

ZASTOSOWANIE MODELOWYCH MATERIAŁÓW CZUŁYCH OPTYCZNIE DO ANALIZY STANU NAPRĘŻENIA W OŚRODKACH SYPKICH

ANDRZEJ D R E S C H E R (WARSZAWA)

1. Wstęp

Wzrastające w ostatnich latach zainteresowanie mechaniką ośrodków sypkich spowodowane jest niedostatecznym poznaniem ich cech mechanicznych przy równoczesnej potrzebie dokładniejszego projektowania konstrukcji magazynujących, transportujących i urabiających te materiały, jak i projektowania konstrukcji z nich wykonanych. Pod pojęciem ośrodków sypkich¹⁾ będziemy rozumieć wszystkie materiały, które w odróżnieniu od ośrodków ciągłych charakteryzują się, rozumianym makroskopowo, nieciągłym rozłożeniem masy. Nieistotne jest przy tym, czy pomiędzy poszczególnymi ziarnami ośrodka występują lub nie, w stanie nieobciążonym, wzajemne oddziaływania zarówno bezpośrednie, jak i przy udziale ośrodka wypełniającego wolne przestrzenie — pory. W tym ujęciu ośrodkami sypkimi będą zarówno grunty piaszczyste, jak i gliniaste, ziarno, sproszkowane rudy, cukier czy stosowane w różnych technologiach proszki.

Pomimo znacznego rozwoju prac teoretycznych i doświadczalnych poprawny opis czy też ściśle przewidywanie zachowania się tych materiałów nie zostały dotychczas sformułowane. Spośród zaproponowanych koncepcji opisu dają się wyróżnić dwie grupy. W pierwszej przyjmuje się założenie, że do ciał tych można zastosować podejście kontynualne. Uzyskane rezultaty mają więc charakter fenomenologiczny. W drugiej rozpoczyna się od analizy wzajemnych oddziaływań poszczególnych elementów (ziaren) ośrodka. Jest to podejście dyskretne. Niezadowalające rezultaty obu koncepcji wynikają częściowo z niedostatecznej ilości danych doświadczalnych informujących o wzajemnej zależności pomiędzy wielkościami dynamicznymi (np. naprężeniami, siłami) i kinematycznymi (np. odkształceniami, przemieszczeniami). Większość doświadczeń, podobnie jak dla ośrodków ciągłych, daje informacje jedynie o stanie deformacji ciała. W przypadku podejścia kontynualnego naprężenia określane są zazwyczaj z przesłanek logicznych, jak to ma miejsce w badaniach na próbkach walcowych czy rurkowych, lub też obliczane na podstawie założeń o własnościach ciała, np. rozwiązania teorii sprężystości dla skupionych lub ciągłych obciążeń zewnętrznych, czy też rozwiązania teorii plastyczności dla płaskiego stanu odkształcenia.

¹⁾ Termin ten używany jest powszechnie w polskiej literaturze, choć bardziej uzasadniony wydawałby się «ośrodki rozdrobnione».

Trudności eksperymentalnego określania stanu naprężenia w przypadku ośrodków ciągłych zostały częściowo pokonane przez zastosowanie modelowych materiałów optycznie czułych (fotosprężystość, fotoplastyczność). W odniesieniu do ośrodków sypkich podstawową metodą doświadczalnego wyznaczania stanu naprężenia jest zastosowanie specjalnie skonstruowanych elementów pomiarowych — dynamometrów — umieszczonych w pewnych punktach ośrodka. Metoda ta, dając zdaniem wielu autorów zadowalające wyniki, budzi jednakże szereg zastrzeżeń z uwagi na wprowadzone zaburzenie w badanym ośrodku przez element pomiarowy, jak i jedynie lokalne lub częściowe informacje. Pomimo postępującej miniaturyzacji czujników i prób pomiaru wszystkich składowych stanu naprężenia, jej stosowalność do ośrodków o małych ziarnach lub silnych wewnętrznych wiązaniach wydaje się ograniczona. Klasyfikację, zasady działania i opis czujników dynamometrycznych można znaleźć np. w pracy [14]. W pewnych badaniach zastępuje się czasem rzeczywisty ośrodek sypki modelem ośrodka ciągłego wykonanym z materiału optycznie czułego. Stosowane jest to np. przy analizie współpracy zapór wodnych z podłożem [9]. Metoda ta nie może jednakże mieć zastosowania w analizie rzeczywistych własności materiałów sypkich.

Na podstawie powyższych rozważań wydaje się być celowe zwrócenie uwagi na inną możliwość wyznaczania wielkości dynamicznych w ośrodkach sypkich, opartą na zastosowaniu optycznie czułych modelowych materiałów sypkich. Opracowanie niniejsze ma na celu przedstawienie dotychczas zaproponowanych optycznie czułych materiałów modelowych i uzyskanych wyników oraz pewne uwagi o dalszych możliwościach rozwoju tej metody.

Idea zastosowania modelowych materiałów optycznie czułych do analizy wielkości dynamicznych w ośrodkach sypkich należy do DANTU [2] i niezależnie do WAKABAYASHI [17]. W swej pierwszej pracy [2] DANTU zaproponował użycie dwóch różnych modeli ośrodka: a) ośrodka utworzonego ze szklanych wałeczków lub krążków, b) potłuczonego szkła (piasku szklanego). WAKABAYASHI zajmował się głównie modelem z piasku szklanego. Pomimo wykorzystania tego samego zjawiska fizycznego — dwójtomność wymuszona na skutek działania obciążeń zewnętrznych — i identycznej w przypadku szkła wielkości tego efektu, zarówno własności mechaniczne, jak i uzyskiwane informacje różnią zasadniczo oba te modele. Wynikają one przede wszystkim z różnic w kształtach i wielkościach ziaren. Różnice te pogłębiły się jeszcze w trakcie rozwoju badań na modelu utworzonym z wałeczków. Z tego też względu oba modele zostaną omówione osobno, choć wielu autorów analizowało je wspólnie.

