MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 8 (1970)

STOCHASTYCZNA STABILNOŚĆ RUCHU

KAZIMIERZ SOBCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Jednym z podstawowych zagadnień analizy układów dynamicznych jest badanie stabilności ruchu. W teorii deterministycznej, opisującej ruch układu za pomocą aparatu analizy matematycznej, badania stabilności są daleko zaawansowane i można powiedzieć, że w chwili obecnej dla układów dynamicznych dyskretnych istnieje teoria stabilności ruchu (por. np. [1, 2]). W tej teorii, podstawy której związane są głównie z nazwiskiem Lapunowa, pojęcia stabilności i cała analiza oparte są na deterministycznym charakterze ruchu i jego zaburzeń.

W analizie stochastycznego ruchu układów dynamicznych zagadnienie stabilności jest również bardzo istotne. W tym przypadku jednak, ze względu na stochastyczny charakter ruchu, pojęcia stabilności muszą być oparte na probabilistycznych charakterystykach odpowiednich zdarzeń i sprecyzowane w języku teorii prawdopodobieństwa. Ponieważ w określeniach stabilności zasadniczą rolę odgrywa pojęcie granicy oraz takie pojęcia, jak *male zaburzenie ruchu* itp., które mogą mieć różny probabilistyczny sens, to należy się spodziewać, że ilość różnych definicji stabilności stochastycznej będzie znacznie większa niż w przypadku stabilności klasycznej. Tak jest istotnie, na przykład zwykłe pojęcie stabilności (według Lapunowa) czy stabilności asymptotycznej może być w przypadku ruchu stochastycznego zdefiniowane co najmniej w trzech różnych sensach — według prawdopodobieństwa, w sensie średniokwadratowym i w sensie prawie na pewno.

W ostatnich latach zagadnienia stochastycznej stabilności ruchu (podobnie jak inne zagadnienia dotyczące stochastycznych równań różniczkowych) są intensywnie badane i w chwili obecnej istnieje w tej dziedzinie bogata literatura. Sprecyzowano podstawowe pojęcia stabilności stochastycznej oraz podano wiele ważnych twierdzeń i metod dla różnych klas układów dynamicznych i przy różnych założeniach odnośnie własności wymuszeń losowych i stochastycznych parametrów układów.

Pierwsze uwagi na temat probabilistycznego traktowania stabilności ruchu pochodzą już z lat trzydziestych [5, 6, 7], natomiast w roku 1955 ukazała się praca [8], w której zawarte jest pewne kryterium stabilności stochastycznej (wyrażone przez wartość gęstości widmowej rozwiązania) dla równania różniczkowego rzędu pierwszego, którego współczynnik jest procesem stochastycznym gaussowskim i stacjonarnym. Pewne uwagi związane ze stabilnością układów z losowym wymuszeniem zawiera też praca [9]; wbrew tytułowi dotyczy ona jednak innych jakościowych kwestii dla równań nieliniowych z losowym wymuszeniem (np. istnienie rozwiązań stacjonarnych).

Pierwsze ważniejsze i ogólniejsze rezultaty dotyczące stochastycznej stabilności ruchu zawierają prace [10, 11] oraz [12, 13] rozpoczynające jednocześnie okres intensywnych badań przypadający w tej dziedzinie na ostatnie dziesięciolecie. W pracach tych autorzy podali podstawowe pojęcia stabilności stochastycznej oraz wprowadzili ważne kryteria dotyczące stabilności według prawdopodobieństwa i w sensie średniokwadratowym. Należy podkreślić, że w pracach [10, 12], które powstały niezależnie i zawierają rezultaty podobne, po raz pierwszy zastosowano aparat funkcji Lapunowa do badania stabilności stochastycznej. W latach sześćdziesiątych otrzymano szereg bardzo interesujących i ogólnych rezultatów dotyczących różnych typów stabilności stochastycznej i innych pokrewnych zagadnień (np. ograniczoność i stacjonarność rozwiązań równań stochastycznych, stochastyczna stabilizacja niestabilnych układów deterministycznych itp.), rezultaty te związane są przede wszystkim z takimi nazwiskami, jak Caughey, Gichman, Hasminskij, Kozin i in.

W chwili obecnej, najważniejsze rezultaty otrzymane w badaniach stabilności stochastycznej dotyczą układów dynamicznych, których wymuszenia są procesami stochastycznymi o charakterze *białego szumu*, gdyż wtedy można zastosować teorię procesów Markowa, a dokładniej aparat stochastyczny równań Ito (por. np. [14, 15, 16, 17, 18]). Badanie stabilności przy wymuszeniach innych typów jest trudniejsze, dlatego szereg autorów ograniczało się do badania stabilności tylko układów liniowych (por. np. [19, 20, 21]) lub układów nieliniowych specjalnej postaci (np. [21]); jednakże dla szerszej klasy układów nieliniowych otrzymano również interesujące rezultaty (por. np. [22, 23, 24]).

Mimo że istniejące obecnie badania nie są wystarczające i wiele zagadnień nie ma jeszcze rozwiązania, to jednak są one na tyle zaawansowane, że bez wątpienia stanowią podstawę dla przyszłej teorii stochastycznej stabilności ruchu.

Celem tego artykułu jest uporządkowanie i syntetyczne omówienie podstawowych pojęć oraz najważniejszych istniejących obecnie rezultatów dotyczących stochastycznej stabilności ruchu układów dynamicznych dyskretnych. Na zakończenie podamy pewne uwagi na temat innych stochastycznych zagadnień jakościowej analizy układów dyskretnych.

2. Stabilność ruchu. Zagadnienia deterministyczne

Zanim przystąpimy do omawiania zagadnień stabilności stochastycznej, przytoczymy kilka podstawowych faktów dotyczących klasycznej (tj. deterministycznej) stabilności ruchu. Z przytoczonych tutaj pojęć i oznaczeń będziemy korzystali w dalszych rozważaniach.

Niech ruch układu dynamicznego będzie opisany przez układ równań (w postaci wektorowej)

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y), \tag{2.1}$$

gdzie t oznacza czas ($t_0 \leqslant t < +\infty$), zaś $y(t) = [y_1(t), \ldots, y_n(t)]$, $F(t, y) = [F_1(t, y), \ldots, F_n(t, y)]$; $y(t)$ jest funkcją niewiadomą. Funkcja wektorowa $F(t, y)$ jest określona na iloczynie kartezjańskim przedziału czasu T i pewnego obszaru $D_y \in R^n$. Przestrzeń R^n nazywa się *przestrzenią fazową* układu (2.1).

Warunki początkowe dla układu (2.1) mają postać

$$y(t_0) = y^0, \quad y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0). \tag{2.2}$$

Zakładamy, że funkcja F spełnia założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego (2.1)–(2.2) — por. np. [4].

Rozwiązanie zagadnienia początkowego (2.1), (2.2) ma postać

$$y = \varphi(t) = \varphi(t; t_0, y^0), \quad \varphi(t) = [\varphi_1(t), \ldots \varphi_n(t)]. \tag{2.3}$$

Funkcja (2.3) określa w dowolnej chwili t położenie poruszającego się punktu, który w chwili początkowej $t = t_0$ znajdował się w punkcie $y^0 \in D_y$. Mówi się, że rozwiązanie (2.3) określa *ruch* układu dynamicznego (2.1) w przestrzeni fazowej. Krzywa przedstawiona równaniem (2.3) opisująca ruch nazywa się *trajektorią* ruchu. Wektor zerowy dla odróżnienia od liczby zero będziemy oznaczali: $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$.

Określenie 2.1. Rozwiązanie (lub ruch niezaburzony) $\varphi(t)$ układu (2.1) nazywa się *stabilnym* (według Lapunowa), jeżeli dla dowolnego $t_0 \in T$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, że jeżeli dla dowolnego rozwiązania $y(t)$ układu (2.1)

$$||y(t_0) - \varphi(t_0)|| < \delta, \tag{2.4}$$

to dla wszystkich $t > t_0$

$$||y(t) - \varphi(t)|| < \varepsilon, \tag{2.5}$$

gdzie $||\ ||$ oznacza normę w przestrzeni R^n.

Innymi słowy, rozwiązanie $\varphi(t)$ jest stabilne, jeżeli rozwiązania, które leżą dostatecznie blisko niego w chwili t pozostają dowolnie blisko niego również dla $t > t_0$.

Jeżeli warunki powyższego określenia nie są spełnione, to ruch nazywa się *niestabilnym*. Jeżeli liczbę δ można wybrać niezależnie od t_0, tj. $\delta = \delta(\varepsilon)$, to mówimy, że stabilność jest *jednostajna*.

W szczególnym przypadku, gdy $F(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ rozwiązanie trywialne (położenie równowagi) $\varphi(t) \equiv \mathbf{0}$ jest stabilne, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego $t_0 \in T$ istnieje takie $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, że z nierówności

$$||y(t_0)|| < \delta \tag{2.6}$$

wynika nierówność

$$||y(t)|| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad t > t_0. \tag{2.7}$$

Przez odpowiednią zamianę zmiennych zagadnienie o stabilności dowolnego rozwiązania zawsze można sprowadzić do badania stabilności rozwiązania trywialnego (por. np. [2]).

Określenie 2.2. Rozwiązanie (ruch niezaburzony) $\varphi(t)$ układu (2.1) nazywa się *asymptotycznie stabilnym*, jeżeli jest ono stabilne (według Lapunowa) oraz

$$\lim_{t \to \infty} ||y(t) - \varphi(t)|| = 0. \tag{2.8}$$

Jeżeli rozwiązania $y(t)$ dążą do $\varphi(t)$ przy $t \to \infty$ jednostajnie względem t, to mówimy, że asymptotyczna stabilność jest *jednostajna* względem t. W szczególności, rozwiązanie trywialne $\varphi(t) \equiv \mathbf{0}$ jest asymptotycznie stabilne, jeżeli jest stabilne oraz przy $||y(t_0)|| < \delta$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \mathbf{0}. \tag{2.9}$$

Powyższe określenia nic nie mówią o wielkości zaburzeń początkowych (czyli o wielkości liczby δ). Obszar G zaburzeń początkowych, tj. przy ustalonym t obszar $||y(t_0)|| < M$, (gdzie M dana liczba), dla którego zachodzi relacja stabilności asymptotycznej (2.9), nazywa się *obszarem stabilności asymptotycznej* (lub obszarem przyciągania położenia równowagi $\varphi(t) \equiv \mathbf{0}$). Ważny jest przypadek, kiedy obszar asymptotycznej stabilności G jest całą przestrzenią fazową.

Określenie 2.3. Jeżeli $\varphi(t)$ jest stabilne (według Lapunowa) i relacja (2.8) jest prawdziwa dla wszystkich rozwiązań $y(t)$ niezależnie od ich wartości początkowych (tj. $G = R^k$), to mówimy, że rozwiązanie (ruch) $\varphi(t)$ jest *asymptotycznie stabilne globalnie.*

Oprócz pojęć określonych wyżej, w badaniach stabilności zostały wprowadzone jeszcze inne ważne pojęcia, np. stabilność eksponencjalna, stabilność warunkowa, stabilność ze względu na zaburzenia działające w sposób ciągły, stabilność techniczna i inne (por. np. [3]).

Badanie stabilności jest najprostsze w przypadkach, kiedy równania różniczkowe opisujące ruch układu dynamicznego można rozwiązać explicite. Podstawową klasą takich równań są równania liniowe o stałych współczynnikach. W zagadnieniach praktycznych spotykamy jednak układy nieliniowe, dla których nie można znaleźć rozwiązania dokładnego; analiza stabilności takich układów jest trudniejsza i wymaga specyficznych metod.

Najprostsza i historycznie pierwsza metoda badania stabilności układów nieliniowych opisanych równaniami postaci (2.1) polega na tym, że dane równania nieliniowe linearyzuje się i o stabilności (względnie niestabilności) orzeka się na podstawie równań liniowych — tzw. *równań pierwszego przybliżenia*, tj. równań postaci

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) y_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.10}$$

gdzie zwykle zakłada się, że $a_{ij}(t) = a_{ij} = \text{const}$. Mimo że metoda ta nie jest ogólna, istnieje jednak pewna klasa układów nieliniowych, dla których kwestie stabilności można rozstrzygać w oparciu o pierwsze (liniowe) przybliżenie. Jak zobaczymy w dalszych rozważaniach, procedura ta może być również stosowana w badaniach stabilności stochastycznej.

Podstawową metodą badania stabilności jest tzw. *druga metoda Lapunowa.* Jej istota polega na tym, że (nie rozwiązując równań ruchu) kryteria stabilności i niestabilności formułuje się w oparciu o własności pewnych funkcji związanych z danym układem równań — zwanych *funkcjami Lapunowa.* Wprowadzenie funkcji Lapunowa okazało się bardzo trafne i dało podstawę dla wielu ogólnych metod analizy jakościowej układów dynamicznych. Obecnie w oparciu o funkcje Lapunowa można rozstrzygać kwestie stabilności, badać problemy optymalnej stabilizacji układów dynamicznych oraz analizować inne zagadnienia jakościowe równań różniczkowych (por. np. [2, 3]). Pojęcie funkcji

Lapunowa okazało się również bardzo istotne w badaniach stochastycznej stabilności ruchu.

