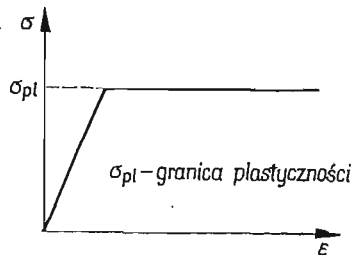


GRANICE OBSZARÓW PLASTYCZNYCH W ROZCIĄGANYCH ELEMENTACH
Z KARBEM LUB OTWOREM

JACEK K A P K O W Ś K I (WARSZAWA)

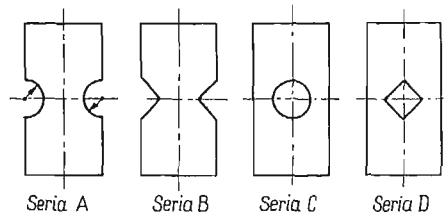
1. Wprowadzenie

W praktyce konstruktorskiej spotyka się wiele przypadków zastosowania rozciąganych prętów z karbami lub otworami o różnym kształcie. W sąsiedztwie tych nagłych zmian przekroju pojawiają się spiętrzenia naprężeń, które prowadzą do powstania stref uplastycznionych wskutek przekroczenia granicy plastyczności w tych obszarach. W miarę dalszego



Rys. 1

procesu wydłużania pręta te tzw. enklawy plastyczne rozszerzają się i w pewnym momencie dochodzi do uplastycznienia całego przekroju pręta. W technicznych zastosowaniach moment ten określa maksymalne obciążenie, jakie może przenieść pręt. Siłę wywołującą



Rys. 2

takie wydłużenie definiuje się jako nośność graniczną pręta. Odpowiada to przyjęciu modelu materiału sprężysto-plastycznego (rys. 1), to znaczy zaniedbaniu wzmocnienia materiału. W rzeczywistości pręt taki wskutek istnienia zjawiska wzmocnienia może prze-

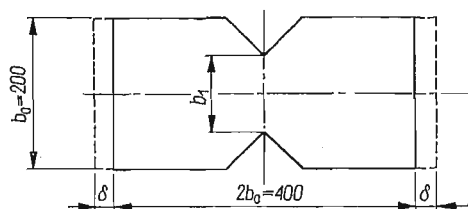
nosić siłę większą, ale związane z tym wydłużenia są tak duże, że praktycznie traci on wartość użytkową szczególnie w konstrukcjach maszynowych.

W niniejszej pracy przeprowadzono obliczenia rozkładu naprężeń i wyznaczono granice obszarów plastycznych dla czterech serii próbek o kształtach pokazanych na rys. 2. W każdej z serii wzięto pod uwagę próbki o stosunku $b_1/b_0 = 0,25; 0,50; 0,75$.

Wyniki zawarte w niniejszej pracy stanowią kontynuację badań, których rezultaty otrzymane przy innych warunkach brzegowych przedstawione zostały w pracy [12].

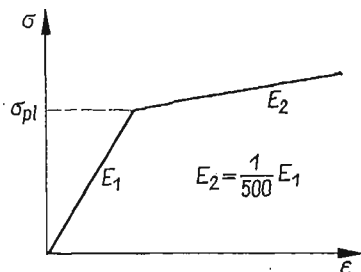
2. Podstawowe założenia

Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej UNIVAC-1107 przy użyciu metody elementów skończonych i przy założeniu płaskiego stanu naprężeń. Rozpatrywane próbki miały proporcje przedstawione na rys. 3.



Rys. 3

Warunkiem brzegowym było założenie równomiernego przemieszczenia δ na końcach próbki. Założono ponadto jednorodność i izotropowość materiału próbki, którego charakterystyka podana jest na rys. 4.