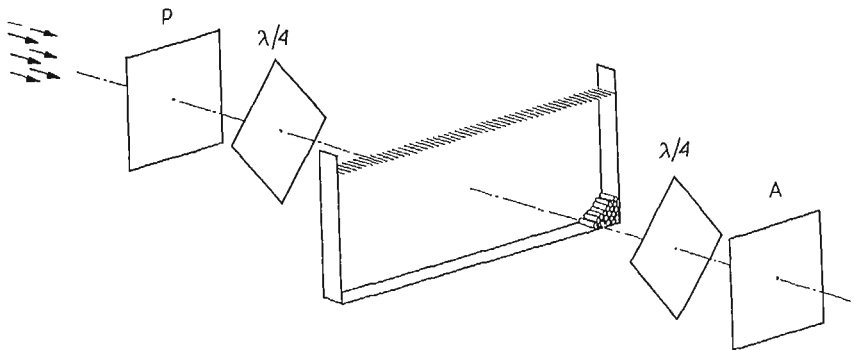
2. Model utworzony z wałeczków lub krążków

Model ośrodka sypkiego w postaci stosu wałeczków lub krążków wykonanych z metalu lub szkła znalazł szerokie zastosowanie w badaniach doświadczalnych nad statecznością i nośnością podłoża gruntowego. Model ten w literaturze mechaniki gruntów nosi nazwę modelu Taylora-Schneebeli. Zasadniczą jego cechą jest dwuwymiarowość możliwego ruchu elementów. Wałeczki lub krążki ułożone jeden na drugim, w jednej płaszczyźnie zawierającej przekroje poprzeczne, mogą ulegać deformacji jedynie w tej płaszczyźnie. Model ten stanowi zatem idealne odwzorowanie płaskiego stanu odkształ-

cenia. Cecha ta jest tym istotna, że większość efektywnie rozwiązanych zagadnień nośności granicznej ośrodka sypkiego, opartych o równania teorii plastyczności, dotyczy właśnie przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Użycie rzeczywistego ośrodka sypkiego, np. piasku, umieszczonego w płaskim szklanym pojemniku, wprowadza pewne błędy w obserwowanej kinematyce ruchu spowodowane tarciami pomiędzy piaskiem a czołowymi szklanymi płytami. Wadą modelu w postaci stosu wałeczków jest idealizacja kształtu ziaren i wynikająca z niej struktura ośrodka. Stosowane kształty, najczęściej kołowe lub sześciokątne, odbiegają dość znacznie od rzeczywistych kształtów np. ziaren piasku. Wymiary wałeczków są także znacznie większe od wymiarów drobnoziarnistych materiałów sypkich. Zastrzeżenia te nie dyskwalifikują jednakże stosowności tego typu modeli, czego dowodem jest szereg otrzymanych interesujących wyników.

Model Taylora-Schneebeli stosuje się do obserwacji kinematyki ośrodka sypkiego w strefach plastycznego płynięcia. Bezpośrednie określenie stanu naprężenia jest niemożliwe. Obserwowana kinematyka może być porównana z rozwiązaniami teoretycznymi pola naprężeń lub stanowić podstawę do jego teoretycznego wyznaczenia.

DANTU, w cytowanej pracy [2], zaproponował obserwację modelu utworzonego ze szklanych wałeczków w świetle kołowo spolaryzowanym. Źródło światła znajduje się poza modelem, skąd promienie światła spolaryzowane kołowo przez analizator i ćwierćfalówkę przechodzą przez wałeczki prostopadle do ich kołowych płaszczyzn czołowych

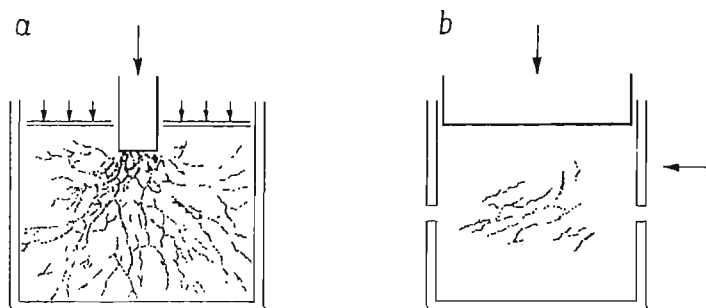


Rys. 1

(rys. 1). W przypadku obciążenia stosu siłami zewnętrznymi w kontaktujących się ze sobą wałeczkach powstają naprężenia (odkształcenia) wywołujące zjawisko dwójłomności wymuszonej. Po przejściu światła przez drugą ćwierćfalówkę i polaryzator obserwuje się, na skutek interferencji promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego, różną intensywność światła w pewnych obszarach poszczególnych wałeczków. W przypadku monochromatycznego źródła światła różna intensywność zaznacza się jako rozjaśnienie (ciemnego) lub zaciemnienie (jasnego) obrazu. Białe źródło światła powoduje powstanie obrazu barwnego złożonego z barw dopełniających do wygaszonych przez polaryzator. Wielkość tego efektu zależna jest od czułości optycznej materiału, wartości przyłożonego obciążenia i długości wałeczków.