Niech $V(t, y) = V(t, y_1, \dots, y_n)$ będzie funkcją określoną i ciągłą w zbiorze $Z_0 = \{a < t < \infty, ||y|| < h\}$.

Rzeczywista, skalarna i ciągła funkcja $V(t, y)$ nazywa się *funkcją stałego znaku* (znaku dodatniego lub znaku ujemnego) w Z_0, jeżeli $V(t, y) \geqslant 0$ lub $V(t, y) \leqslant 0$ dla $(t, y) \in Z_0$.

Funkcja $V(t, y)$ nazywa się funkcją *określoną dodatnio* (w sensie Lapunowa) w Z_0, jeżeli istnieje ciągła funkcja skalarna $W(y)$ określona dla $||y|| < h$ taka, że

$$\begin{aligned} &V(t, y) \geqslant W(y) > 0 \quad \text{dla} \quad ||y|| \neq 0, \\ &V(t, \mathbf{0}) = W(\mathbf{0}) = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Analogicznie, funkcja $V(t, y)$ nazywa się funkcją *określoną ujemnie* w Z_0, jeżeli istnieje $W(y)$ taka, że

$$\begin{aligned} &V(t, y) \leqslant -W(y) < 0 \quad \text{dla} \quad ||y|| \neq 0, \\ &V(t, \mathbf{0}) = W(\mathbf{0}) = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Funkcja określona dodatnio lub ujemnie nazywa się funkcją *określonego znaku.*

W szczególności jeżeli V nie zależy od t, tj. $V = V(y)$, to jest ona określonego znaku, jeżeli $(-1)^{\beta} V(y) > 0$ dla $||y|| \neq 0$ i $V(\mathbf{0}) = 0$, przy czym dla funkcji określonej dodatnio $\beta = 0$, a dla funkcji określonej ujemnie $\beta = 1$.

Mówi się, że funkcja $V(t, y)$ posiada nieskończenie małą granicę przy $y \to \mathbf{0}$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$|V(t, y)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad ||y|| < \delta, \quad t \in (t_0, \infty).$$

Zauważymy, że jeżeli $V = V(y)$ jest funkcją ciągłą (niezależną od t) i taką, że $V(\mathbf{0}) = 0$, to $V(y)$ posiada nieskończenie małą granicę przy $y \to \mathbf{0}$. Analiza stabilności przy pomocy drugiej metody Lapunowa oparta jest na badaniu zachowania się funkcji $V(t, y)$ wzdłuż trajektorii rozważanego układu równań różniczkowych.

Niech funkcja $V \equiv V(t, y)$ będzie określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu w zbiorze Z_0.

Określenie 2.4. Funkcja

$$\frac{dV}{dt} \equiv \dot{V}(t, y) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} F_j \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + F \cdot \operatorname{grad} V \tag{2.13}$$

nazywa się *pochodną funkcji* $V(t, y)$ ze względu na układ (2.1). Operacja przyporządkowująca funkcji V jej pochodną $\dot{V}$ ze względu na układ (2.1) jest niekiedy nazywana *operatorem Lapunowa.*

A oto trzy podstawowe twierdzenia Lapunowa por. [2, 3].

Twierdzenie 2.1. (pierwsze twierdzenie Lapunowa). Jeżeli dla układu (2.1) istnieje dodatnio określona funkcja skalarna $V(t, y)$ posiadająca pochodną $\dot{V}(t, y)$ ze względu na układ (2.1) znaku ujemnego, to rozwiązanie trywialne $\varphi \equiv \mathbf{0}$ danego układu jest stabilne według Lapunowa.

Twierdzenie 2.2. (drugie twierdzenie Lapunowa). Jeżeli dla układu (2.1) istnieje dodatnio określona funkcja skalarna $V(t, y)$ posiadająca nieskończenie małą granicę przy

$y \to \mathbf{0}$ oraz mająca ujemnie określoną pochodną $\dot{V}(t, y)$ ze względu na układ (2.1), to rozwiązanie trywialne danego układu jest asymptotycznie stabilne.

Twierdzenie 2.3. (trzecie twierdzenie Lapunowa). Niech dla układu (2.1) istnieje funkcja $V(t, y)$ posiadająca nieskończenie małą granicę przy $y \to \mathbf{0}$ oraz mająca pochodną $\dot{V}(t, y)$ ze względu na układ (2.1) określonego znaku. Jeżeli dla pewnego $t' > a$ w dowolnym otoczeniu $||y|| < \Delta$ $(\Delta < h)$ znajdzie się punkt (t', y'), dla którego znak funkcji jest taki sam jak znak pochodnej $\dot{V}$, tj. taki, że

$$V(t', y')\dot{V}(t', y') > \mathbf{0},$$

to rozwiązanie trywialne $\varphi \equiv \mathbf{0}$ układu (2.1) jest niestabilne według Lapunowa.

Określenie 2.5. Funkcje $V(t, y)$ czyniące zadość warunkom twierdzeń 2.1, 2.2, 2.3 nazywają się funkcjami Lapunowa (odpowiednio I, II i III rodzaju).

3. Podstawowe pojęcia stabilności stochastycznej

Pojęcia stabilności przytoczone w poprzednim paragrafie przestają być użyteczne, jeżeli rozważamy stochastyczny ruch układów fizycznych. Koncepcje stabilności takiego ruchu (koncepcje stabilności stochastycznej) muszą uwzględniać jego probabilistyczny opis i wyrażać pojęcia stabilności w terminach charakterystyk odpowiednich zdarzeń losowych. W literaturze istnieje szereg różnych pojęć stochastycznej stabilności ruchu; tutaj przytoczymy najważniejsze z nich.

Niech ruch układu dynamicznego będzie opisany przez układ równań stochastycznych (w postaci wektorowej)

$$\frac{dY}{dt} = F[Y(t), t, X(t)], \tag{3.1}$$

gdzie F jest funkcją wektorową, zaś $X(t)$ i $Y(t)$ oznaczają procesy stochastyczne wektorowe. Nie ograniczając ogólności można przyjąć, że $F(\mathbf{0}, t, X(t)) = \mathbf{0}$ i badać stabilność rozwiązania trywialnego $Y(t) = \varphi(t) \equiv \mathbf{0}$.

Określenie 3.1. Rozwiązanie trywialne (ruch niezaburzony) układu (3.1) nazywa się:

a) *stabilne według prawdopodobieństwa*, jeżeli dla dowolnych (dowolnie małych) liczb $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ istnieje taka liczba $r > 0$, że dla dowolnego rozwiązania $Y(t)$ układu (3.1), które w chwili $t = t_0$ spełnia warunek

$$||y^0|| = ||Y(t_0)|| < r,$$

jest dla wszystkich $t \geqslant t_0$ spełniona jedna z nierówności

$$P_t\{||Y(y^0, t_0, t)|| < \varepsilon\} > 1-\delta, \tag{3.2}$$

$$P_t\{||Y(y^0, t_0, t)|| > \varepsilon\} < \delta, \tag{3.2'}$$

lub nierówność silniejsza (por. [15, 17])

$$\lim_{||y^0|| \to 0} P\{\sup_{t \geqslant t_0} ||Y(y^0, t_0, t)|| > \varepsilon\} = 0; \tag{3.2''}$$

w relacjach (3.2) i (3.2') $P_t\{||Y|| \gtreqless \varepsilon\}$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że w chwili $t \geqslant t_0$ jest spełniona nierówność $||Y(y^0, t_0, t)|| \gtreqless \varepsilon$;

b) *asymptotycznie stabilne według prawdopodobieństwa*, jeżeli jest ono stabilne według prawdopodobieństwa i oprócz tego dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dla wszystkich rozwiązań, dla których $||y^0|| < M$, spełniona jest nierówność

$$\lim_{t\to\infty} P_t\{||Y(y^0, t_0, t)|| < \varepsilon\} = 1, \tag{3.3}$$

gdzie M jest stałą określającą obszar stabilności asymptotycznej;

c) *asymptotycznie stabilne globalnie według prawdopodobieństwa*, jeżeli relacja (3.3) jest prawdziwa dla dowolnego $y^0 \in R^n$, tj. $M = \infty$.

W pracy [12] zostało podane nieco inne określenie asymptotycznej stabilności globalnej według prawdopodobieństwa.

Określenie 3.2. Rozwiązanie trywialne układu (3.1) nazywa się:

a) *stabilne średnio z potęgą p* (krótko *p - stabilne*), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $r > 0$, że dla wszystkich rozwiązań $Y(t)$ układu (3.1), dla których

$$||y^0|| = ||Y(t_0)|| < r,$$

spełniona jest dla $t \geqslant t_0$ nierówność

$$E\{||Y(y^0, t_0, t)||^p\} < \varepsilon, \quad p > 0 \tag{3.4}$$

(E oznacza wartość przeciętną);

b) *asymptotycznie stabilne średnio z potęgą p* (krótko *asymptotycznie p - stabilne*), jeżeli jest ono p - stabilne i poza tym, dla $t \to \infty$

$$E\{||Y(y^0, t_0, t)||^p\} \to 0; \tag{3.5}$$

jeżeli powyższa relacja zachodzi dla dowolnego $y^0 \in R^n$, to mówimy, że asymptotyczna p - stabilność jest *globalna*;

c) *eksponencjalnie stabilne średnio z potęgą p* (krótko: *eksponencjalnie p - stabilne*), jeżeli istnieją takie stałe liczby dodatnie N i α, że dla wszystkich $t \geqslant t_0$ zachodzi nierówność

$$E\{||Y(y^0, t_0, t)||^p\} \leqslant N||y^0||^p \exp[-\alpha(t-t_0)]. \tag{3.6}$$

Stabilność średnia z potęgą p (również asymptotyczna, eksponencjalna), jak wynika z określenia, charakteryzuje stabilność momentów rozwiązania i jest również nazywana stabilnością momentów. Dokładniej, jeżeli spełniony jest warunek (3.4) [odpowiednio (3.5) i (3.6)], to często mówi się, że *moment rzędu p rozwiązania jest stabilny* (odpowiednio — asymptotycznie stabilny, eksponencjalnie stabilny) w otoczeniu rozwiązania trywialnego (por. [18, 26]).

Jeżeli $p = 2$, to mówimy, że rozwiązanie trywialne jest stabilne (asymptotycznie stabilne, eksponencjalnie stabilne) *średnio z kwadratem.*

Określenie 3.3. Rozwiązanie trywialne układu (3.1) nazywa się *stabilne prawie na pewno* ([22, 27]) lub *z prawdopodobieństwem jeden*, jeżeli dla dowolnego rozwiązania $Y(t)$ układu (3.1) takiego, że $||Y(t_0)|| < r$, wszystkie realizacje procesu $Y(t)$ oprócz co najwyżej ich zbioru o prawdopodobieństwie zero są stabilne.

Analogicznie określamy stabilność asymptotyczną i stabilność eksponencjalną prawie na pewno.

W pracach [19, 21] przyjęte jest następujące określenie: rozwiązanie trywialne układu (3.1) jest *asymptotycznie stabilne prawie na pewno* (lub) *z prawdopodobieństwem jeden* ze względu na obszar $D \subset R^n$, jeżeli dla każdego rozwiązania $Y(y^0, t_0, t)$ układu (3.1) takiego że $y^0 \in D$ mamy

$$(3.7) \qquad ||Y(y^0, t_0, t)|| \underset{t\to\infty}{\to} 0 \quad \text{prawie na pewno,}$$

tj. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie T, że

$$(3.8) \qquad \lim_{T\to\infty} P\{\sup_{t\geqslant T} ||Y(y^0, t_0, t)|| > \varepsilon\} = 0.$$

Dla autonomicznych układów liniowych i stacjonarnego procesu $X(t)$ powyższe określenie jest równoważne określeniu 3.3.

Niech $\Phi(t) = \Phi[Y(\cdot), t]$ będzie pewnym nielosowym funkcjonałem (skalarnym, wektorowym itp.) określonym na rozwiązaniach $Y(y^0, t_0, t)$ układu (3.1) zależnym od $t \in [0, \infty)$ jak od parametru i spełniającym warunek $\Phi[0, t] \equiv 0$.

Określenie 3.4. Mówimy (por. [28]), że *funkcjonał Φ jest stabilny,* jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $r > 0$, że dla każdego rozwiązania $Y(t)$ układu (3.1) takiego, że $||y^0|| = ||Y(t_0)|| < r$ jest dla $t \geqslant t_0$ spełniona nierówność

$$(3.9) \qquad |\Phi[Y(\cdot), t]| < \varepsilon;$$

funkcjonał Φ nazywa się *asymptotycznie stabilny,* jeżeli istnieje takie $M > 0$, że jeżeli $||Y(t_0)|| < M$, to

$$(3.10) \qquad \lim_{t\to\infty} \Phi[Y(\cdot), t] = 0.$$

Najprostszymi funkcjonałami $\Phi[Y(\cdot), t]$, których stabilność jest ważna w zastosowaniach, są momenty rozwiązań układu równań (3.1), np. momenty pierwszego i drugiego rzędu

$$(3.11) \qquad \Phi[Y(\cdot), t] = E[Y(t)], \qquad \Phi[Y(\cdot), t] = E[Y(t)\overline{Y}(t)].$$

W pierwszym przypadku Φ jest funkcjonałem wektorowym, w drugim — macierzowym.