Rys. 4

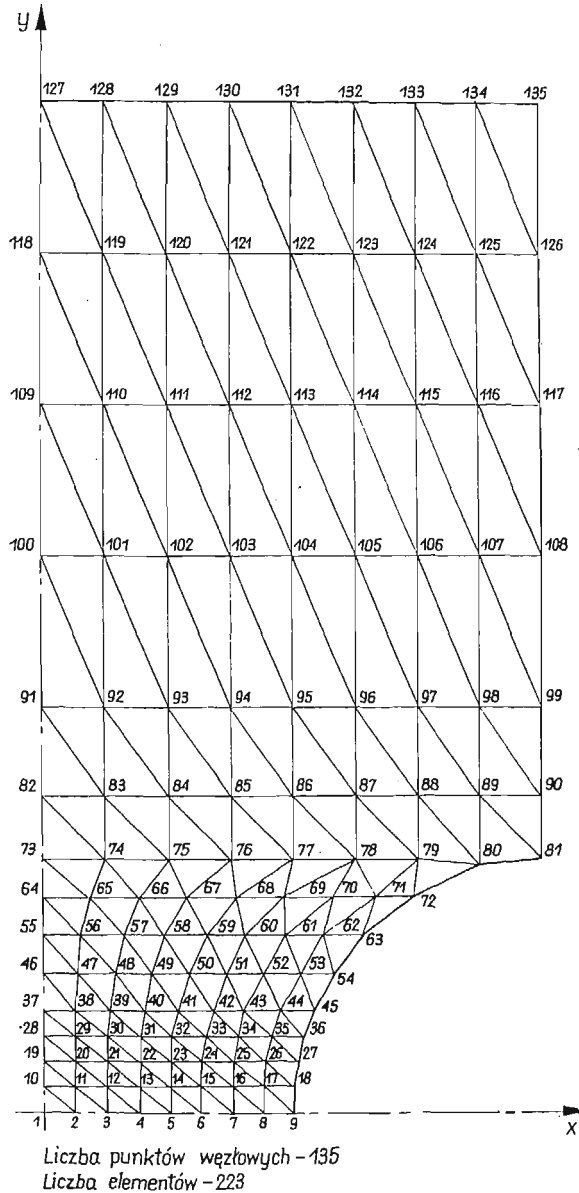
Założenie tego rodzaju charakterystyki z modułem $E_2 \neq 0$ podyktowane zostało specyfiką programu obliczeniowego, który przy $E_2 = 0$ prowadziłby do nieoznaczoności. Jednakże wydaje się, że przyjęcie $E_2 = 0,2\% E_1$ dostatecznie dokładnie odwzorowuje sprężysto-plastyczny model materiału.

Osiągnięcie stanu plastycznego zostało określone według hipotezy energii odkształcenia postaciowego Hubera-Misesa. W warunkach płaskiego stanu naprężenia kryterium z niej wynikające ma postać

$$(2.1) \quad \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_{pl}^2.$$

3. Metoda rozwiązania

Do rozwiązania postawionego problemu znalezienia rozkładu naprężeń zastosowano metodę elementów skończonych opisaną w [9] i [10].



Rys. 5

Ciągła płaska struktura zastąpiona została przez skończoną liczbę elementów trójkątnych połączonych w skończonej liczbie punktów węzłowych. Przykład takiego podziału pokazany jest na rys. 5. Liczba elementów i ich wymiary zawsze określone są przez wy-

maganą dokładność rachunku. W strefach gdzie spodziewany jest duży gradient naprężeń należy zakładać elementy odpowiednio mniejsze. Odształcenia ε_x , ε_y , γ_{xy} przy tym sposobie analizy zakładane są jako stałe w obrębie danego elementu. Przeto i naprężenia σ_x , σ_y , i τ_{xy} , które działają wzdłuż brzegów elementu są również stałe. Te naprężenia zastępowane są wypadkowymi działającymi w rogach elementu i nazywanymi *obciążeniami punktów węzłowych*.

Równowaga układu elementów może być wyrażona następującym równaniem macierzowym

$$(3.1) \quad [R] = [K][r],$$

gdzie $[R]$ jest macierzą obciążeń punktów węzłowych, $[K]$ — macierzą sztywności układu elementów, $[r]$ — macierzą przemieszczeń punktów węzłowych.