Schemat doświadczenia wykonanego przez DANTU przedstawiono na rys. 2a. Schemat ten odpowiada w przybliżeniu zagadnieniu wciskania sztywnego stempla w półprzestrzeń sprężystą. Przylegające do stempla dwie płytki uniemożliwiają plastyczny wpływ materia-

łu zostały użyte celem wywołania znacznych nacisków pomiędzy wałeczkami. Użyty przez DANTU materiał wałeczków, których średnice wahały się od 2 do 6 mm, a długość wynosiła 20 mm, stanowiło szkło PYREX¹⁾. Na rys. 2 zaznaczono schematycznie uzys-



Rys. 2

kany obraz w świetle monochromatycznym, przy ustawieniu elementów układu optycznego dających ciemne pole w stanie nieobciążonym i rozproszonym źródle światła. Obraz ten składa się z łańcuchów rozświetlonych wałeczków układających się podobnie do systemu «korzeni» (na rys. 2 rozświetlone wałeczki zaciemniono). Zarówno niewielka średnica wałeczków, jak i niewielka czułość optyczna użytego materiału ($K = 156 \text{ Kg/cm rz. iz.}$) nie pozwalają na wyróżnienie w poszczególnych wałeczkach obszarów o różnej intensywności światła. W efekcie zarejestrowany obraz daje jedynie jakościową informację o rozmieszczeniu przenoszących obciążenia elementów modelu. Obrazy jasne na rysunku odpowiadają wałeczkom słabo lub w ogóle nieobciążonym.



Rys. 3

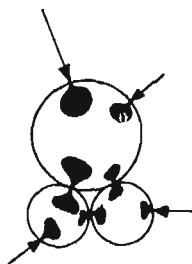
Drugi ze schematów obciążenia stosu wałeczków był podobny do warunków panujących w aparacie bezpośredniego ścinania (rys. 2b).

¹⁾ PYREX jest angielską marką szkła laboratoryjnego, charakteryzującego się dużą jednorodnością własności fizycznych, a zwłaszcza współczynnika rozszerzalności termicznej.

W następnej pracy [3] DANTU zastosował płaski model ośrodka do zobrazowania rozkładu oddziaływań wałeczków umieszczonych pomiędzy dwiema wysokimi pionowymi ścianami, zamkniętymi od dołu, podczas cyklicznych zmian obciążenia pionowego (rys. 3). Zaobserwował on, że ze wzrostem obciążenia pionowego wzrasta rozjaśnienie łańcuchów, przy czym ich geometryczna struktura nie ulega zmianom. Gęstość łańcuchów maleje wraz z oddalaniem się od górnej, obciążonej płaszczyzny stosu. Przy odciążeniu struktura łańcuchów nieznacznie zmienia się dążąc do bardziej jednorodnej.

Praca [2] wskazała na możliwość zaobserwowania sposobu przekazywania zewnętrznych obciążeń w modelowym ośrodku sypkim przy małych deformacjach, ograniczonych zastosowanymi schematami obciążeń. Uzyskane rezultaty, aczkolwiek mające charakter jakościowy, stały się bodźcem do dalszych prac.

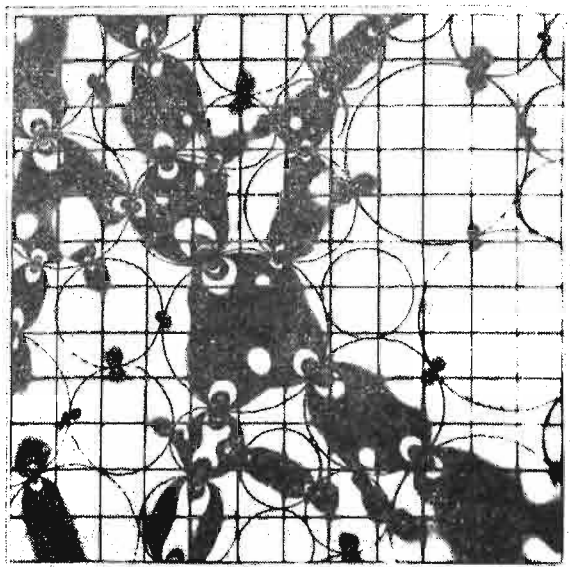
Tematykę tę podjął de JOSSELIN de JONG [6]. Zastosował on inny optycznie czuły materiał — perspex (polimetakrylan metylu), z którego wycięto płaskie krążki. Większa czułość optyczna perspexu ($K = 120 \text{ Kg/cm rz. iz.}$) i większe średnice w stosunku do wałeczków użytych przez DANTU pozwoliły zaobserwować w poszczególnych krążkach, poddanych ścisaniu w prostokątnym pudełku, kształty obszarów o różnej intensywności przechodzącego światła. Schematycznie przedstawia je rys. 4. Obrazy ciemne przylegają



