniach przypadek szczególny, w którym «oczka» siatki są foremnymi sześciokątami, a sztywności wszystkich prętów schodzących się w każdym węźle są takie same. Wtedy $F = 1,5\sqrt{3}l^2$, a po wprowadzeniu kąta α , jak na rys. 3, oraz oznaczeniu

$$(2.20) \quad \begin{aligned} C &= C_{(A)}, & E\check{J} &= E_{(A)}\check{J}_{(A)}, & l &= l_{(A)}, & \lambda &\equiv \frac{C}{E\check{J}}, \\ \Phi'(\alpha) &\equiv \sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \\ \Phi''(\alpha) &\equiv \cos\alpha(3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha), \\ \Phi(\alpha) &\equiv [\Phi'(\alpha)]^2 + [\Phi''(\alpha)]^2, \end{aligned}$$

i po przeprowadzeniu rachunków zgodnie z wzorami (2.13), (2.10) i (2.7), otrzymamy

$$(2.21) \quad \begin{aligned} C^{1111} &= C^{2222} = \frac{\sqrt{3}E\check{J}}{12l} \left[4 + 3\lambda - \frac{(2+\lambda)^2}{4+\lambda} \Phi(\alpha) \right], \\ C^{1122} &= C^{2211} = \frac{\sqrt{3}E\check{J}}{12l} \left[-4 + \lambda + \frac{(2+\lambda)^2}{4+\lambda} \Phi(\alpha) \right], \\ C^{1212} &= C^{2121} = \frac{\sqrt{3}E\check{J}}{12l} \left[6 + \lambda - \frac{(2+\lambda)^2}{4+\lambda} \Phi(\alpha) \right], \\ C^{1221} &= C^{2112} = \frac{\sqrt{3}E\check{J}}{12l} \left[2 + \lambda - \frac{(2+\lambda)^2}{4+\lambda} \Phi(\alpha) \right]; \\ C_i^{KLLL} &= C_i^{LKLL} = C_i^{LLKL} = C_i^{LLLL} = 0, \quad K \neq L; \\ {}''B^{111} &= -{}''B^{122} = -{}''B^{212} = -{}''B^{221} = -\frac{2\sqrt{3}E\check{J}}{l^2} \frac{\Phi'(\alpha)}{4+\lambda}, \\ {}''B^{222} &= -{}''B^{112} = -{}''B^{121} = -{}''B^{211} = \frac{2\sqrt{3}E\check{J}}{l^2} \frac{\Phi''(\alpha)}{4+\lambda}; \\ A^{11} &= A^{22} = \frac{2\sqrt{3}E\check{J}}{3l^3} \left[6 - \frac{71\lambda}{2(4+\lambda)^2} \right], \quad A^{12} = A^{21} = 0. \end{aligned}$$

Rozpatrywana siatka ma trójkątną oś symetrii, bowiem

$$\Phi' \left(\alpha + \frac{2n\pi}{3} \right) = \Phi'(\alpha), \quad \Phi'' \left(\alpha + \frac{2n\pi}{3} \right) = \Phi''(\alpha), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Jeżeli siatka jest jednorodna, wtedy najdogodniej przyjąć układ współrzędnych w ten sposób, aby $\alpha = 0$.

3. Powłoki siatkowe

Gdy promienie krzywizny powierzchni, na której kształtujemy siatkę są wielokrotnie większe od długości poszczególnych prętów siatki, wtedy każdy wycinek siatki (wyodrębniony przekrojami S_I, S_{II}, S_{III} mający kształt litery Y) (por. rys. 1) możemy w przybliżeniu traktować tak, jak gdyby leżał on na płaszczyźnie stycznej do powierzchni w punkcie S_0 . Jeżeli płaszczyznę tę można ponadto uznać za płaszczyznę symetrii sprężystej wycinka, wtedy postać związków (1.17) oraz (2.18) nie ulega zmianie. Postępując podobnie, jak w [3], otrzymamy układ równań złożony z równań geometrycznych (kreska oznacza pochodną kowariantną, b_{KL} i e_{KL} są składowymi kowariantnymi drugiego tensora metrycznego powierzchni oraz dwuwektora Ricciego, w dowolnym układzie współrzędnych na powierzchni)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \gamma_{KL} &= u_{L/K} - b_{LK}u + e_{LK}v, \\ \gamma_K &= u_{/K} + b_K^L u_L + e_{KL}v^L, \\ \varkappa_{KL} &= v_{L/K} - b_{LK}v, \\ \varkappa_K &= v_{/K} + b_K^L v_L, \end{aligned}$$