Macierz sztywności układu elementów zbudowana jest z podmacierzy opisujących sztywności poszczególnych elementów. Przyjęto następującą zależność macierzową pomiędzy naprężeniami i odształceniami dla elementu

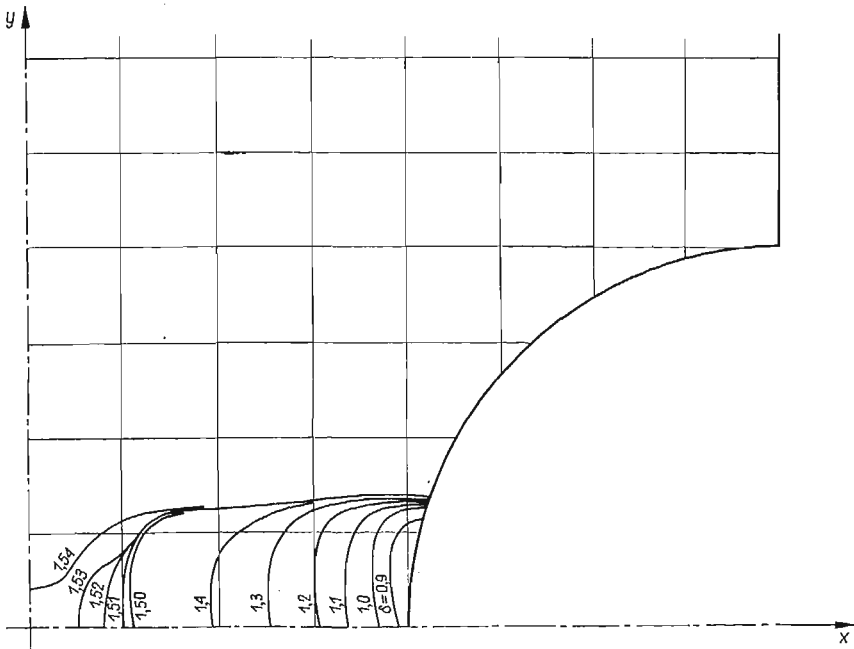
$$(3.2) \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}.$$

W przypadku rozwiązania sprężystego potrzebne jest tylko jednokrotne rozwiązanie układu (3.1). Wartości naprężeń przy innych obciążeniach mogą być otrzymane drogą liniowej ekstrapolacji. Przy analizie stanów sprężysto-plastycznych stosuje się procedurę kolejnych rozwiązań przy niewielkich wzrostach obciążenia. Odpowiada to zastąpieniu analizy nieliniowej przez sumę rozwiązań liniowych.

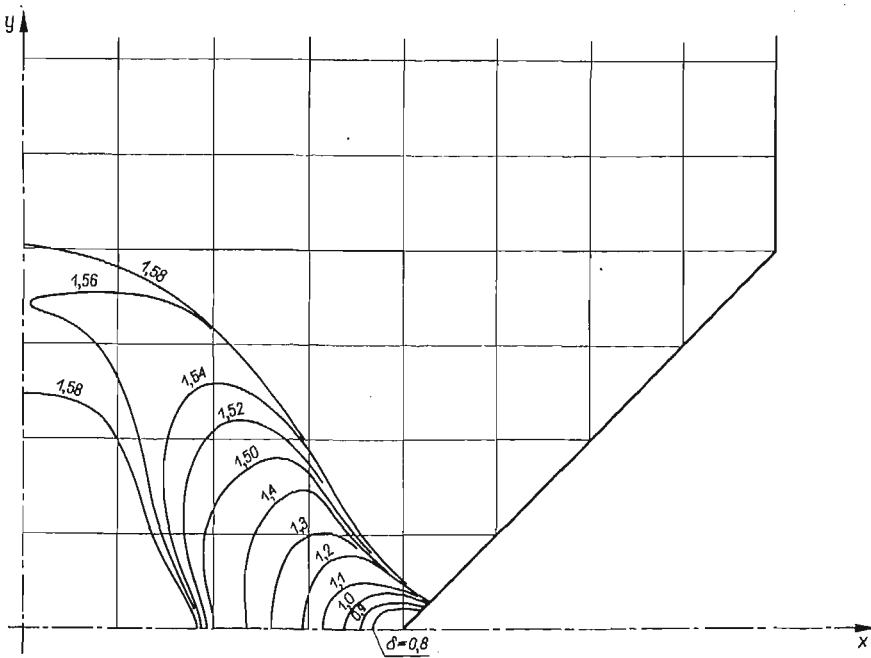
W niniejszej pracy obliczenia rozpoczynały się w zakresie sprężystym przy wstawieniu wartości E_1 i ν do macierzy sztywności. Procedura zawierała obliczenie naprężeń zredukowanych według (2.1) w każdym elemencie. Jeśli w jakimkolwiek elemencie naprężenie zredukowane osiągnęło wartość granicy plastyczności, wtedy w podmacierzy sztywności tego elementu wstawione zostało $E_2 = 1/500 E_1$ i $\nu = 0,5$ zamiast E_1 i ν . Ta czynność powtarzana była po każdym wzroście przemieszczenia δ . Obliczenie jednego przykładu zawarte było w 35–40 krokach. Dane wyjściowe podawały oprócz naprężeń i przemieszczeń dla każdego elementu i punktu węzłowego również naprężenia zredukowane, co pozwoliło wyznaczyć granice obszarów uplastycznionych. Zakończenie obliczeń następowało w chwili, gdy uplastyczniony został cały przekrój próbki i zwiększanie wydłużenia nie powodowało wzrostu naprężeń.