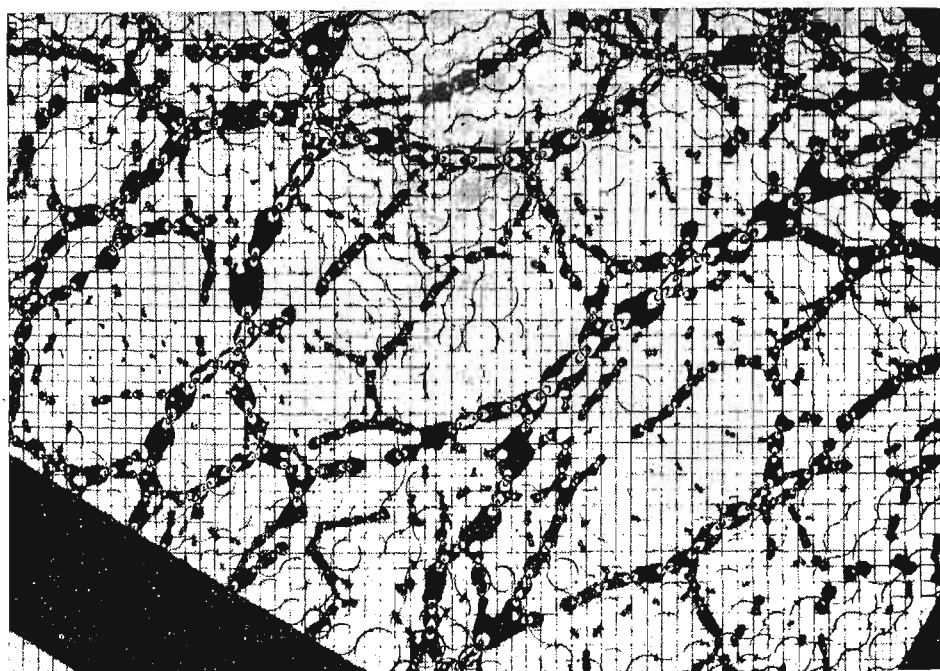
Rys. 4

do miejsc wzajemnego kontaktu krążków (układ optyczny dawał jasne pole w stanie nieobciążonym). De JOSSELIN de JONG podjął także próbę ilościowego określenia stanu naprężenia w krążkach wykorzystując do tego celu kompensator w postaci prostokątnej belki poddanej czystemu zginaniu, umieszczony przed badanym modelem. Zaobserwował przesunięcie poziomych izochrom w kompensatorze, jednakże nie przytoczył konkretnych wyników liczbowych. Rozważył też możliwość określenia siły kontaktu dwóch krążków przez pomiar intensywności światła wewnątrz kołowego wycinka o środku w punkcie kontaktu. Nie uzyskał jednakże zadowalających rezultatów.

Istotny krok naprzód w ilościowej ocenie zaobserwowanych efektów należy przypisać zastosowaniu przez de JOSSELINA de JONGA i VERRUIJTA [7] znacznie czulszego optycznie od szkła i perspexu materiału — żywicy CR-39 ($K = 14 \text{ Kg/cm rz. iz.}$). Autorzy ci wykonali doświadczenia na zbiorze płaskich krążków o średnicach od 10 mm do 40 mm i grubości 10 mm. Około 200 krążków zostało umieszczonych w prostokątnym pojemniku, którego boczne i górna ściany były ruchome i połączone z układem obciążającym. Układ obciążający pozwalał przykładać niezależnie różne obciążenia pionowe i poziome. Na skutek wysokiej czułości optycznej żywicy CR-39 istniejący w obciążonych krążkach stan



Rys. 5



Rys. 6

naprężenia (odkształcenia) był wystarczający do wywołania opóźnienia względnego promieni zwyczajnego i nadzwyczajnego o wartości kilkakrotnej długości fali użytego światła monochromatycznego. W efekcie zaobserwowano w poszczególnych krążkach wyraźne izochromy. Na rys. 5 przedstawiono fotografię izochrom jakościowo podobnych do uzys-

kanych w pracy [7]. Układ łańcuchów obciążonych krążków z izochromami, dla pewnego obszaru modelu, był podobny do rys. 6. Obie fotografie wykonano przy jasnym polu widzenia.

Możliwość wyraźnego zaobserwowania izochrom pozwoliła autorom na wyznaczenie sił kontaktowych pomiędzy krążkami. W tym celu skorzystali oni z rozwiązań teorii sprężystości stosowanych w elastoptyce. Zagadnienie stanu naprężenia w płaskim krążku poddanym działaniu dwóch przeciwnie skierowanych sił jest klasycznym zagadnieniem teorii sprężystości, którego rozwiązanie bardzo dobrze potwierdzają badania elastoptyczne. Stąd też płaski krążek stosowany jest wielokrotnie jako dynamometr elastoptyczny. W przypadku dwóch, przeciwnie skierowanych, skupionych sił działających wzdłuż średnicy krążka izochromy, odpowiadające liniom maksymalnych naprężeń stycznych, mają kształt symetrycznych owali [12]. Dla sił działających wzdłuż cięciwy izochromy mają bardziej złożony kształt. Rozwiązania te są statycznie wyznaczalne i nie uwzględniają sztywności materiału. De JOSSELIN de JONG i VERRUIJT założyli, że sztywność badanego materiału jest tak duża, że można pominąć nie punktowe w rzeczywistości przeniesienie się oddziaływań z krążka na krążek. Przyjęli ponadto, że kształt izochrom w sąsiedztwie kontaktu jest wystarczająco zbliżony do kół, by zadanie traktować jako działanie siły skupionej na półpłaszczyźnie (zadanie Flamanta). W tym przypadku zależność pomiędzy przyłożoną siłą a maksymalnym naprężeniem stycznym wyraża się następująco:

$$(2.1) \quad 2\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2P}{\pi t d},$$

gdzie t jest grubością półpłaszczyzny, a d średnicą koła, stycznego do punktu przyłożenia siły, na którego obwodzie wzór (2.1) określa poszukiwane naprężenie styczne. Wykorzystując podstawowy związek elastoptyki

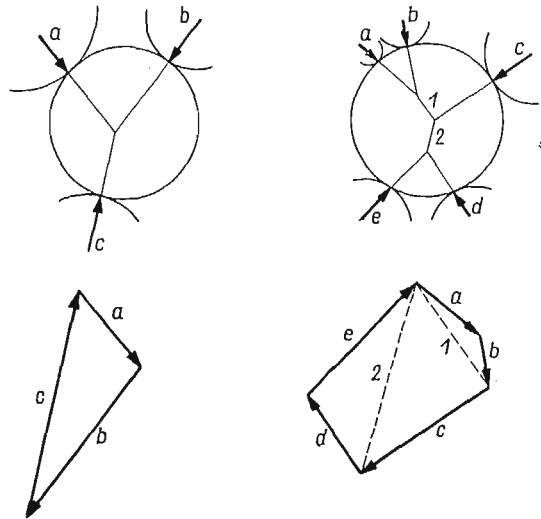
$$(2.2) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n\lambda}{Ct},$$

gdzie n jest rzędem izochromy, λ długością światła, C stałą elastoptyczną materiału, zależność pomiędzy siłą a izochromą wyraża się przez