Tak więc, w przypadku szczególnym kiedy funkcjonał Φ jest momentem dowolnego rzędu $p > 0$ rozwiązania, stabilność funkcjonału Φ oznacza stabilność momentów (określenie 3.2).

Podane wyżej określenia dotyczą stabilności stochastycznej ze względu na zaburzenia warunków początkowych. Można również wprowadzić odpowiednie pojęcia stabilności stochastycznej ze względu na ciągle działające zaburzenia.

Niech będzie dany układ

$$(3.12) \qquad \frac{dY}{dt} = F(Y, t)$$

oraz układ *zaburzony*

$$(3.13) \qquad \frac{dY}{dt} = F(Y, t) + R(t),$$

gdzie $R(t)$ jest procesem stochastycznym.

Określenie 3.5. Rozwiązanie trywialne (ruch niezaburzony) układu (3.12) nazywa się *stabilne według prawdopodobieństwa ze względu na ciągle działające zaburzenia małe w sen-*

sie średnim, jeżeli dla dowolnego procesu $R(t)$ i $y^0 \in R^n$ dowolne rozwiązanie $Y(t) = Y(y^0, t_0, t)$ układu (3.13) dąży do zera według prawdopodobieństwa, gdy

$$\|y^0\| + \sup_{t \geqslant t_0} E\|R(t)\| \to 0, \tag{3.14}$$

tj. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ istnieje takie $\gamma > 0$, że z nierówności

$$\|y^0\| + \sup_{t \geqslant t_0} E\|R(t)\| < \gamma$$

wynika, że dla $t \geqslant t_0$

$$P\{\|Y(y^0, t_0, t)\| > \varepsilon\} < \delta.$$

Określenie 3.6. Rozwiązanie trywialne układu (3.12) nazywa się *stabilne średnio z wykładnikiem p ze względu na ciągle działające zaburzenia małe w sensie średnim z wykładnikiem r,* jeżeli dla dowolnego procesu $R(t)$, $y^0 \in R^n$ i dla dowolnego rozwiązania $Y(t) = Y(y^0, t_0, t)$ układu (3.13) takiego, że

$$\|y^0\| + \sup_{t \geqslant t_0} E\{\|R(t)\|^r\} \to 0, \quad r > 0, \tag{3.15}$$

mamy dla $t \geqslant t_0$

$$\sup_{t > t_0} E\{\|Y(y^0, t_0, t)\|^p\} \to 0, \quad p > 0. \tag{3.16}$$

Zamiast układu (3.13) można rozpatrywać układ ogólniejszy

$$\frac{dY}{dt} = F(Y, t) + R[Y, t, X(t)]. \tag{3.17}$$

Wtedy w określeniach 3.5 i 3.6 warunki (3.14), (3.15) należy zamienić warunkiem

$$\|y^0\| + \sup_{t > t_0} E\{\sup_{Y} \|R[Y, t, X(t)]\|^r\} \to 0. \tag{3.18}$$

Przytoczone określenia nie wyczerpują wszystkich możliwych koncepcji stabilności stochastycznej; w literaturze można spotkać jeszcze inne użyteczne pojęcia (por. np. [30, 31, 32, 33, 34, 57]). Na przykład w pracach [33, 34] zostały wprowadzone pojęcia stabilności entropijnej oraz zupełnej stabilności statystycznej interesujące przede wszystkim w analizie układów z losowymi warunkami początkowymi.

Określenie 3.7. Układ charakteryzuje się *ogólną stabilnością entropijną,* jeżeli jego entropia (jednowymiarowa) $H(t)$ przy $t \to +\infty$ dąży do $-\infty$. Jeżeli entropia $H(t)$ monotonicznie maleje przy wzroście t, to mówimy, że układ charakteryzuje się ogólną *monotoniczną* stabilnością entropijną.

Niech ruch niezaburzony układu odpowiada rozwiązaniu trywialnemu. Niech w chwili początkowej ruch zaburzony układu będzie scharakteryzowany przez zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n; t_0) = f_0(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Określenie 3.8. Ruch niezaburzony jest *statystycznie stabilny przy rozkładzie początkowym* f_0, jeżeli przy tym rozkładzie gęstość prawdopodobieństwa $f(y_1, y_2, \ldots, y_n; t)$ rozwiązania, przy $t \to \infty$ dąży do delty Diraca, tj.

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n; t) \to \delta(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \text{przy } t \to \infty. \tag{3.19}$$

Jeżeli warunek (3.19) zachodzi dla dowolnego rozkładu początkowego f_0, to ruch niezaburzony charakteryzuje się *zupełną stabilnością statystyczną*.

Łatwo zauważyć, że jeżeli ma miejsce stabilność statystyczna zdefiniowana w określeniu 3.8, to wszystkie momenty rozwiązania dążą do zera przy $t \to \infty$ i odwrotnie.

W następnych paragrafach omówimy najważniejsze rezultaty otrzymane w analizie stabilności stochastycznej według przytoczonych tutaj definicji.

4. Stabilność według prawdopodobieństwa

4.1. Układy opisane przez równania stochastyczne Ito. W tym paragrafie omówimy najważniejsze kryteria stabilności stochastycznej scharakteryzowane przez określenie 3.1, tj. stabilności według prawdopodobieństwa. Najpierw scharakteryzujemy rezultaty dotyczące układów, na które działają wymuszenia o charakterze *białego szumu*, tj. układy opisane przez stochastyczne równania różniczkowe Ito. Analiza stabilności takich układów została rozpoczęta przez HASMINSKIEGO [15] i do niego należą najważniejsze rezultaty (por. [15, 17]).

Niech ruch układu dynamicznego będzie opisany przez równanie (w postaci wektorowej)

$$\frac{dY}{dt} = F[Y(t), t] + \sigma[Y(t), t]X(t), \tag{4.1}$$

gdzie $X(t)$ jest wektorowym procesem *białego szumu*, $F(y, t) = [F_1(y, t), \ldots, F_n(y, t)]$, zaś $\sigma(y, t) = \{\sigma_{ij}(y, t)\}$ oznacza macierz o wymiarach $n \times n$.

Pochodna w powyższym równaniu nie może być rozumiana w zwykłym sensie, gdyż $X(t)$ jest dystrybucją losową. Ścisła interpretacja równania (4.1) bez korzystania z aparatu dystrybucji losowych oparta jest na teorii stochastycznych równań Ito. W tej interpretacji równanie (4.1) jest symbolicznym zapisem następującego równania dla różniczek

$$dY(t) = F[Y(t), t]dt + \sigma[Y(t), t]dZ(t), \tag{4.2}$$

gdzie $Z(t)$ jest procesem Wienera (procesem ruchu brownowskiego); *biały szum* jest uogólnioną pochodną procesu $Z(t)$, tj. $X(t) = \frac{dZ(t)}{dt}$. Równanie (4.2) nazywa się stochastycznym równaniem Ito i posiada rozwiniętą teorię (por. [18]).

Przy dość ogólnych założeniach odnośnie funkcji wektorowej $F(y, t)$ i funkcji macierzowej $\sigma(y, t)$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie $Y(t) = Y(y^0, t_0, t)$ równania (4.2) spełniające warunek początkowy $Y(t_0) = y^0$ i jest ono dyfuzyjnym procesem Markowa. Będziemy zakładali, że $F_i(\mathbf{0}, t) \equiv 0$, $\sigma_{ij}(\mathbf{0}, t) \equiv 0$; wtedy równanie (4.2) posiada trywialne rozwiązanie $Y(t) \equiv \mathbf{0}$ odpowiadające warunkowi $y^0 = \mathbf{0}$.

Z równaniem (4.2), dokładniej z procesem dyfuzyjnym $Y(t)$, jest związany operator (por. [18])

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_i(y, t)\frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(y, t)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}, \tag{4.3}$$

gdzie $A_i(y, t) = F_i(y, t)$, $\{B_{ij}\} = B = \sigma \cdot \sigma^*$; σ^* — macierz transponowana względem σ. Obszar określoności operatora L jest zbiorem funkcji dwukrotnie w sposób ciągły różniczkowalnych względem x i w sposób ciągły różniczkowalnych względem t, oprócz co najwyżej punktu $y = \mathbf{0}$. Oczywiście, dla $\sigma_{ij}(y, t) \equiv 0$ (układ deterministyczny) operator L jest operatorem Lapunowa.

Załóżmy, że współczynniki układu (4.2) są niezależne od czasu [proces jednorodny w czasie; wtedy $L(y, t) = L(y)$] oraz że drugi składnik operatora L_1 jest niezwyrodniałym operatorem eliptycznym, tj. istnieje funkcja ciągła $m(y)$ dodatnia dla $y \neq \mathbf{0}$ taka, że dla wszystkich rzeczywistych λ spełniona jest nierówność

$$\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(y)\lambda_i\lambda_j \geqslant m(y)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2. \tag{4.4}$$

Stosując teorię procesów Markowa oraz pewne własności eliptycznych operatorów różniczkowych, HASMINSKIJ [15] wykazał następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1. Rozwiązanie trywialne układu (4.2) o współczynnikach niezależnych od czasu i macierzy $\sigma(y)$ takiej, że spełniony jest warunek (4.4), jest stabilne według prawdopodobieństwa [w sensie (3.2″)] wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieje ciągła nieujemna funkcja $V(y)$ znikająca tylko dla $y = \mathbf{0}$, dla której

$$L_1 V(y) \leqslant 0. \tag{4.5}$$

Dla procesu niejednorodnego w czasie odpowiadającemu operatorowi $L(t, y)$ prawdziwy jest następujący warunek wystarczający [15, 28].

Twierdzenie 4.2. Na to, aby rozwiązanie trywialne układu (4.2) było stabilne według prawdopodobieństwa [w sensie (3.2″)] wystarcza, aby istniała dodatnio określona funkcja skalarna $V(t, y)$, dla której

$$LV(t, y) \leqslant 0. \tag{4.6}$$

Powyższe twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia Lapunowa 2.1 i redukuje się do niego jeżeli $\sigma = 0$. Widzimy, że operator L charakteryzujący proces Markowa odgrywa tę samą rolę, co operator Lapunowa w analizie stabilności układów deterministycznych.

Następujące twierdzenie daje kryterium niestabilności.

Twierdzenie 4.3. Na to, aby rozwiązanie trywialne układu (4.2) o współczynnikach niezależnych od czasu i macierzy $\sigma(y)$ czyniącej zadość warunkowi (4.4) było niestabilne według prawdopodobieństwa (w sensie (3.2″)) wystarcza, aby istniała w pewnym otoczeniu punktu $y \equiv \mathbf{0}$ funkcja $W(y)$ taka, że

$$W(y) \to \infty, \quad \text{gdy} \quad y \to \mathbf{0}, \quad L_1 W \leqslant 0, \tag{4.7}$$

w dowolnym punkcie tego otoczenia oprócz samego punktu $y = \mathbf{0}$.

Z powyższymi zagadnieniami związane są też rozważania BUCY [36], który rozpatruje równania Ito dla dyskretnych procesów Markowa oraz prace KUSHNERA [23, 37, 38]. Kushner otrzymuje szereg istotnych rezultatów. Między innymi jego analiza pozwala rozszerzyć zakres wyników Hasminskiego na przypadki, kiedy L nie jest operatorem eliptycznym, poza tym praca [23] zawiera konstrukcję stochastycznej funkcji Lapunowa.

Na zakończenie tego punktu rozważymy dwa przykłady ilustrujące zastosowanie powyższych twierdzeń. Otrzymamy również pewne wnioski dotyczące stabilności rozwiązania trywialnego równania Ito według pierwszego (liniowego) przybliżenia. Interesujące i ważne są jednak bardziej ogólne relacje między stabilnością stochastyczną układów nieliniowych i stabilnością ich przybliżeń liniowych. Kwestie te rozważali NEWELSON i HASMINSKIJ [17] oraz GICHMAN [28]. Podstawowy rezultat dotyczący stabilności stochastycznej według pierwszego przybliżenia zawiera następujące twierdzenie [17], które można uważać za rozszerzenie twierdzenia Lapunowa o stabilności według pierwszego przybliżenia na przypadek procesów Markowa.