4. Wyniki obliczeń

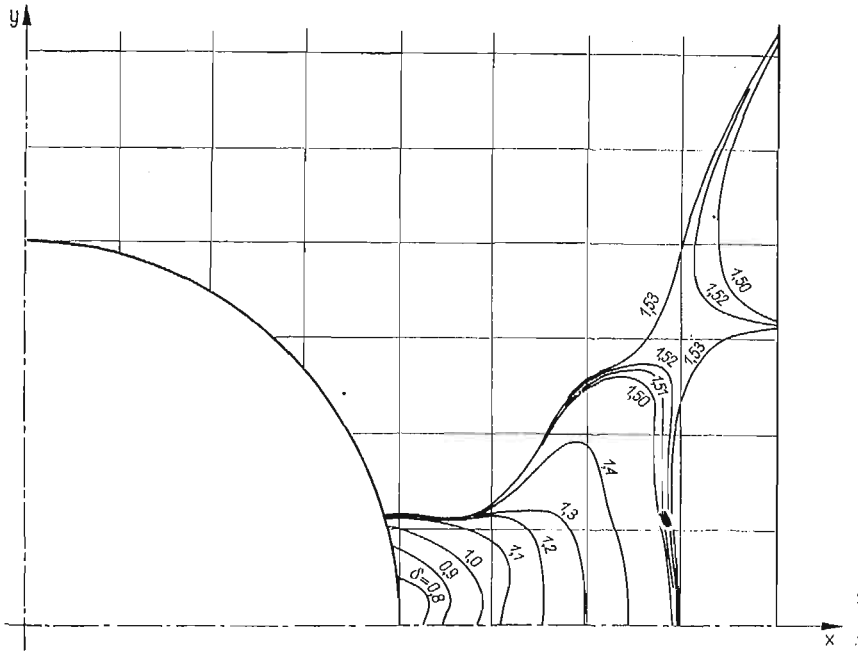
Na rysunkach 6–9 przedstawione są granice obszarów plastycznych przy danych wartościach przemieszczenia δ dla wybranych z każdej serii próbek o przewężeniu $b_1/b_0 = 0,5$.