$$(2.3) \quad P = \pi d \frac{n\lambda}{C}.$$

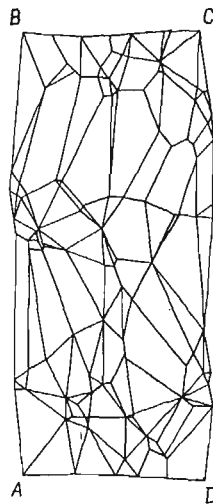
Z zależności (2.3) można wyznaczyć poszukiwaną siłę kontaktu, gdy znany jest rząd i średnica danej izochromy. Autorzy [7] przyjęli, że związek (2.3) ważny jest dla dowolnej liczby i dowolnego nachylenia sił pod warunkiem, że korzysta się z izochrom położonych w sąsiedztwie kontaktu krążków. Kierunek działania siły można przyjąć z wystarczającą dokładnością za pokrywający się z symetryczną izochrom w tym obszarze. Poprawność określonych w ten sposób sił kontaktowych zaproponowali sprawdzić korzystając z równań równowagi całego krążka. Równania równowagi sił żądają, by wielobok sił działających na dany krążek był zamknięty. Równanie równowagi momentów wymaga, by dla przypadku dwóch sił ich zwroty były przeciwne, a dla trzech sił, by kierunki przecinały się w jednym punkcie. Dla $m > 3$ sił kierunek wypadkowej $m-2$ sił musi również przecinać się z kierunkiem pozostałych dwóch sił w jednym punkcie (rys. 7). Warunki te wygodnie jest sprawdzać graficznie. W rezultacie otrzymuje się dla pewnego obszaru modelu

układ zamkniętych, łączących się wieloboków tworzących plan Cremony. Na rys. 8 przedstawiono przykładowo uzyskany w [7] plan Cremony dla wszystkich krążków umieszczonych w pojemniku, przy obciążeniu pionowym większym od poziomego. Poszczególne odcinki pomiędzy punktami A i B oraz C i D przedstawiają siły działające pomiędzy krążkami a dolną i górną ścianą pojemnika. B i C oraz A i D odpowiadają ścianom bocznym. Porównując wypadkowe \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{DA} z przyłożonymi do ścian obciążeniami autorzy uzyskali dobrą zgodność.



Rys. 7

Praca [7] pokazała możliwość dokładnego, ilościowego określenia dyskretnego rozkładu sił kontaktowych w modelowym ośrodku syplikim²⁾. W pracy tej nie analizowano pola deformacji.



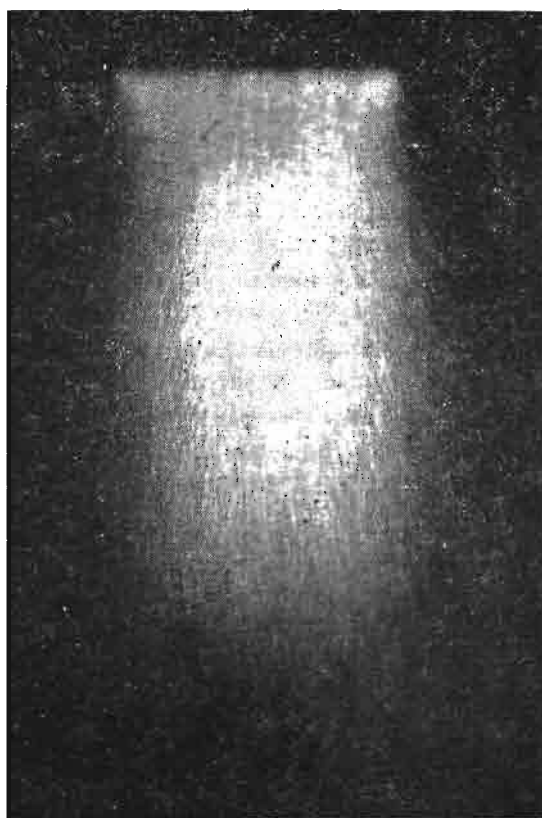
Rys. 8

²⁾ Liczbowe wartości sił kontaktowych w modelu utworzonym z wałeczków z perspexu podał także Weber [22]. W pracy tej nie wyjaśniono jednakże, w jaki sposób określono te siły.

3. Model z piasku szklanego

Jako drugi modelowy ośrodek sypki DANTU [2] i WAKABAYASHI [17] zaproponowali potłuczone szkło (piasek szklany). W pracy [2] DANTU zastosował szkło PYREX, podobnego materiału użył WAKABAYASHI. Potłuczone szkło jest materiałem o własnościach mechanicznych prawie identycznych z rzeczywistym piaskiem. Kształt ziaren i struktura odpowiadają kwarcowym piaskom kopalnym, a jego uziarnienie może być dowolnie dobrane.

Materiał ten, choć utworzony z ziaren przezroczystych, stanowi w masie ośrodek zupełnie nieprzezroczysty, na skutek odbić i rozproszenia światła na ścianach ziaren. Jeżeli jednak pory pomiędzy ziarnami zostaną całkowicie wypełnione cieczą o identycznym



Rys. 9

ze szkłem współczynnika załamania światła (cieczą imersyjną) ośrodek ten staje się przezroczysty. Zjawisko to, zachodzące ściśle dla światła monochromatycznego i w określonej temperaturze, wykorzystywane jest w badaniach przepływu cieczy przez ośrodki porowate, badaniach prędkości dyfuzji cieczy itp. (np. [5]). Użycie cieczy imersyjnych znane jest także w badaniach elastooptycznych na modelach trójwymiarowych dla uniknięcia efektu załamania światła (np. [8]). Jako ciecze imersyjne dla szkła mogą być użyte, np. roztwór

jodku amonu w ilości 150 G na 100 cm^3 wody, mieszanina benzenu i heptanu w stosunku około 100:28 części objętościowych.