T w i e r d z e n i e 4.4. Na to, aby trywialne rozwiązanie układu

$$dY_i = \sum_{j=1}^{n} [F_i^j(t) Y_j + \Psi_i^0(t, Y_1, \ldots, Y_n)]dt + \sum_{k,j=1}^{n} [\sigma_i^{jk}(t) Y_k + \Psi^{jk}(t, Y_1, \ldots, Y_n)]dZ_j \tag{4.8}$$

było asymptotycznie stabilne według prawdopodobieństwa przy $t \geqslant t_0$, wystarczy, aby były spełnione warunki:

1) rozwiązanie trywialne układu liniowego

$$dY_i^0 = \sum_{j=1}^{n} F_i^j(t) Y_j^0 dt + \sum_{k,j=1}^{n} \sigma_i^{jk}(t) Y_k^0 dZ_j \tag{4.9}$$

było eksponencjalnie stabilne średnio z pewną potęgą $p > 0$, $t \geqslant t_0$;

2) funkcje $F_i^j(t)$ i $\sigma_i^{jk}(t)$ były ograniczone przy $t \geqslant t_0$, a funkcje Ψ_i^0 i Ψ^{jk} spełniały w pewnym otoczeniu punktu $y = \mathbf{0}$ warunek w postaci

$$||\Psi(t, y_1, \ldots, y_n)|| \leqslant \gamma ||y|| \tag{4.10}$$

z dostatecznie małą stałą $\gamma > 0$.

Warunki na to, aby rozwiązanie trywialne układu liniowego (4.9) było eksponencjalnie stabilne średnio z potęgą p podamy w paragrafie następnym. Obecnie rozważmy dwa przykłady.

1. Rozważmy układ pierwszego rzędu w postaci (jednowymiarowy proces dyfuzyjny)

$$dY = F(Y)dt + \sigma(Y)dZ; \tag{a}$$

wtedy operator L_1 wyraża się następująco:

$$L_1 = F(y)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} B(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Załóżmy, że

$$F(y) = F_0|y| + o(|y|),$$
$$B(y) = B_0 y^2 + o(y^2), \qquad (B_0 \geqslant 0),$$

dla $y \to 0$.

Korzystając z twierdzenia 4.1 oraz z twierdzenia 4.3 łatwo otrzymujemy następujący w n i o s e k — t w i e r d z e n i e: rozwiązanie trywialne równania (a) jest stabilne według prawdopodobieństwa dla $F_0 < \frac{1}{2} B_0$ i niestabilne dla $F_0 > \frac{1}{2} B_0$.

Istotnie, 1) niech $F_0 < \frac{1}{2} B_0$; weźmy funkcję $V(y) = |y|^\gamma$, gdzie γ jest pewną liczbą dodatnią mniejszą niż $1 - \frac{2F_0}{B_0}$.

Wtedy

$$L_1 V = [F_0|y|+o(|y|)]\gamma|y|^{\gamma-1}+\left[\frac{1}{2}B_0 y^2+o(y^2)\right]\gamma(\gamma-1)|y|^{\gamma-2} =$$

$$= F_0|y|^\gamma\cdot\gamma+\frac{1}{2}B_0\gamma(\gamma-1)|y|^\gamma+o(|y|^\gamma) =$$

$$= \gamma|y|^\gamma[F_0+\frac{1}{2}B_0(\gamma-1)]+o(|y|^\gamma) < 0$$

w dostatecznie małym otoczeniu punktu $y = 0$. Warunki twierdzenia 4.1 są spełnione i rozwiązanie jest stabilne.

2) Niech $F_0 > 1/2B_0$; można wtedy łatwo sprawdzić, że funkcja $V(y) = -\ln|y|$ czyni zadość twierdzeniu 4.3.

Z powyższego twierdzenia — wniosku można otrzymać pewne dodatkowe informacje. Niech np. $B(y) = o(y^2)$, tj. $B_0 = 0$. Wtedy stabilność asymptotyczna według pierwszego przybliżenia rozwiązania trywialnego układu deterministycznego

$$\text{(b)} \qquad \frac{dY}{dt} = F(Y)$$

gwarantuje stabilność według prawdopodobieństwa procesu Markowa $Y(t)$ opisanego równaniem

$$\text{(c)} \qquad dY = F(Y)dt+\sqrt{B(y)}dZ(t).$$

W przypadku niestabilności przybliżenia liniowego dla procesu (b), rozwiązanie trywialne układu (c) jest również niestabilne.

Zauważmy, że niestabilne położenie równowagi układu liniowego (b) przechodzi w położenie stabilne według prawdopodobieństwa, jeżeli wprowadzimy *losowość* postaci $\sqrt{B(y)}\dot{X}$, tak aby tylko $B_0 > 2F_0$. Tak więc przytoczone twierdzenie — wniosek daje metodę stabilizacji położenia równowagi pewnej klasy układów pierwszego rzędu przez wprowadzenie *białego szumu*. Dla układów rzędu wyższego tak nie jest, wskazuje na to następujący przykład.

2. Rozważmy układ

$$\frac{dY_1}{dt} = Y_2+\sigma(Y_1, Y_2)X_1,$$

$$\frac{dY_2}{dt} = -Y_1+\sigma(Y_1, Y_2)X_2,$$

gdzie $X_1(t)$ i $X_2(t)$ są niezależnymi *białymi szumami*.

Łatwo sprawdzić, że położenie równowagi $y_1 = y_2 = 0$ tego układu w nieobecności składników losowych $[\sigma(y_1, y_2) \equiv 0]$ jest stabilne ale nie asymptotycznie.

Operator L_1 dla naszego układu ma postać ($F_1 = Y_2$, $F_2 = -Y_1$; $B_{11} = B_{22} = \sigma^2(y_1, y_2)$, $B_{12} = B_{21} = 0$)

$$L_1 = y_2\frac{\partial}{\partial y_1}-y_1\frac{\partial}{\partial y_2}+1/2\sigma^2(y_1, y_2)\left[\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right].$$

Oczywiście, jeżeli $W = \ln(y_1^2+y_2^2)$, to $L_1 W = 0$ i spełnia warunki twierdzenia 4.2, jeśli tylko $\sigma(y) \neq 0$ przy $y \neq \mathbf{0}$, $y = (y_1, y_2)$. Rozwiązanie trywialne naszego układu jest więc niestabilne według prawdopodobieństwa. Przykład ten pokazuje, że nieasymptotyczna stabilność «bez losowości» może przejść w niestabilność według prawdopodobieństwa.

4.2. Inne układy nieliniowe. W analizie stabilności stochastycznej otrzymano również ważne rezultaty dla szerokiej klasy układów, które opisane są równaniami innymi niż równania Ito. Odnośnie stabilności według prawdopodobieństwa są to przede wszystkim kryteria otrzymane przez KACA i KRASOWSKIEGO [12] oraz HASMINSKIEGO [22].

W pracy [12] autorzy rozważają układ (w postaci wektorowej)

$$\frac{dY}{dt} = F[Y(t), X(t), t], \tag{4.11}$$

gdzie $X(t)$ jest jednorodnym procesem stochastycznym Markowa o skończonej liczbie stanów $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, przy czym prawdopodobieństwo $p_{ij}(\Delta t)$ przejścia ze stanu x_i do x_j w czasie Δt spełnia warunek

$$p_{ij}(\Delta t) = \alpha_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \quad (i \neq j) \quad \alpha_{ij} = \text{const}. \tag{4.12}$$

Niech funkcja wektorowa $F = [F_1, F_2, \ldots, F_n]$ będzie ciągła względem wszystkich zmiennych i spełnia warunek Lipschitza względem zmiennych y_i, tj.

$$|F_i(y_2, x(t), t) - F_i(y_1, x(t), t)| \leqslant M||y_2 - y_1||, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.13}$$

w obszarze $\{||y|| < H, t \geqslant t_0\}$; $||y|| = \max(|y_1|, \ldots, |y_n|)$. Poza tym niech

$$F_i[\mathbf{0}, x(t), t] \equiv 0. \tag{4.14}$$

Rozwiązanie układu (4.11) autorzy określają jako $(n+1)$-wymiarowy proces stochastyczny $\{Y(t), X(t)\}$, którego realizacje czynią zadość równaniu (4.11).

W celu rozszerzenia drugiej metody Lapunowa na układy stochastyczne o postaci (4.11) wprowadza się funkcje skalarne $v(y, x, t)$ określone i ciągłe w obszarze $||y|| < H$ i przyjmujące wartość zero dla $y = \mathbf{0}$. Uogólniając określenie podane w p. 2 mówimy, że funkcja $v(y, x, t)$ jest *określona dodatnio* (określona ujemnie), jeżeli istnieje dodatnio określona w sensie Lapunowa funkcja $w(y)$ taka, że $w(y, x, t) \geqslant v(y)$ [odpowiednio $w(y, x, t) \leqslant -w(y)$] dla wszystkich $y \neq \mathbf{0}$ i $t \geqslant t_0$.

Oznaczając przez $E[v|\eta, \xi, \tau]$ warunkową wartość przeciętną funkcji $v[Y(t), X(t), t]$ przy warunku: $Y(t) = \eta, X(t) = \xi$ dla $t = \tau$ i określając pochodną tej wartości przeciętnej ze względu na układ (4.11) w punkcie $t = \tau$, $X = \xi$, $Y = \eta$ jako granicę

$$\frac{dE[v]}{dt} = \lim_{t \to \tau t} \frac{1}{t-\tau} (E\{[v(Y(t), X(t), t) - v(\eta, \xi, \tau)] | Y(\tau) = \eta, X(\tau) = \xi\}), \tag{4.15}$$

po skorzystaniu z własności procesów Markowa i relacji (4.12) otrzymujemy następujące wyrażenie [12]:

$$\frac{dE[v|y, x_j, t]}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} F_i(y, x_j, t) + \sum_{k \neq j} \alpha_{jk}[v(y, x_k, t) - v(y, x_j, t)] \tag{4.16}$$

dla pochodnej $\dfrac{dE[v]}{dt}$ w punkcie $(y, x, = x_j, t)$.

A zatem, podobnie jak w przypadku równań deterministycznych, dla wyznaczenia pochodnej (wartości przeciętnej) ze względu na układ nie potrzeba rozwiązywać równań ruchu, wystarczy znać ich prawe strony i charakterystyki probabilistyczne procesu $X(t)$.

Możemy teraz sformułować kryterium stabilności według prawdopodobieństwa rozwiązania trywialnego układu (4.11) przy wprowadzonych wyżej założeniach stanowiące analogon pierwszego twierdzenia Lapunowa.

Twierdzenie 4.5. Jeżeli dla układu (4.11) istnieje dodatnio określona funkcja $v(y,x,t)$, której pochodna $\frac{dE[v]}{dt}$ ze względu na ten układ równań jest funkcją znaku ujemnego, to rozwiązanie trywialne układu (4.11) jest stabilne według prawdopodobieństwa [w sensie (3.2) lub (3.2')].

Na zakończenie tego punktu podamy przykład ilustrujący powyższe kryterium.

W pracy [12] zostało też wykazane twierdzenie podające kryterium asymptotycznej stabilności według prawdopodobieństwa układu (4.11) i stanowiące analogon drugiego twierdzenia Lapunowa. Natomiast w pracy [25] badana jest globalna stabilność asymptotyczna według prawdopodbieństwa rozwiązania trywialnego układu (4.11) przy wykorzystaniu idei dwóch funkcji Lapunowa. Interesujące rozważania dotyczące asymptotycznej stabilności według prawdopodobieństwa układów liniowych, których współczynniki są funkcjami procesu Markowa zawiera praca [39]. Rezultatów tych nie będziemy tutaj przytaczali (do pracy [12] wrócimy jeszcze w paragrafie następnym). Nieco inne podejście dotyczące rozszerzenia drugiej metody Lapunowa na układy stochastyczne dość ogólnej postaci spotykamy w pracy HASMINSKIEGO [22]. Warunki stabilności formułuje autor w terminach funkcji Lapunowa dla układu deterministycznego i zakłada, że dla występującego w równaniach procesu stochastycznego prawdziwe jest twierdzenie ergodyczne.