równań równowagi

$$(3.2) \quad \begin{aligned} p^{KL}/_K - b_K^L p^K + b^L &= 0, \\ m^K/_K + e_{KL}p^{KL} + b_{KL}m^{KL} + h &= 0, \\ p^K/_K + b_{KL}p^{KL} + b &= 0, \\ m^{KL}/_K - b_K^L m^K + e^L{}_K p^K + h^L &= 0, \end{aligned}$$

oraz związków między składowymi stanu napięcia i odkształcenia

$$(3.3) \quad \begin{aligned} p^{KL} &= A^{KLMN} \gamma_{MN} + 'B^{KLM} \varkappa_M + p_*^{KL}, \\ m^K &= C^{KL} \varkappa_L + 'B^{MNK} \gamma_{MN} + m_*^K, \\ m^{KL} &= C^{KLMN} \varkappa_{MN} + ''B^{KLM} \gamma_M + m_*^{KL}, \\ p^K &= A^{KL} \gamma_K + ''B^{MNK} \varkappa_{MN} + p_*^K. \end{aligned}$$

Tensory sztywności sprężystej występujące w (3.3) wyznaczamy na podstawie wzorów (1.13), (1.10), (1.7) oraz (2.13), (2.10), (2.7). Przy wyznaczaniu wielkości p_*^{KL} , m_*^K , m_*^{KL} i p_*^K korzystamy z (1.14) i (2.14). Zagadnienia brzegowe dla powłok siatkowych heksagonalnych, a także dla takich tarcz i płyt formułujemy podobnie jak dla powłok siatkowych omówionych w [3], w związku z czym nie będziemy ich tu omawiać. Zauważmy także, że dla modelu ciągłego siatek heksagonalnych można napisać dwa równoważne układy równań w zależności od tego, które węzły przyjmiemy jako pośrednie, a które jako ograniczające (wektory $t_{(A)}$, $\tilde{t}_{(A)}$ różnią się wtedy znakiem). Zagadnienie to, a także przykłady zastosowania wyprowadzonych równań są tematem oddzielnego opracowania.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media II*, Arch. Mech. Stos., 6, 17 (1965), 777-799.
2. Cz. WOŹNIAK, *On the equations of lattice-type structures*, Arch. Mech. Stos., 6, 19 (1967).
3. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe. Podstawy teorii i przykłady obliczeń*, PWN, Warszawa 1970.

Резюме

ПЛОТНЫЕ ГЕКСАГОНАЛЬНЫЕ УПРУГИЕ РЕШЕТКИ

В работе выведены уравнения сплошной модели регулярных плотных гексагональных упругих решеток (рис. 2). Предполагается, что все узлы решетки являются жесткими, а стержни линейно упругими и однородными, и что каждых три стержня сходящихся в одном узле можно рассматривать как обладающие общей плоскостью упругой симметрии. Так как сплошные модели различных упругих решеток с жесткими узлами (описываемые с помощью уравнений анизотропной среды Коссера с особой «волоконистой» структурой [3]) отличаются друг от друга лишь видом тензоров упругой жесткости, в настоящей работе обсуждаются прежде всего соотношения связывающие компоненты напряженного состояния и деформации. При принятых предложениях эти соотношения разделяются на независимые уравнения для «дисковой» и «плитовой» задач. В последней части работы представлены уравнения для гексагональных решеток сформированных на некоторой поверхности. Для плоских решеток рассмотрен также важный частный случай, когда все ячейки решетки являются правильными шестигранниками, а жесткости всех стержней одинаковы.

Summary

DENSE ELASTIC LATTICES OF HEXAGONAL TYPE

The equations of the continuous model are derived in the paper for the case of regular dense lattices of the hexagonal type (Fig. 1). It is assumed that all the nodes of the lattice are rigid, all the bars are linearly elastic and homogeneous, and that each three bars joined together in the same node can be treated as elements possessing a common plane of elastic symmetry. Since continuous models for various elastic lattices with rigid nodes (described by the equations of the anisotropic Cosserat medium with *fibrous* structure [3]) differ only in the form of elastic rigidity tensors, considerations presented in the paper contain, first of all, the relations between the corresponding components of stress and strain. Under the introduced assumptions, the above relations can be separated into independent «disc» and «plate» problems. The last section is devoted entirely to the equations for hexagonal lattices formed on a surface. For plane lattices, the important case of lattices built of regular hexagons with the same rigidities of the bars is discussed in detail.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA
INSTYTUT MECHANIKI
UNIwersytetu WARSZAWSKIEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 stycznia 1970 r.