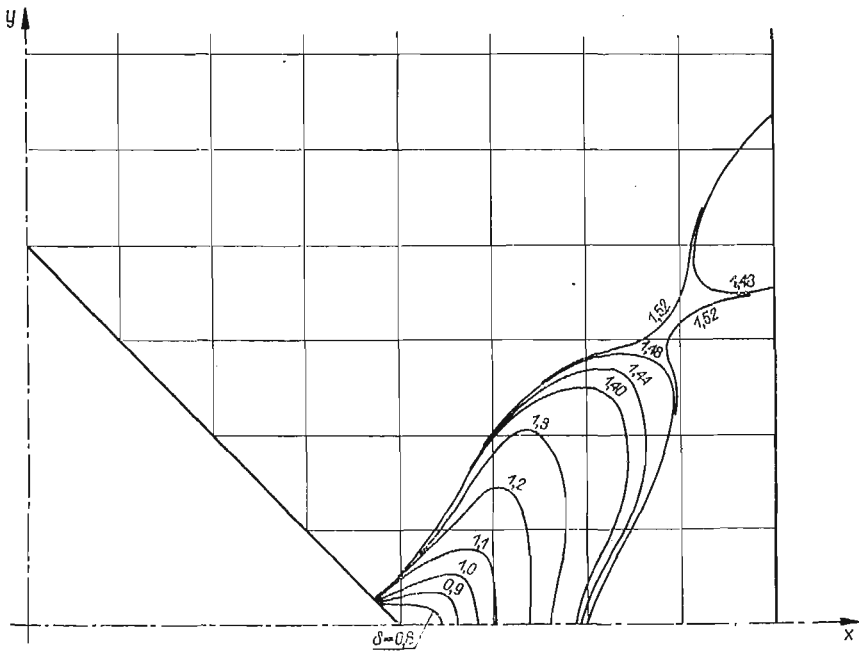
Rys. 6



Rys. 7

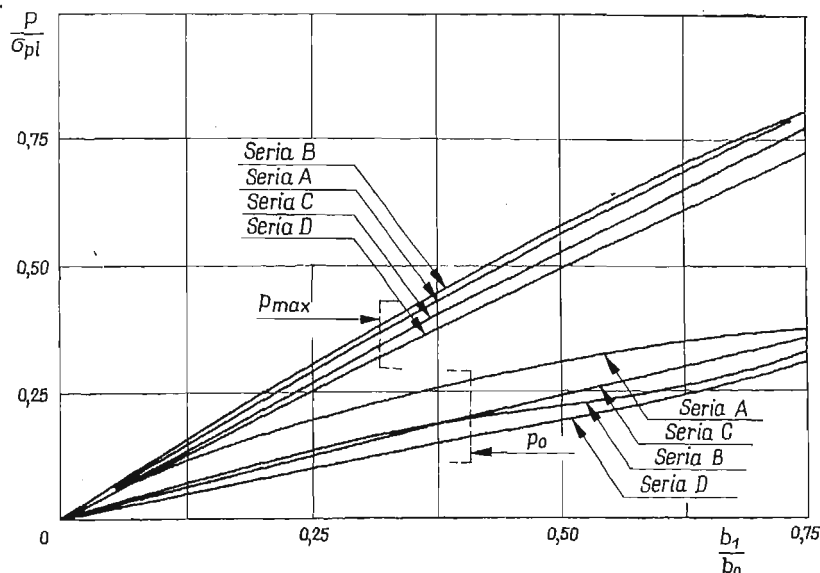


Rys. 8



Rys. 9

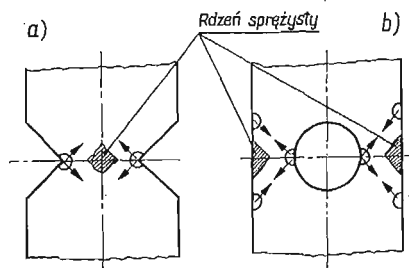
Na rysunku 10 wykreślono zależność obciążenia na końcu próbki powodującego pierwsze odkształcenia plastyczne (p_0) i obciążenia maksymalnego (p_{max}) od stosunku b_1/b_0 . Wielkości te wyznaczono przez planimetrywanie wykresu rozkładu naprężeń na końcach próbki i obliczenie wartości średniej odnoszonej potem do granicy plastyczności.



Rys. 10

5. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń wydaje się, że metoda elementów skończonych może być używana do rozwiązywania tego rodzaju problemów. Rozwiązanie polega na przeprowadzeniu odpowiedniego podziału na elementy oraz wprowadzeniu współrzędnych opisujących układ elementów i punktów węzłowych do programu. Ponadto do programu wprowadza się odpowiednie dane dotyczące warunków brzegowych. Jest zrozumia-



Rys. 11

łe, że dąży się zawsze do jak najmniejszych wymiarów elementów, jednakże należy pamiętać, że ich liczba ograniczona jest pojemnością pamięci maszyny liczącej.

Ujemną stroną metody jest względnie duży błąd otrzymywany przy wartościach naprężeń w punktach brzegowych. Tę trudność można przezwyciężyć przez rozpatrywanie naprężeń w elementach, a nie w punktach węzłowych. Jednak to znów wymaga zmniejszenia wymiarów elementów.