Niech będzie dany układ opisany równaniami (w postaci wektorowej)

$$\frac{dY}{dt} = F(Y,t)+\sigma(Y,t)X(t), \tag{4.17}$$

gdzie σ jest macierzą o wymiarach $k\times l$, $F=[F_1, \ldots, F_l]$, $Y(t)=[Y_1, (t), \ldots, Y_l(t)]$, $X(t)$ oznacza proces stochastyczny k-wymiarowy. Zakładamy, że $F(\mathbf{0},t)\equiv \mathbf{0}$, $\sigma_{ij}(\mathbf{0},t)\equiv 0$. Razem z układem (4.17) rozpatrujemy układ

$$\frac{dY}{dt} = F(Y,t) \tag{4.18}$$

i związane z nim funkcje Lapunowa $V(y,t)$. Zakładamy, że rozpatrywane funkcje $V(y,t)$ spełniają warunek Lipschitza względem y

$$|V(y_2,t)-V(y_1,t)| < M||y_2-y_1|| \tag{4.19}$$

w każdym obszarze ograniczonym. Jeżeli stała M nie zależy od obszaru, tj.

$$\sup_{x,t}\frac{|V(y_2,t)-V(y_1,t)|}{||y_2-y_1||} = M < \infty,$$

to będziemy oznaczali $V \in C(M)$. Przyjmiemy również oznaczenie

$$||\sigma|| = \Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\sigma_{ij}^2\Big)^{1/2}.$$

Twierdzenie 4.6. Jeżeli spełnione są następujące warunki:

1) dla układu (4.18) istnieje funkcja Lapunowa $V \in C(M)$ spełniająca warunki (c_1 i c_2 — są stałymi dodatnimi)

$$\inf_{\substack{t>0\\ ||y||>r}} V(y,t) = V_r > 0, \quad \text{przy} \quad r > 0, \tag{4.20}$$

$$\frac{d^0V}{dt} \leqslant -c_1V, \quad ||\sigma(y,t)|| \leqslant c_2V, \tag{4.21}$$

gdzie $\frac{d^0V}{dt}$ oznacza pochodną V ze względu na układ (4.18);

2) proces stochastyczny $X(t)$ spełnia nierówność

$$\sup_{t>0} E||X(t)|| < \frac{c_1}{Mc_2} \tag{4.22}$$

oraz $||X(t)|| = \xi(t)$ czyni zadość twierdzeniu ergodycznemu (prawu wielkich liczb) w następującej słabej postaci: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ istnieje $T > 0$ takie, że dla $t > T$

$$P\left\{\left\|\frac{1}{t}\int_0^t \xi(s)ds - \frac{1}{t}\int_0^t E[\xi(s)]ds\right\| > \delta\right\} < \varepsilon, \tag{4.23}$$

to rozwiązanie trywialne układu (4.17) jest globalnie stabilne asymptotycznie według prawdopodobieństwa.

W oparciu o powyższe twierdzenie można łatwo wyprowadzić (por. [22]) stosunkowo proste kryterium dla układów liniowych w postaci

$$\frac{dY}{dt} = [A(t)+B(t)]Y, \tag{4.24}$$

gdzie elementy macierzy kwadratowej $B(t)$ są procesami stochastycznymi, a układ deterministyczny

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y \tag{4.25}$$

jest eksponencjalnie stabilny.

Twierdzenie 4.7. Niech układ (4.25) będzie eksponencjalnie stabilny. Wtedy układ (4.24) (jego rozwiązanie trywialne) jest asymptotycznie stabilny według prawdopodobieństwa dla dowolnego (macierzowego) procesu stochastycznego $B(t)$ takiego, że proces $||B(t)||$ spełnia twierdzenie ergodyczne (4.23) oraz $E\{||B(t)||\} < c$, gdzie c jest dostatecznie małą stałą dodatnią.

Na zakończenie tego punktu przytoczymy twierdzenie podające warunki wystarczające do stabilności według prawdopodobieństwa ze względu na ciągle działające zaburzenia [29].

Twierdzenie 4.8. Niech dla $y \in R^n$ i $t \geqslant t_0$ istnieje ciągła i różniczkowalna wszędzie, za wyjątkiem co najwyżej punktu $y = 0$, funkcja $V(y, t)$ o własnościach:

1) $V(0, t) \equiv 0$; $\inf\limits_{t \geqslant t_0, ||y|| > r} V(y, t) = V_r > 0$ przy $r > 0$;

2) $||\mathrm{grad}_y V(y, t)|| < c$, $(y \neq 0)$;

3) w obszarze $t > t_0, ||y|| > r$ dla dowolnego r spełniona jest przy pewnej stałej $c_r > 0$ nierówność

$$\frac{d^0 V}{dt} < -c_r V.$$

Wtedy rozwiązanie trywialne układu (3.12) jest stabilne według prawdopodobieństwa ze względu na ciągle działające zaburzenia $R(t)$ małe w sensie średnim (por. określenie 3.5).

Rozważmy następujący przykład.

Niech będzie dany układ opisany równaniem

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + A_1(X)\frac{dY}{dt} + A_2(X) Y = 0,$$

które jest równoważne układowi

(*) $$\frac{dY_1}{dt} = Y_2, \quad \frac{dY_2}{dt} = -A_2(X) Y_1 - A_1(X_1) Y_2.$$

Funkcje $A_1(X)$ i $A_2(X)$ są znanymi ograniczonymi funkcjami zmiennej X, a proces stochastyczny $X(t)$ jest jednorodnym procesem Markowa o skończonej liczbie stanów $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, przy czym elementy macierzy przejścia p_{ij} są określone wzorami (4.12).

Wiadomo, że w przypadku deterministycznym warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności układu (*) przy $A_1 = \text{const}$ i $A_2 = \text{const}$ jest spełnienie nierówności $A_1 > 0$, $A_2 > 0$.

Załóżmy tutaj, że $A_2(x) > 0$ i wprowadźmy oznaczenie $A_1(x_k) = a_k$, $A_2(x_k) = b_k > 0$, przy $k = 1, 2, \ldots, r$. Weźmy funkcję dodatnio określoną

$$v(y_1, y_2, y_k) = y_1^2 + \frac{1}{b_k} y_2^2.$$

Na podstawie (4.16) mamy

$$\frac{dE[v]}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial v}{\partial y_2}(-b_k y_1 - a_k y_2) + \sum_{j \neq k = 1}^{r} \alpha_{jk}[v(y_1, y_2, x_j) - v(y_1, y_2, x_k)].$$

Po przekształceniach mamy

$$\frac{dE[v]}{dt} = -y_2^2 \left\{ \frac{2a_k}{b_k} - \sum_{j \neq k} \left(\frac{1}{b_j} - \frac{1}{b_k} \right) \alpha_{kj} \right\}.$$

A zatem, aby spełnione były warunki twierdzenia 4.5 potrzeba, żeby

(**) $$\frac{2a_k}{b_k} - \sum_{j \neq k} \left(\frac{1}{b_j} - \frac{1}{b_k} \right) \alpha_{kj} \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, r.$$

Tak więc, jeżeli dla układu (*) spełniony jest warunek (**) oraz $A_2(x_k) > 0$ ($k = 1, 2, \ldots, r$), to rozwiązanie trywialne jest stabilne według prawdopodobieństwa. Zauważmy, że (w odróżnieniu od przypadku deterministycznego) stabilność według prawdopodobieństwa może mieć miejsce również wtedy, gdy niektóre z a_k są ujemne lub równe zeru.

5. Stabilność średnia z p-tą potęgą

5.1. Układy opisane przez równania stochastyczne Ito. Zagadnienia dotyczące różnych typów stabilności średniej z p-tą potęgą rozwiązań równań Ito były przedmiotem badań wielu autorów (por. np. [42, 40, 16, 17, 41, 18], przy czym oprócz poszukiwania warunków (kryteriów) stabilności stochastycznej wiele uwagi poświęcono również zagadnieniu stabilizacji niestabilnych układów deterministycznych przez wprowadzenie do układu członów losowych.

Do najwcześniejszych badań w tej dziedzinie należą prace SAMUELSA [11, 42]. Badał on asymptotyczne własności momentów rzędu drugiego rozwiązań układów postaci

$$
\begin{aligned}
&dY_1 = Y_2 dt, \quad dY_2 = Y_3 dt, \ldots, \quad dY_{n-1} = Y_n dt, \\
&dY_n = -\sum_{i=1}^{n} [a_i dt + \sigma_i dZ_i] Y_i,
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

gdzie a_i i σ_i są stałymi.

Należy podkreślić, że Samuels nie korzystał z faktu, że proces $[Y_1(t), \ldots, Y_n(t)]$ jest procesem Markowa, a więc również z teorii stochastycznych równań Ito. Układ (5.1) analizował metodą kolejnych przybliżeń startując z rozwiązania układu deterministycznego odpowiadającego równaniom (5.1). Otrzymał on warunki wystarczające dla asymptotycznej ograniczoności momentów rzędu drugiego; asymptotyczną ograniczoność momentów rzędu drugiego nazywa on stabilnością średniokwadratową.

W pracy [42] SAMUELS rozważa zagadnienie stabilizacji liniowego niestabilnego układu deterministycznego przez wprowadzenie *białego szumu* do współczynników układu, przy czym przez stabilizację rozumie on, że momenty drugiego rzędu układu stochastycznego powinny być asymptotycznie ograniczone. Otrzymał on jako wniosek, że układ postaci

$$
\begin{aligned}
&dY_1 = Y_2 dt, \\
&dY_2 = [\beta Y_2 - \lambda_0^2 Y_1] dt - \sigma Y_2 dZ, \quad \beta > 0
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

posiada stabilne (tj. ograniczone) momenty rzędu drugiego, mimo że układ deterministyczny (otrzymany przez odrzucenie drugiego członu w drugim równaniu) jest niestabilny. Rezultat ten, na skutek istnienia pewnych błędów rachunkowych okazał się jednak fałszywy [40]. CAUGHEY pokazał, że jeśli dany układ jest opisany przez równanie różniczkowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach posiadające nieograniczone (przy $t \to \infty$) rozwiązanie, to dodając do jednego ze współczynników gaussowski *biały szum* otrzymuje się również nieograniczone w sensie średniokwadratowym rozwiązanie (przy tych samych warunkach początkowych). Czyli stabilizacja w powyższym sensie (przy pomocy gaussowskiego *białego szumu*) jest niemożliwa.

Zagadnienia dotyczące stabilizacji momentów były także rozważane w pracach [43, 16, 44], zaś ogólny problem ograniczoności momentów rozwiązań równań Ito jest rozważany w pracach [18, 55]. Definitywne rozstrzygnięcie kwestii stabilizacji momentów za pomocą *białych szumów* zawiera praca NEWELSONA i HASMINSKIEGO [17]. Jako wniosek jednego z twierdzeń autorzy otrzymują następujący bardzo ważny rezultat.

Twierdzenie 5.1. Jeżeli deterministyczny układ liniowy

$$dY_i = \sum_{j=1}^{n} F_i^j(t)\, Y_j\, dt \tag{5.3}$$

nie jest asymptotycznie stabilny, to układ

$$dY_i = \sum_{j=1}^{n} F_i^j(t)\, Y_j\, dt + \sum_{k,j=1}^{n} \sigma_i^{jk}(t)\, Y_k\, dZ_j(t) \tag{5.4}$$

nie będzie asymptotycznie stabilny średnio z wykładnikiem p [w sensie określenia 3.2 — relacja (3.5)] przy $p \geqslant 1$ niezależnie od własności $\sigma_i^{jk}(t)$.

W pracy [17] zostały również podane kryteria stabilności średniej z potęgą p rozwiązań równań Ito w terminach funkcji Lapunowa. A oto kryterium będące uogólnieniem znanego twierdzenia o stabilności eksponencjalnej dla równań deterministycznych (por. [2]) na przypadek dowolnego układu stochastycznych równań różniczkowych Ito.

Twierdzenie 5.2. Jeżeli istnieje funkcja $V(y, t)$, dla której przy $t \geqslant t_0$ i $y \neq \mathbf{0}$ spełnione są warunki (c_1, c_2, c_3, c_4 — stałe dodatnie):

$$c_1 \|y\|^p \leqslant V(y, t) \leqslant c_2 \|y\|^p, \tag{5.5}$$

$$LV(y, t) \leqslant -c_3 \|y\|^p, \tag{5.6}$$

$$\left| \frac{dV}{dy_i} \right| \leqslant c_4 \|y\|^{p-1}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.7}$$

to rozwiązanie trywialne układu (4.2) jest dla $t \geqslant t_0$ eksponencjalnie stabilne średnio z potęgą p.

Jeżeli układ jest liniowy postaci (5.4), to warunki (5.5)–(5.7) są konieczne i wystarczające dla eksponencjalnej stabilności średniej z potęgą p (por. twierdzenie 4.4 o stabilności równań Ito według pierwszego przybliżenia).

Na podstawie powyższych rezultatów oraz faktu, że dla układów liniowych o stałych współczynnikach z asymptotycznej stabilności średniej z potęgą p wynika eksponencjalna stabilność średnia z potęgą p, łatwo otrzymuje się następujące kryterium.

Twierdzenie 5.3. Na to, aby rozwiązanie trywialne układu liniowego o stałych współczynnikach

$$dY_i = \sum_{j=1}^{n} F_i^j Y_j\, dt + \sum_{k,j=1}^{n} \sigma_i^{jk}(t)\, Y_k\, dZ_j \tag{5.8}$$

było asymptotycznie stabilne średnio z potęgą p potrzeba i wystarcza, aby dla dowolnej dodatnio określonej i jednorodnej rzędu p funkcji $W(y)$ istniała dodatnio określona i jednorodna rzędu p funkcja $V(y)$ taka, że

$$L_1 V(y) = -W(y). \tag{5.9}$$

W zastosowaniach najczęściej używana jest stabilność średnia z kwadratem ($p = 2$). Istotne jest więc otrzymanie kryteriów algebraicznych zapewniających stabilność w sensie średniokwadratowym.