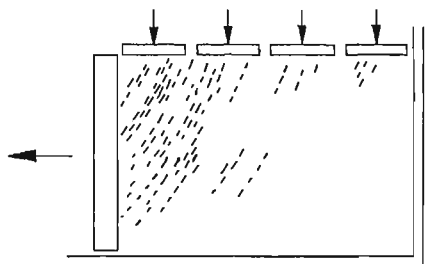
DANTU i WAKABAYASHI zaobserwowali, że jeżeli piasek szklany z wypełniającą pory cieczą imersyjną, umieszczony w płaskim szklanym pojemniku poddany jest obciążeniom zewnętrznym, to w świetle spolaryzowanym widoczne są, dla ciemnego pola widzenia, krótkie jasne linie układające się w delikatne pasma. Zjawisko to występuje zarówno w liniowo, jak i kołowo spolaryzowanym świetle, przy czym układ linii jest w obu przypadkach różny. Otrzymany obraz jest analogiczny do przedstawionego na rys. 9, uzyskanego w świetle kołowym dla podobnego schematu obciążenia, jak na rys. 2a. W świetle liniowo spolaryzowanym oprócz jasnych krótkich linii widoczne są szerokie, ciemne pasma przechodzące przez cały obszar. Położenie tych ciemnych pasm, jak i jasnych linii, zależne jest od nachylenia płaszczyzny polaryzacji. Autorzy [2] i [17] wykazali, że ciemne pasma są izoklinami. Porównując przebieg jasnych krótkich linii w świetle kołowym z trajektoriami naprężeń głównych, skonstruowanymi z izoklin, otrzymuje się pokrywanie tych pierwszych z jedną rodziną trajektorii. Zatem krótkie jasne linie w świetle kołowym odpowiadają kierunkom jednego z naprężeń głównych w danym punkcie ośrodka. W pracy [19] WAKABAYASHI podał fizykalną interpretację i zależności ilościowe obserwowanego efektu. Założył on, że w rozpatrywanym ośrodku tworzą się pod działaniem obciążeń, przypadkowo ukierunkowane łańcuchy ziaren. Łańcuchy te przenoszą osiowo różne obciążenia w zależności od położenia w modelu oraz geometrii i warunków brzegowych doświadczenia. Sumaryczny efekt dwójłomności dla każdego łańcucha, traktowanego jako jednoosiowo ściskany pręt, widoczny jako rozjaśnienie, jest tym większy — jaśniejszy łańcuch — im większe jest obciążenie. W świetle kołowo spolaryzowanym widoczne są głównie łańcuchy najsilniej obciążone. W świetle liniowym widoczne są, w zależności od nachylenia płaszczyzny polaryzacji, pozostałe łańcuchy. Koncepcję istnienia obciążonych łańcuchów ziaren potwierdzają wyniki uzyskane na modelu z wałeczków czy krążków omówione w p. 2 (rys. 6).

Wykonując pomiar intensywności światła w pewnych obszarach modelu z pomocą kompensatora Babinetta, WAKABAYASHI stwierdził proporcjonalność średniego efektu optycznego do wielkości obciążeń. Ilościowo jest on dwa razy mniejszy niż w monolitycznym szkłe. Dla zastosowanych przez DANTU i WAKABAYASHI obciążeń średnie rozjaśnienie linii odpowiada około 0,2 rzędu izochromy.

Oprócz wspomnianej jednej rodziny jasnych linii de JOSSELIN de JONG [6] zaobserwował drugą rodzinę, mniej wyraźnych, linii prostopadłych. Wykonując zdjęcia stereoskopowe wykazał przestrzenne ułożenie linii w modelu. Obraz uzyskiwany na normalnych zdjęciach odpowiada zatem zsumowaniu się linii występujących na różnych odległościach od powierzchni czołowych płaskiego modelu.

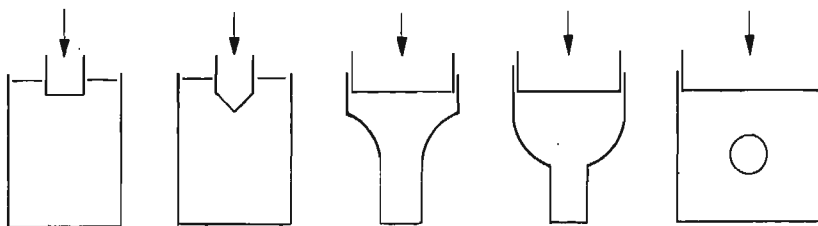
Pokrywanie się jasnych linii uzyskiwanych w świetle kołowo spolaryzowanym z kierunkami naprężeń głównych pozwoliło DANTU, WAKABAYASHI i NGUYEN CHANH na określenie trajektorii głównych w szeregu inżynierskich zagadnień brzegowych. DANTU [2, 3] wykonał badania na identycznych modelach, jak na rys. 2 i 3, uzyskując podobny układ linii, jak dla wałeczków. NGUYEN CHANH [15] wykorzystał opisywany efekt do wyznaczenia trajektorii naprężeń głównych w zagadnieniu parcia i oporu na pionowy mur oporo-

wy (rys. 10). Wyniki porównał z rozwiązaniem teoretycznym nośności granicznej zadania, uzyskując jakościową zgodność kierunków naprężeń określonych teoretycznie i doświadczalnie. Obszerne badania przy najróżniejszych schematach obciążeń wykonał WAKABAYASHI [17, 18, 19, 20, 21] (rys. 11) porównując otrzymane wyniki z rozwiązaniami przy-



Rys. 10

bliżonymi. Zbadał on wciskanie stempla, klina i dwóch zagłębionych klinów oraz określił kierunki naprężeń w lejach o różnym kształcie i w prostokątnym polu zawierającym sztywny cylinder (model obudowy chodnika). Dla szeregu schematów określił ilościowo z pomocą kompensatora Babinetta średni efekt optyczny w pewnych obszarach, uzys-



Rys. 11

kując w ten sposób pewne informacje o wartości naprężeń. Wspólną cechą tych doświadczeń jest ograniczenie się do analizy stanu naprężenia przy bardzo małych lub zlokalizowanych deformacjach ośrodka. W doświadczeniach ośrodek doznawał jedynie zagęszczenia. Stąd też nie analizowano przeważnie pola deformacji. Podobnie NGUYEN CHANH badał pierwszy moment powstania odporu lub parcia nie określając kształtu i cech pola deformacji.