Przechodząc do omówienia wyników obliczeń należy zauważyć, że tylko w kilku przypadkach proces uplastycznienia przesuwają się wzdłuż osi najmniejszego przekroju. W próbkach serii *B* kierunek uplastycznienia odchyłony jest znacznie od tej linii. W sąsiedztwie geometrycznego środka próbki pozostaje rdzeń sprężysty, podczas gdy połączenie obszarów plastycznych następuje w znacznej odległości od tego punktu (rys. 11a). W próbkach serii *C* i *D* (z otworami) oprócz obszarów plastycznych powstających przy otworze, powstają inne na podłużnych brzegach próbki (rys. 11b). Po połączeniu się tych obszarów, w pobliżu osi symetrii na podłużnych brzegach pozostają obszary sprężyste.

Literatura cytowana w tekście

1. D. N. ALLEN, R. SOUTHWELL, *Plastic straining in two-dimensional stress systems*, Phil. Trans. Roy. Soc., No. 850, 1950.
2. P. V. MARCALL, I. D. KING, *Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method*, Int. J. Mech. Sci. 3, 9 (1967).
3. J. A. JACOBS, *Relaxation methods applied to problem of plastic flow notched bar under tension*, Phil. Mag., 41, 1950.
4. D. J. HAYES, P. V. MARCALL, *Determination of upper bounds for problems in plane stress using finite elements techniques*, Int. J. Mech. Sci., 5, 9 (1967).
5. P. S. THEOCARIS, *Experimental solution of elastic-plastic plane stress problems*, J. Appl. Mech., Dec. 1962.
6. P. S. THEOCARIS, E. MARKETOS, *Elastic-plastic strain and stress distribution in notched plates under plane stress*, J. Mech. Phys. Solids, July 1963.
7. R. T. AULT, J. W. SPRETNACK, *Initial yielding and fracture in notched sheet molybdenum*, Int. J. Mech. Sci., 1965.
8. W. SZCZEPIŃSKI, *Przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych elementów z karbem*, Mech. Teoret. Stos., 3, 1965.
9. E. L. WILSON, *Finite element analysis of two-dimensional structures*, Structural Engineering Laboratory, University of California, Rep. No. 63-2, June 1963.
10. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG, *The finite element method in structural and continuum mechanics*, London 1967.
11. M. J. TURNER, H. C. MARTIN, R. C. WEIKEL, *Further development and applications of the stiffness method, agard, structures and material panel*, Paris 1962.
12. J. KAPKOWSKI, *Finite element study of elastic-plastic stress distribution, in notched specimens under tension*, Meddelelse Institutt for Skipsbygging II. Norges Tekniske Høgskole, Trondheim 1968.

Р е з ю м е

ГРАНИЦЫ ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ В РАСТЯГИВАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТАХ С НАДРЕЗОМ ИЛИ ОТВЕРСТИЕМ

Описан анализ упруго-пластического напряженного состояния в растягиваемых образцах с надрезом либо отверстием. Расчеты проделаны при предположении краевых условий в виде равномерного перемещения на концах образца. Рассматривались четыре серии образцов (рис. 2). Для

анализа был использован метод конечных элементов применительно к треугольным элементам в однородном напряженном состоянии. Для расчетов было принято условие пластичности Губера-Мизеса.

Результаты расчетов полученные с помощью цифровой машины показаны на графиках изображающих распространение пластических областей. Приводятся также графики указывающие начало пластической деформации и предельную нагрузку образцов для разных величин вырезов.

S u m m a r y

ELASTIC-PLASTIC BOUNDARIES IN NOTCHED SPECIMENS UNDER TENSION

The paper contains a description of an incremental elastic-plastic analysis of plane stresses in specimens with notches or holes subjected to tension. The calculations were made under the assumption of uniform displacements at the ends of the specimens. Four series of specimens were studied (Fig. 2). The finite element method of stress analysis with uniformly stressed triangular elements was used, the Huber-Mises yield condition being assumed.

The results of calculations, obtained by means of a Univac 1107-computer, are presented in diagrams showing the extension of the elastic-plastic boundary. Diagrams of the first plastic straining loads and maximum load carrying capacities are also shown for various types of notches.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 lutego 1970 r.