W pracy [43] została wskazana metoda otrzymania takich algebraicznych kryteriów stabilności średniej z kwadratem dla dowolnego układu liniowego z *białymi szumami*, jednak otrzymane według tej metody warunki są bardzo niewygodne w zastosowaniach, gdyż dla ich weryfikacji należy obliczyć n^2 wyznaczników, przy czym najwyższy stopień wyznacznika jest n^2. Dlatego też należy podkreślić znaczenie warunków, jakie dla układów liniowych postaci (5.1) zostały otrzymane w pracy [41]. Korzystając z rezultatów pracy [17] autorzy wykazują, że dla asymptotycznej stabilności średniej z kwadratem układu (5.1) potrzeba i wystarcza, aby były spełnione warunki Rautha–Hurwitza dla deterministycznej części układu (5.1), tj.

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\ldots \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \ldots 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \ldots 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \ldots 0 \\ 0 & 1 & a_2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_n \end{vmatrix} > 0,$$

oraz warunek

$$\Delta_n > \Delta,$$

gdzie Δ jest wyznacznikiem, który otrzymujemy z Δ_n przez zamianę pierwszego wiersza wierszem, którego elementy są funkcjami liniowymi stałych $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j$. Jeżeli w układzie (5.1) procesy $Z_i(t)$ są niezależnymi *białymi szumami*, to wyznacznik Δ powstaje z wyznacznika Δ_n przez zamianę pierwszego wiersza wierszem

$$[\sigma_{11}, -\sigma_{22}, \sigma_{33}, \ldots, (-1)^{n-1} \cdot \sigma_{nn}].$$

Analizę stabilności momentów rozwiązań równań stochastycznych Ito spotykamy również w pracach Gichmana (por. [18, 28]) oraz w pracy [45]. Dla układów liniowych autorzy wprowadzają równania różniczkowe dla momentów rozwiązań i sprowadzają w ten sposób badanie stabilności momentów do analizy stabilności rozwiązań deterministycznych liniowych równań różniczkowych. Należy również podkreślić, że w badaniach stabilności momentów rozwiązań równań nieliniowych, których współczynniki zawierają *białe szumy*, wiele autorów stosuje metody przybliżone. Na przykład praca [46] zawiera zastosowanie metody linearyzacji statystycznej do badania stabilności momentów.

Na zakończenie rozpatrzymy przykład.

Rozważmy układ opisany przez równania (5.2). Na podstawie procedury zawartej w pracy [16] pokażemy, że momenty rzędu drugiego rozwiązania nie są asymptotycznie stabilne.

Równanie Fokkera–Plancka–Kołmogorowa dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa przejścia procesu $[Y_1, Y_2]$ ma postać

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} - \beta \frac{\partial}{\partial y_2}(y_2 f) + \lambda_0^2 y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}(y_2^2 f).$$

Na podstawie tego równania można formalnie otrzymać równania dla momentów rzędu drugiego przez pomnożenie jego obu stron odpowiednio przez y_1^2, $y_1 y_2$, y_2^2 i scałkowanie po płaszczyźnie R^2. Otrzymujemy następujące równania:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} \dot{m}_{2,0} &= 2m_{1,1}, \\ \dot{m}_{1,1} &= -\lambda_0^2 m_{1,0} + \beta m_{1,2} + m_{0,2}, \\ \dot{m}_{0,2} &= -2\lambda_0^2 m_{1,1} + (2\beta + \sigma^2) m_{0,2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\text{(b)} \qquad m_{i,j} = E\{y_1^i y_2^j\}, \quad i, j = 0, 1, 2, \quad i+j = 2.$$

Stabilność momentów jest określona przez części rzeczywiste pierwiastków równania charakterystycznego

$$\xi^3 - (3\beta + \sigma^2)\xi^2 + \beta(2\sigma + \sigma^2)\xi + 2\lambda_0^2(2\beta + \sigma^2) = 0.$$

Aby rozwiązania (tj. $m_{1,1}, m_{0,2}, m_{2,0}$) równań (a) dążyły asymptotycznie do zera, współczynniki równania muszą być dodatnie. Tak jednak nie jest, gdyż $3\beta + \sigma^2 > 0$. A zatem momenty rzędu drugiego nie mogą być asymptotycznie stabilne.

5.2. Inne układy nieliniowe. W analizie stabilności średniej z p-tą potęgą układów opisanych równaniami innymi niż równania Ito otrzymano również szereg ważnych rezultatów. Przede wszystkim należy wymienić prace BERTRAMA i SARACHIKA [10] oraz KACA i KRASOWSKIEGO [12], w których po raz pierwszy zastosowany został aparat funkcji Lapunowa do badania stabilności stochastycznej.

Rozważmy układ opisany równaniem w postaci wektorowej

$$\text{(5.10)} \qquad \frac{dY}{dt} = F[Y(t), X(t), t].$$

BERTRAM i SARACHIK zakładają, że F jest funkcją ciągłą i spełnia warunek Lipschitza ze względu na y, $F[\mathbf{0}, X(t), t] \equiv \mathbf{0}$, zaś proces $X(t)$ jest taki, że jego realizacje zachowują się na tyle regularnie, aby równanie (5.10) mogło być rozumiane jako równanie dla realizacji.

Twierdzenie 5.4. Jeżeli istnieje funkcja Lapunowa $V(y, t)$ określona na przestrzeni fazowej, która spełnia warunki:

a) $V(\mathbf{0}, t) = 0$,

b) $V(y, t)$ jest ciągła względem y i t oraz istnieją jej pierwsze pochodne względem y i t,

c) $V(y, t) \geqslant \alpha \| y \|$ dla pewnej stałej $\alpha > 0$,

d) $E\{d_t V(y(t), t)\} \leqslant 0$,

to rozwiązanie trywialne układu (5.10) jest stabilne średnio z potęgą $p = 1$.

BERTRAM i SARACHIK zastosowali swoje rezultaty do układów takiej postaci, jakie w przypadku jednowymiarowym rozpatrywał ROSENBLOOM [8], tj. dla układów

$$\text{(5.11)} \qquad \frac{dY}{dt} = A(t)Y,$$

gdzie $A(t)$ jest macierzą diagonalną: $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $a_{ij}(t) = a_i(t)$ dla $j = i$, $a_{ij}(t) = 0$ dla $i \neq j$. Dobierając odpowiednią funkcję Lapunowa V pokazali oni, że warunki

$$(5.12) \qquad E\left\{a_i(t)\exp\int_{t_0}^{t} a_i(\tau)d\tau\right\} < 0, \quad t \geqslant t_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

zapewniają asymptotyczną stabilność średnią z potęgą $p = 1$. Rozważali oni także warunki stabilności dla układu (5.11), w którym współczynniki są odcinkami stałe.

Wiele ważnych kryteriów dla układów postaci (5.10) otrzymali KAC i KRASOWSKI [12], przy czym o procesie $X(t)$ zakładają oni, że jest to jednorodny proces Markowa o skończonej liczbie stanów $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ (por. założenia wyszczególnione w p. 4.2). A oto ich twierdzenie dotyczące eksponencjalnej stabilności średniej z kwadratem.

Twierdzenie 5.5. Rozwiązanie trywialne układu (5.10) jest eksponencjalnie stabilne średnio z kwadratem wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieje funkcja $v(y, x, t)$ (por. p. 4.2) spełniająca warunki (c_1, c_2, c_3 — stałe dodatnie)

$$(5.13) \qquad c_1\|y\|^2 \leqslant v(y, x, t) \leqslant c_2\|y\|^2,$$

$$(5.14) \qquad \frac{dE[v]}{dt} \leqslant -c_3\|y\|^2,$$

gdzie $\|y\| = (y_1^2 + \ldots + y_n^2)^{1/2}$.

Dla układu liniowego postaci

$$(5.15) \qquad \frac{dY}{dt} = A[X(t)]Y$$

otrzymali oni kryterium dla asymptotycznej stabilności średniej z kwadratem w postaci $N \cdot r$ nierówności algebraicznych, gdzie $N = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Interesujące rozważania dotyczące asymptotycznej stabilności średniej z p-tą potęgą zawiera też praca [56]. Autor rozważa układy liniowe postaci (5.11) o współczynnikach odcinkami stałych przy następujących założeniach:

a) $A(t) = A_k$ dla $t_{k-1} \leqslant t < t_k$, $k = 1, 2, \ldots$;
$A(t)$ jest macierzą o wymiarach $n \times n$,

b) $\{(t_k - t_{k-1})A_k\}$ jest ciągiem niezależnych macierzy losowych o jednakowych rozkładach,

c) $\{(t_k - t_{k-1})A_k\}$ jest łańcuchem Markowa macierzy losowych.

W swoich rozważaniach BHARUCHA korzysta w sposób istotny z pojęcia kroneckerowskiego iloczynu macierzy (wprowadzonego po raz pierwszy przez BELLMANA), wobec czego weryfikacja otrzymanych przez niego warunków stabilności średniej wymaga wyznaczenia wartości własnych macierzy o stosunkowo dużych wymiarach; np. dla równania n-tego rzędu i procesu Markowa (charakteryzującego strukturę układu) o m stanach należy obliczyć wartości własne macierzy o wymiarach $mn \times mn$.

Ciekawe rezultaty dotyczące asymptotycznego zachowania się momentów rozwiązań stochastycznych układów liniowych zawiera praca [20].

6. Stabilność prawie na pewno

Należy się spodziewać, że w analizie rzeczywistych układów dynamicznych największe znaczenie będzie miał taki rodzaj stabilności stochastycznej, którego istota jest najbardziej zbliżona do stabilności deterministycznej. Takim rodzajem stabilności stochastycznej jest stabilność prawie na pewno, bowiem wymaga ona, aby stabilność miała miejsce z prawdopodobieństwem jeden, lub inaczej — aby prawie wszystkie realizacje procesu stochastycznego opisujące ruch były stabilne (w sensie deterministycznym). Mimo że analiza tego typu stabilności (dotycząca szerszej klasy układów) została zapoczątkowana nieco później niż analiza innych rodzajów stabilności stochastycznej, to jednak otrzymano również wiele cennych rezultatów. Rezultaty te związane są przede wszystkim z takimi nazwiskami, jak KOZIN, CAUGHEY i GRAY, MOROZAN oraz HASMINSKIJ. Istotnym faktem dla analizy stabilności prawie na pewno było wskazanie przez KOZINA [19] możliwości wykorzystania twierdzeń ergodycznych w formułowaniu warunków tego typu stabilności.

Rozważmy liniowy układ stochastyczny opisany przez równania (w postaci wektorowej)

$$\frac{dY}{dt} = [A+B(t)]Y, \tag{6.1}$$

gdzie $A = \{a_{ij}\}$ jest stałą macierzą stabilną (wartości własne mają części rzeczywiste ujemne) o wymiarach $n\times n$, zaś $B(t)$ jest macierzą o wymiarach $n\times n$, której elementy

$$\{b_{ij}(t), \quad t\in[t_0 = 0, \infty)\} \tag{6.2}$$

są procesami stochastycznymi spełniającymi warunki:

1) posiadają ciągłe prawie wszystkie realizacje,

2) są stacjonarne w węższym sensie,

3) są ergodyczne z prawdopodobieństwem 1, tj. z prawdopodobieństwem 1 zachodzi równość

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t b_{ij}(\tau)d\tau = E[b_{ij}(t)] = E[b_{ij}(0)]. \tag{6.3}$$

Korzystając z powyższych założeń oraz z lematu Gronwalla-Bellmana (por. [1]) łatwo otrzymuje się następujące twierdzenie [19]:

Twierdzenie 6.1. Niech będą spełnione przytoczone wyżej warunki i niech istnieje wartość przeciętna $E\{||B(t)||\}$, gdzie $||B(t)|| \equiv \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}(t)|$. Wtedy istnieje stała C zależna od macierzy A taka, że nierówność

$$E\{||B(t)||\} < C$$

implikuje stabilność prawie na pewno trywialnego rozwiązania układu (6.1) [w sensie warunku (3.7)].

Założenie 1) dotyczące procesów $b_{ij}(t)$ zapewnia istnienie, jednoznaczność i ciągłość rozwiązania układu (6.1) z prawdopodobieństwem 1 dla dowolnego $Y(0) = y^0$. Warunki 2) i 3) są wprowadzone w celu otrzymania kryterium stabilności. Należy podkreślić, że istnieją dwie ważne klasy procesów stacjonarnych w węższym sensie czyniące zadość warunkowi 3). Pierwszą klasą są tzw. procesy liniowe, tj. procesy o postaci

$$\int_{-\infty}^{t} p(t-\tau)\,dY(\tau), \tag{6.4}$$

gdzie $Y(t)$ są procesami o przyrostach niezależnych i jednorodnych. Proces $Y(t)$ może być na przykład procesem Wienera, a więc procesy postaci (6.4) obejmują ważną klasę procesów otrzymanych przez przepuszczenie gaussowskiego *białego szumu* przez filtr liniowy. Drugą ważną klasą stacjonarnych procesów ergodycznych (posiadających własność metrycznej tranzytywności) są procesy gaussowskie o ciągłej funkcji korelacyjnej i gęstości widmowej.