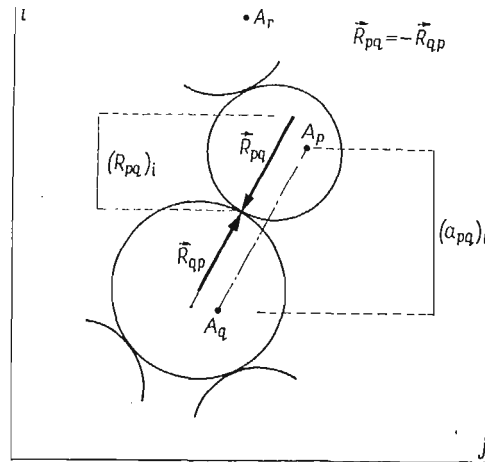
4. Analiza uzyskiwanych informacji

Omówione w p. 2 i 3 modelowe ośrodki sypkie różnią się nie tylko własnościami mechanicznymi, ale i uzyskiwanymi informacjami o wielkościach dynamicznych.

Ośrodek utworzony z waleczków lub krążków stanowi dość dalekie odwzorowanie rzeczywistego ośrodka sypkiego, przede wszystkim z uwagi na kształt i wielkość ziaren. Z drugiej jednakże strony rozmiary waleczków pozwalają na określenie rozkładu i wielko-

ści kontaktowych sił ich wzajemnego oddziaływania. Śledząc wzrost sił i ich konfigurację w funkcji obciążenia zewnętrznego czy deformacji uzyskuje się informacje, które mogą znaleźć bezpośrednie zastosowanie przy dyskretnym podejściu do opisu cech mechanicznych materiałów sypkich. Możliwe jest przy tym wprowadzenie określonej struktury ośrodka poprzez dobór wielkości i kształtów elementów.

Powyższe zalety tego modelu powodują jednakże trudności przy próbie wykorzystania rezultatów do porównania czy też stworzenia opisu kontynualnego. Należy przy tym wspomnieć, że model Taylora-Schneebeli jest stosowany głównie do weryfikacji doświadczalnej właśnie tego rodzaju opisu. Stąd też powstaje pytanie, jak przejść z wielkości



Rys. 12

dla ośrodka dyskretnego — sił do wielkości dla ośrodka ciągłego — naprężeń. W podejściu kontynualnym przyjmuje się, że w każdym punkcie ciała istnieje jednoznacznie określony tensor naprężenia. W przypadku zbioru walczków można mówić jedynie o tensorze naprężenia dla pewnego obszaru, przy czym stan naprężenia w poszczególnych walczkach jest nieinteresujący.

Pierwszą propozycję określenia tensora naprężenia dla skończonego obszaru z wielkości sił kontaktowych podał WEBER [22]. Rozpatrzył on udział każdej siły kontaktowej $\overline{R_{pq}}$, gdzie p i q oznaczają ziarna, działającej na długościach $\overline{a_{pq}}$, rozumianych jako odległość pomiędzy dwoma dowolnymi punktami w dwóch ziarnach (rys. 12), w sumowaniu wszystkich sił działających w obszarze zawierającym wiele ziaren. W efekcie otrzymał następujące wyrażenie na średni tensor naprężenia

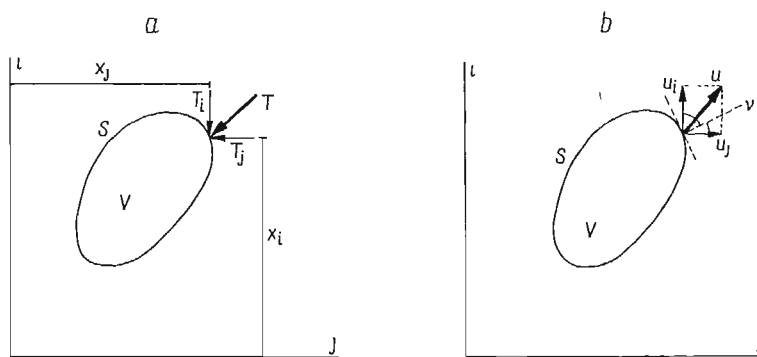
$$(4.1) \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2V} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^{M_p} [(R_{pq})_i (a_{pq})_j],$$

gdzie i, j określają układ współrzędnych, $(R_{pq})_i$ i $(a_{pq})_j$ są składowymi wektorów $\overline{R_{pq}}$ i odcinków $\overline{a_{pq}}$, V objętością obszaru, a sumowanie należy wykonać po M ziarnach przenoszących siły na M_p ziaren. Wyznaczenie składowych $\bar{\sigma}_{ij}$ wymaga bardzo pracochłonnego sumowania sił i odległości wewnątrz całego obszaru.

W pracy [11] autorzy zdefiniowali średni tensor naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ analogicznie do definicji użytej przez HILLA [13], omijając skomplikowaną procedurę Webera. Średni tensor naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$, będący całką po objętości V z naprężeń σ_{ij} w każdym punkcie, podzieloną przez objętość ciała, można przedstawić w następującej postaci, wykorzystując twierdzenie Greena i przeprowadzając symetryzację

$$(4.2) \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{2V} \int_S (T_i x_j + T_j x_i) ds,$$

gdzie T_i , T_j są składowymi sił działających na powierzchnię S objętości V , a x_i , x_j odległościami punktu działania siły od układu współrzędnych (i, j) (rys. 13a). Wyrażenie