Ostrzejsze warunki zapewniające stabilność prawie na pewno rozwiązań układu (6.1) podali CAUGHEY i GRAY w pracy [21] używając aparatu funkcji Lapunowa. Otrzymane twierdzenia dla układu (6.1) rozszerzyli oni następnie na równania nieliniowe rzędu drugiego postaci

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+2\beta\frac{dY}{dt}+[1+b(t)]Y+g(Y)=0, \tag{6.5}$$

gdzie $b(t)$ jest procesem stochastycznym o własnościach takich, jak procesy $b_{ij}(t)$ w twierdzeniu 6.1, zaś g jest funkcją nieliniową o własnościach: 1) $g(y)$ — ciągła, 2) $|g(y)|$ — monotonicznie zanikająca, 3) $yg(y)\geqslant 0$, 4) $g(y)=-g(-y)$.

Należy tutaj wymienić również prace MOROZANA [47, 48, 49]. Autor bada stabilność prawie na pewno układów liniowych postaci (6.1) z losową macierzą A, nieliniowych układów równań stochastycznych Ito oraz inne ogólne zagadnienia związane ze stabilnością stochastyczną.

Ważne twierdzenie dotyczące asymptotycznej stabilności globalnej prawie na pewno dla układów nieliniowych postaci (4.17) otrzymał HASMINSKIJ [22]. Wykazał on, że jeżeli w twierdzeniu 4.6 sformułowanym w p. 4.2 warunek (4.23) zamienić warunkiem silniejszym (ergodyczność z prawdopodobieństwem 1)

$$P\left\{\frac{1}{t}\int_0^t \xi(s)ds-\frac{1}{t}\int_0^t E[\xi(s)]ds \underset{t\to\infty}{\to} 0\right\}=1, \tag{6.6}$$

to rozwiązanie trywialne układu (4.17) jest globalnie asymptotycznie stabilne prawie na pewno (w sensie określenia 3.3).

Omówione wyżej kryteria stabilności prawie na pewno są z praktycznego punktu widzenia dość skomplikowane. Z drugiej zaś strony wiadomo, że wygodną w zastosowaniach charakterystyką badanych procesów są ich momenty. Interesujące są więc relacje między własnościami momentów procesu stochastycznego opisującego ruch i stabilnością prawie na pewno. Badanie takich relacji dla liniowych układów stochastycznych jest przedmiotem pracy KOZINA [27]. Otrzymał on wystarczający warunek stabilności prawie na pewno wyrażony przez stosunkowo proste własności momentów. Poświęcimy chwilę uwagi tym interesującym i ważnym rezultatom.

Rozważmy liniowy układ stochastyczny postaci (6.1), gdzie A jest macierzą stałą o wymiarach $n \times n$, zaś $B(t)$ jest macierzą, której niezerowe elementy są procesami stochastycznymi $\{b_{ij}(t), t \in [0, \infty)\}$, których prawie wszystkie realizacje są ciągłe i ograniczone na $[0, \infty)$; z ciągłości prawie wszystkich realizacji wynika mierzalność procesów $b_{ij}(t)$. Te warunki zapewniają istnienie, jednoznaczność i ciągłość prawie wszystkich realizacji rozwiązania

$$Y(y^0, t_0; t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad y^0 \in R^n \tag{6.7}$$

układu (6.1) dla dowolnego $t_0 > 0$ i dowolnego $y^0 \in R^n$. Niech $||y|| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|$.

Korzystając z własności mierzalnych procesów stochastycznych i opierając się na twierdzeniu o całkowalności realizacji takich procesów oraz uwzględniając liniowość układu (6.1) i ograniczoność realizacji macierzy $B(t)$, KOZIN wykazał prawdziwość następującego twierdzenia:

Twierdzenie 6.2. Jeżeli dla $y^0 \in R^n$, $t > 0$, rozwiązanie (6.7) układu (6.1) przy wyszczególnionych wyżej założeniach o współczynnikach $b_{ij}(t)$ spełnia warunek

$$\int_{t_0}^{\infty} E\{||Y(y^0, t_0; t)||\} dt < \infty, \tag{6.8}$$

to rozwiązanie trywialne układu (6.1) jest prawie na pewno asymptotycznie stabilne globalnie (w sensie określenia 3.3).

Zauważmy, że dla otrzymania powyższej tezy nie zakładaliśmy stabilności średniej, niemniej warunek (6.8) sugeruje, że te dwa rodzaje stabilności stochastycznej nie są niezależne od siebie.

Istotnie, załóżmy na przykład, że rozwiązanie trywialne układu (6.1) jest eksponencjalnie stabilne średnio z potęgą $p = 1$, tj. zachodzi relacja (3.6) dla $p = 1$. Z relacji tej wynika bezpośrednio, że $E\{||Y(y^0, t_0; t)||\}$ ma skończoną całkę, czyli spełniony jest warunek (6.8) powyższego twierdzenia. Możemy więc sformułować twierdzenie-wniosek:

Jeżeli rozwiązanie trywialne układu (6.1), *którego macierz współczynników* $B(t)$ *spełnia założenie podane wyżej, jest eksponencjalnie stabilne średnio z potęgą* $p = 1$, *wtedy jest ono również stabilne prawie na pewno.*

Praca KOZINA, poza przytoczonym tutaj podstawowym twierdzeniem, zawiera jeszcze inne ciekawe rozważania, spośród których należy podkreślić przykłady wskazujące, że rozwiązanie, które jest asymptotycznie stabilne prawie na pewno, nie musi być stabilne średnio.

Poruszone tutaj zagadnienia dotyczące związku stabilności prawie na pewno z własnościami (w szczególności ze stabilnością) momentów są dla zastosowań bardzo istotne, jednakże w chwili obecnej są one jeszcze bardzo mało rozpracowane.

Podobnie, jak w przypadku innych typów stabilności stochastycznej, interesującym zagadnieniem są kwestie stabilizacji w sensie prawie na pewno niestabilnych układów deterministycznych przez wprowadzenie do układu członów losowych.

W pracach [50, 51] BOGDANOFF bada teoretycznie i eksperymentalnie problem stabilizacji w sensie prawie na pewno przez wprowadzenie losowego wymuszenia parametrycznego w postaci

$$B(t) = \eta \sum_{k=-N}^{+N} \varepsilon_k e^{i(\lambda_k t + \varphi_k)}, \tag{6.9}$$

gdzie φ_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie równomiernym na $[0, 2\pi]$. Proces stochastyczny (6.9) jest sumą drgań harmonicznych o losowych fazach i ma widmo dyskretne. BOGDANOFF pokazał, że jeżeli η jest dostatecznie małe, a $|\lambda_k + \lambda_j|_{k \neq j}$ są wystarczająco duże i $E\{[\dot{B}(t)]^2\} > gl$, to położenie równowagi układu

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= Y_2, \\ \frac{dY_2}{dt} &= \left(\frac{g}{l} + \frac{\ddot{B}(t)}{l}\right) \sin Y_1 - 2cY_2 \end{aligned} \tag{6.10}$$

jest stabilne prawie na pewno, mimo że położenie równowagi układu deterministycznego, otrzymanego po odrzuceniu członu zawierającego szum losowy, nie jest stabilne.

Zachodzi pytanie, czy można stabilizować układ w sensie prawie na pewno przez wprowadzenie losowego wymuszenia parametrycznego o widmie ciągłym i ewentualnie jak szeroka jest klasa takich procesów i układów. Odpowiedź na to pytanie pozostaje jeszcze problemem otwartym.

7. Stabilność entropijna

Entropia układu dynamicznego będąca pewną całkową ceną rozkładu prawdopodobieństwa jego stanu jest charakterystyką bardzo ogólną, toteż również pojęcie stabilności entropijnej jest bardzo słabym pojęciem stabilności stochastycznej. Niemniej okazuje się (por. np. [33]), że w pewnych zagadnieniach jest ono również istotne. Poświęcimy mu więc chwilę uwagi.

Rozważmy układ opisany równaniami

$$\frac{dY_i}{dt} = F_i[Y_1(t), \ldots, Y_n(t)], \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.1}$$

Pochodna entropii tego układu spowodowanej losowymi warunkami początkowymi wyraża się wzorem [33]

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} E\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right]. \tag{7.2}$$

A zatem, jeżeli

$$\sum_{i=1}^{n} E\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right] < 0, \tag{7.3}$$

to układ (7.1) charakteryzuje się ogólną monotoniczną stabilnością entropijną.

W przypadku układów liniowych

$$\frac{dY_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) Y_k = 0, \tag{7.4}$$

równanie opisujące zmianę entropii ma postać

$$\frac{dH}{dt} = - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) \tag{7.5}$$

i warunki stabilności entropijnej przyjmują postać prostą. W sposób bezpośredni otrzymujemy następujące twierdzenia:

a) warunkiem koniecznym i dostatecznym ogólnej monotonicznej stabilności entropijnej układu (7.4) jest

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) > 0; \tag{7.6}$$

b) warunkiem koniecznym i dostatecznym ogólnej entropijnej stabilności układu (7.4) jest

$$\sum_{i=1}^{n} \lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} a_{ii}(t) dt = \infty. \tag{7.7}$$

Dla układów o stałych współczynnikach warunki ogólnej monotonicznej stabilności entropijnej i ogólnej stabilności entropijnej pokrywają się i przyjmują postać

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} > 0. \tag{7.8}$$

W tym przypadku wielkość $s = - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ jest równa sumie pierwiastków równania charakterystycznego układu. A zatem otrzymujemy twierdzenie:

Na to, aby dla układu liniowego (7.4) *miała miejsce ogólna stabilność entropijna potrzeba i wystarcza, aby suma pierwiastków równania charakterystycznego tego układu była ujemna* ($s < 0$).

Zauważmy że układ liniowy, dla którego ma miejsce ogólna stabilność entropijna, może być niestabilny w zwykłym sensie. Jednakże układ liniowy niestabilny entropijnie jest również niestabilny w zwykłym sensie (tj. w sensie Lapunowa); wynika to (dla stałych współczynników) z powyższego twierdzenia oraz (dla zmiennych współczynników) ze znanego wzoru dla wyznacznika fundamentalnego układu rozwiązań układu (7.4). Jak wiemy, bardziej szczegółową charakterystyką stanu układu jest entropia dowolnej jego części, np. entropia jednej współrzędnej uogólnionej $H_i(t)$. Żądając, aby entropia każdej współrzędnej uogólnionej malała ze wzrostem t otrzymujemy silniejsze pojęcie *cząstkowej stabilności entropijnej* układu (7.1) — dokładniej charakteryzujące jego ruch.

Można oczywiście poszukiwać również warunków stabilności entropijnej dla układów, których entropia spowodowana jest nie tylko losowymi warunkami początkowymi, lecz także losowymi wymuszeniami zewnętrznymi. Jest to jednak zagadnienie trudniejsze, gdyż równanie opisujące zmianę w czasie entropii jest w tym przypadku skomplikowane.

Rozważmy przykład. Dla układu w postaci

$$\frac{dY_1}{dt} - Y_2 = 0,$$

$$\frac{dY_2}{dt} + \left(\frac{l}{t} - 1\right) Y_2 - aY_1 = 0,$$

mamy zgodnie z równaniem (7.5)

$$\frac{dH}{dt} = 1 - \frac{b}{t},$$

czyli

$$H = H_0 + t - t_0 - b \ln \frac{t}{t_0},$$

gdzie H_0 jest entropią warunków początkowych. Przy $b/t > 1$ entropia początkowo maleje ze wzrostem t, a następnie rośnie. Przy $b/t < 1$ entropia monotonicznie wzrasta. W obu przypadkach układ jest entropijnie niestabilny.

8. Inne zagadnienia

Na zakończenie chcemy zwrócić uwagę na inne jakościowe problemy stochastycznych równań różniczkowych, przede wszystkim na takie kwestie, jak stacjonarność, okresowość oraz dysypatywność rozwiązań równań stochastycznych. Znajomość warunków gwarantujących wymienione własności rozwiązań jest w szeregu zastosowań bardzo istotna. Zagadnienia stacjonarności, periodyczności oraz ograniczoności rozwiązań równań stochastycznych są przedmiotem wielu prac (por. [52, 9, 53, 54, 29, 18]). Nie będziemy tutaj omawiać szerzej tych kwestii; dla ilustracji tej problematyki przytoczymy jedynie rezultaty otrzymane przez HASMINSKIEGO [29].

HASMINSKIJ wprowadził następujące pojęcie dysypatywności procesu stochastycznego i dysypatywności układu.

Określenie 8.1. Proces $Y(t) = Y(t, \omega)$ nazywa się *procesem dysypatywnym*, jeżeli zmienne losowe $||Y(t, \omega)||$ są jednostajnie względem t ograniczone według prawdopodobieństwa, tj. jednostajnie względem $t \geqslant t_0$ prawdopodobieństwo $P\{||Y(t, \omega)|| > c\} \to 0$ przy $c \to \infty$.

Określenie 8.2. Układ

$$\frac{dY}{dt} = G[Y(t), t, X(t)] \tag{8.1}$$

nazywa się *układem dysypatywnym*, jeżeli zmienne losowe $||Y(t, \omega)||$ są ograniczone według prawdopodobieństwa jednostajnie względem $t \geqslant t_0$ i jednostajnie względem zmiennych losowych $Y_0(\omega) = Y(t_0, \omega)$ czyniącym zadość przy pewnym $k < \infty$ warunkowi

$$P\{||Y_0(\omega)|| < k\} = 1.$$

Niech będzie dany układ (w postaci wektorowej)

$$\frac{dY}{dt} = F(Y, t) + X(t, \omega) \tag{8.2}$$

i niech funkcja $F(y, t)$ spełnia warunek Lipschitza względem zmiennej y. Niech $\frac{dV}{dt}$ będzie pochodną funkcji $V(y, t)$ ze względu na układ

$$\frac{dY}{dt} = F(Y, t). \tag{8.3}$$

Następujące twierdzenie podaje warunki dysypatywności układu (8.2) w terminach własności układu deterministycznego (8.3).

Twierdzenie 8.1. Niech dla $y \in R^n$ i $t \geqslant t_0$ istnieje nieujemna funkcja $V(y, t)$ o własnościach:

1) $\sup\limits_{t \geqslant t_0} V(0, t) < \infty$; $\inf\limits_{t \geqslant t_0} V(y, t) \to \infty$ przy $||y|| \to \infty$;

2) funkcja $||\operatorname{grad}_y V||$ jest ograniczona;

3) $\frac{dV}{dt} < c$, przy czym na zewnątrz pewnego obszaru ograniczonego spełniona jest przy stałej $c_1 > 0$ nierówność

$$\frac{dV}{dt} < -c_1 V.$$

Wtedy układ (8.2) jest dysypatywny dla dowolnego procesu stochastycznego $X(t, \omega)$, dla którego

$$\sup_{t \geqslant t_0} E\{||X(t, \omega)||\} < \infty.$$

Rozpatrując różne węższe klasy procesów $X(t, \omega)$ można otrzymać warunki dysypatywności przy słabszych warunkach odnośnie układu (8.3).

Załóżmy, że funkcja F w układzie (8.2) i (8.3) zależy tylko od y, tj. $F(y, t) = F(y)$. Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 8.2. Jeżeli dla układu (8.3), w którym $F = F(y)$, istnieje różniczkowalna w sposób ciągły funkcja $V(y)$ taka, że:

1) $\inf V(y) = V(y_1)$ dla pewnego $y_1 \in R^n$;

2) funkcja $\frac{dV}{dt} \to -\infty$ przy $||y|| \to \infty$;

3) funkcja $||\operatorname{grad} V||$ jest ograniczona w R^n,

to układ (8.2) posiada rozwiązanie stacjonarne dla dowolnego procesu stacjonarnego $X(t, \omega)$ o skończonej wartości przeciętnej.

Interesujące rezultaty dotyczące stacjonarności rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych znajdują się również w pracach [53, 9]; jednakże w pracy [9] pojęcie stacjonarności jest rozumiane nieco inaczej niż zwykle.

Literatura cytowana w tekście

1. R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill Company, 1953.
2. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Москва 1967.
3. И. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения*, Москва 1966.
4. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва 1949.
5. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, А. А. Витт, *О статистическом рассмотрении динамических систем*, Журн. Эксп. Теор. Физ., 3, **3** (1933).
6. Н. Д. Мойсеев, *О вероятности устойчивости по Ляпунову*, Докл. АН СССР, **1** (1936), 211.
7. В. В. Степанов, *К определению вероятности устойчивости*, Докл. АН СССР, **18** (1938), 151.
8. A. Rosenbloom, *Analysis of linear systems with randomity time-varying parameters*, Proc. Symp. Inform. Networks, 1954, Brooklyn 1955, 145–153.
9. И. И. Ворович, *Об устойчивости движения при случайных возмущениях*, Изв. АН СССР, сер. матем., 1, **20** (1956).
10. J. E. Bertram, P. E. Sarachik, *Stability of circuits with randomly time-varying parameters*, Proc. Int. Symp. on Circuit and Inform. Theory, Los Angeles 1959.
11. J. C. Samuels, *On the mean square stability of random linear systems*, IRE Trans. Circuit Theory, **6** (1959); Spec. Supl., 248–259.
12. И. Я. Кац, Н. Н. Красовский, *Об устойчивости систем со случайными параметрами*, Прикл. мат. мех., 5, **24** (1960).
13. Н. Н. Красовский, *Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях*, Прикл. мат. мех., 1, **24** (1960).
14. T. K. Caughey, J. K. Dienes, *The behaviour of linear systems with randomly parametric excitation*, J. Math. Phys., **41** (1962), 300–310.
15. Р. З. Хасьминский, *Об устойчивости траектории марковских процессов*, Прикл. мат. мех., 6, **26** (1962).
16. J. L. Bogdanoff, F. Kozin, *Moments of the output of linear random systems*, J. Acoust. Soc. Amer., 8, **34** (1962), 1063.
17. М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский, *Об устойчивости стохастических систем*, Пробл. пер. информ., 3, **2** (1966).
18. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения*, Киев 1968.
19. F. Kozin, *On almost sure stability of linear systems with random coefficients*, J. Math. Phys., 1, **42** (1963).
20. М. Г. Шур, *О линейных дифференциальных уравнениях со случайными возмущенными параметрами*, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, **29** (1965).
21. T. K. Caughey, A. H. Gray, *On the almost sure stability of linear dynamic systems with stochastic coefficients*, J. Appl. Mech., 2, **E32** (1965).
22. Р. З. Хасьминский, *Об устойчивости нелинейных стохастических систем*, Прикл. матем. мех., 5, **30** (1966).
23. H. J. Kushner, *On the construction of stochastic Lapunov functions* , Trans. JEEE, **10** (1965), 477.
24. A. K. Mahalanabis, S. Purkayastha, *On the stability of stochastic Lurie type systems*, Int. J. Control, 4, **8** (1968).
25. И. Я. Кац, *Об устойчивости в целом стохастических систем*, Прикл. матем. мех., 2, **28** (1964).
26. А. Н. Малахов, *Статистическая устойчивость движения*, Изв. Высш. Учеб. Зав. Радиофизика, 1, **6** (1963).
27. F. Kozin, *On relations between moment properties and almost sure Lapunov stability for linear stochastic systems*, J. Math. Anal. Appl., 2, **10** (1965).
28. И. И. Гихман, *Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений*. Сборник: „*Пределеные теоремы и стохастические выводы*", Ташкент 1966.
29. Р. З. Хасьминский, *О диссипативности случайных процессов определенных дифференциальными уравнениями*, Пробл. перед. информ., 1, **1** (1965).

30. J. C. SAMUELS, A. C. ERINGEN, *On stochastic linear systems*, J. Math. Phys., 2, **38** (1959).
31. W. M. WONHAM, *Lapunov criteria for weak stochastic stability*, J. Diff. Eqs., **5** (1966), 195.
32. В. А. БРУСИН, М. Л. ТАЙ, *Абсолютная стохастическая устойчивость*. Изв. Высш. Учебн. Зав. Радиофизика, 7, **10** (1967).
33. А. А. КРАСОВСКИЙ, *Статистическая теория переходных процессов в системах управления*, Москва 1966.
34. А. А. КРАСОВСКИЙ, *Энтропийная устойчивость линейных непрерывных систем автоматического управления*, Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 5 (1963).
35. А. А. КРАСОВСКИЙ, *Об энтропийной устойчивости динамических систем*, Автомат. телемех., 3, **26** (1965).
36. R. S. BUCY, *Stability and positive supermartingales*, J. Diff. Eqs., **1** (1965), 151.
37. H. J. KUSHNER, *Stochastic stability and control*, Academic Press, 1967.
38. H. J. KUSHNER, *On the stability of stochastic dynamical systems*, Proc. Natl. Acad. Sci., 8, **53** (1967).
39. Э. А. ЛИДСКИЙ, *Об устойчивости решений медленно изменяющееся стохастической системы*, Сибирский мат. журн., 5, **4** (1963).
40. T. K. CAUGHEY, *Comments on «On the stability random systems»*, J. Acoust Soc. Amer., **32** (1960), 1356.
41. М. В. НЕВЕЛЬСОН, Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ, *Об устойчивости линейной системы при случайных возмущениях ее параметров*, Прикл. мат. мех., 2, **30** (1966).
42. J. C. SAMUELS, *On the stability of random systems and the stabilization of deterministic systems with random noise*, J. Acoust. Soc. Amer., 5, **32** (1960).
43. M. A. LEIBOWITZ, *Statistical behavior of linear systems with randomly varying parameters*, J. Math. Phys., 6, **4** (1963).
44. Ю. Л. РАБОТНИКОВ, *О невозможности стабилизации системы в среднем квадратичном случайными возмущениями ее параметров*, Прикл. мат. мех., 5, **28** (1964).
45. Г. Н. МИЛЬШТЕЙН, Ю. М. РЕПИН, *О среднеквадратичной устойчивости стохастических дифференциальных уравнений*, Прикл. мат. мех., 3, **31** (1967).
46. Y. SAWARAGI, *Statistical studies on the response of non-linear time varying control systems subjected to a suddenly applied stationary gaussian random input*, Mem. Fac. Eug. Kyoto Univ., **24** (1962), 465.
47. T. MOROZAN, *Stability of some linear stochastic systems*, J. Diff. Eqs., **3** (1967), 153.
48. T. MOROZAN, *Stability of linear systems with random parameters*, J. Diff. Eqs., **3** (1967), 170.
49. T. MOROZAN, *Stability of differential systems with random parameters*, J. Math. Anal. Appl., 3, **24** (1968).
50. J. L. BOGDANOFF, *Influence on the behavior of a linear dynamical system of some imposed motion of small amplitude*, J. Acoust. Soc. Amer., **34** (1962), 1055.
51. J. L. BOGDANOFF, S. J. CITRON, *On the stabilization of the inverted pendulum*, Proc. 9tg Midwestern Mech. Conf. (1965).
52. S. BOCHNER, *Stationarity boundedness, almost periodicity of random valued functions*, Proc. 3rd Berkeley Symp. Prob. Statist., **2** (1955).
53. K. ITO, M. NISIO, *On stationary solutions of a stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ., 1, **4** (1964).
54. А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, *О корреляционных функциях векторных процессов удовлетворяющих некоторым дифференциальным уравнениям*, Укр. мат. журн., 3, **14** (1962).
55. M. ZAKAI, *On the ultimate boundedness of moments associated with solutions of stochastic differential equations*, Technion Haifa, Faculty of Electr. Eng. Pub., **58** (1966).
56. B. H. BHARUCHA, *On the stability of randomly varying systems*, Ph. D. Thesis, Dept of Electr. Eng., Univ. California, Berkeley 1961.
57. W. BOGUSZ, *Stateczność techniczna maszyn wirnikowych przy wymuszeniach stochastycznych*, Dynamika Stroju, Proc. Vth Conf. on Dynamics of Machines, Liblice 1968.
58. W. BOGUSZ, *Stateczność techniczna układów stochastycznych*, Nonlinear Vibr. Probl., **10** (1969).
59. W. GAWROŃSKI, *Analiza pewnego układu nieliniowego przy wymuszeniu stochastycznym*, Mech. Teor. Stos., 1, **8** (1970).
60. K. SOBCZYK, *Stochastyczne równania różniczkowe*, rozdz. XXXV w: «Poradnik Inżyniera» – Matematyka, Warszawa (w druku).

Резюме

СТОХАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

В работе рассматриваются проблемы стохастической устойчивости движения дискретных динамических систем. В ней представлен обзор основных понятий и важнейших результатов полученных в течение последних лет.

Работа содержит определения устойчивости по вероятности, устойчивости в среднем, устойчивости почти наверное а также определения энтропийной устойчивости и полной статистической устойчивости. Далее представлены основные критерии стохастической устойчивости движения (в соответствующем смысле) систем описываемых с помощью стохастических уравнений Ито и других стохастических нелинейных систем.

Работа имеет общий характер; рассуждения проводится с точки зрения качественных методов стохастических дифференциальных уравнений. В связи с чем представленные результаты могут быть применены для систем различной физической природы (например механических, электрических и др.).

Summary

STOCHASTIC STABILITY OF MOTION

The paper is concerned with the problems of stochastic stability of motion of discrete dynamical systems. It contains a systematic survey of the fundamental concepts and the most important results which have been obtained recently.

The definitions of stochastic stability in probability, stability in the mean, almost sure stability, entropy stability and total statistical stability are presented. Basing on these definitions, the fundamental conditions for stochastic stability of motion are discussed. The systems described by stochastic Ito equations and other nonlinear systems are considered.

The considerations are general. They are presented from the point of view of qualitative methods of stochastic differential equations, and the presented results may be applied to the systems of various physical nature (e.g. mechanical, electrical etc.).

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 kwietnia 1970 r.