Rys. 13

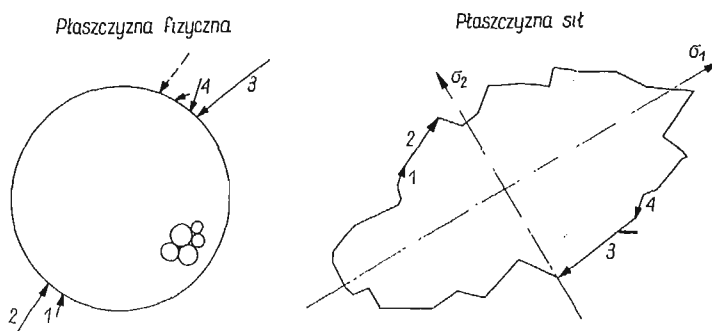
(4.2) oznacza, że do określenia składowych $\bar{\sigma}_{ij}$ wystarczające jest zsumowanie sił działających na powierzchni obszaru, a w przypadku ośrodka płaskiego na obwodzie, co jest znacznie prostsze niż w przypadku (4.1). Przeprowadzając pewne sumowanie sił i odległości w związku (4.1) można wykazać jego równoważność ze związkiem (4.2), który otrzymano na znacznie prostszej drodze.

Powyżej zdefiniowany średni tensor naprężenia można wyznaczyć dla dowolnego kształtu i wielkości obszaru i dowolnego rozkładu sił wewnątrz, czy też na obwodzie. Do jego wyznaczenia wystarczający jest plan Cremony (rys. 8) i znajomość punktów przyłożenia sił, co daje bezpośrednio fotografia zbioru (rys. 6). W przypadku konkretnego rozkładu sił kontaktowych w zbiorze wybór wielkości i położenia obszaru jest rzeczą subiektywną. Dla uchwycenia tego wpływu, zwłaszcza przy niejednorodnym rozkładzie sił, należy przeprowadzić obliczenia dla różnych wymiarów i położenia obszaru. Tą drogą można określić najwłaściwszą reprezentację ośrodka dyskretnego przez model ciągły.

W pracy [11] rozpatrzono także inny, graficzny sposób wyznaczania stanu naprężenia. Wycinając w modelu obszar kołowy można wykazać, że dla jednorodnego wewnątrz stanu naprężenia wielobok sił działających na jego obwodzie powinien mieć kształt elipsy, której długości półosi głównych, podzielone przez średnicę koła, określają wartości naprężeń głównych, a położenie osi kierunku główne (rys. 14). Wykreślając kolejne wieloboki dla kół o różnej średnicy i różnym położeniu środka można graficznie uchwycić odstępstwo

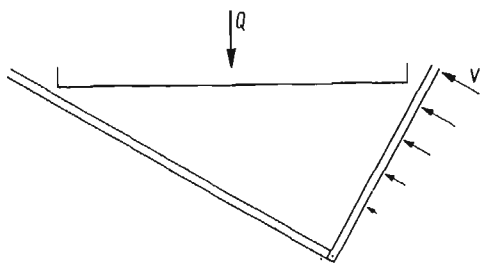
od jednorodności stanu naprężenia, a tym samym przybliżenie jakie dokonuje się przyjmując średni tensor naprężenia.

W pracy [22] WEBER wykonał obliczenie składowych tensora $\bar{\sigma}_{ij}$ według (4.1) dla zbioru wałeczków poddanych hydrostatycznemu ciśnieniu. Otrzymał dobrą zgodność z wartością przyłożonego ciśnienia (por. uwagę w p. 2). Autorzy [10] przeprowadzili obliczenia analityczne według (4.2) i graficzne dla schematu obciążenia zbioru wałeczków przedstawio-



Rys. 14

nego na rys. 15 uzyskując informacje o stanie naprężenia podczas deformacji ośrodka. W schemacie tym jedno z ramion klina było nieruchome, podczas gdy drugie doznawało obrotu zgodnie i przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Spoczywająca na stosie płyta Q, użyta dla zwiększenia wzajemnych oddziaływań krążków z żywicy CR-39, mogła doznawać dowolnych przemieszczeń i obrotów wynikających z deformacji zbioru. Z porównania



Rys. 15

kierunków głównych obliczonych tensorów naprężenia z przebiegiem łańcuchów obciążonych krążków (rys. 6) wynika ich przybliżone pokrywanie się. Wniosek ten potwierdza, że w modelu z piasku szklanego obserwowane jasne linie wyznaczają kierunki naprężeń głównych.

Przedstawione powyżej rozważania wskazują, że modelowy ośrodek sypki utworzony z wałeczków czy krążków może być również wykorzystany w fenomenologicznym opisie zjawisk.

Model z piasku szklanego, z uwagi na obserwowane efekty sumaryczne dla wielu ziaren, nie nadaje się do podejścia dyskretnego. Z uzyskiwanych dotychczas z tego modelu

informacji za najistotniejszą należy uznać możliwość wyznaczenia trajektorii naprężeń głównych. Same wartości naprężeń są nieznane, a zastosowanie kompensatorów daje tylko pewne informacje jakościowe. Znajomość trajektorii naprężeń głównych może jednakże dostarczyć istotnych danych przy porównaniu rozwiązań teoretycznych z doświadczeniem. Należy także zaznaczyć, że w pewnych przypadkach istnieje możliwość analitycznego wyznaczenia stanu naprężenia na podstawie znajomości jedynie przebiegu trajektorii naprężeń głównych. Równania równowagi płaskiego stanu naprężenia odniesione do ortogonalnej siatki trajektorii naprężeń głównych, zwane równaniami Lamé'go Maxwella mają następującą postać

$$(4.3) \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} = 0,$$

gdzie s_1 i s_2 są długościami elementów wzdłuż trajektorii a ρ_1, ρ_2 promieniami krzywizn. Równania (4.3), z których każde przedstawia różniczkowanie względem jednej zmiennej, mają analogiczną postać do równania wzdłuż charakterystyk teorii plastyczności. W tym przypadku charakterystykami są trajektorie naprężeń głównych. Można zatem znaleźć rozwiązanie układu (4.3) podobnie, ja to się czyni w zadaniach teorii plastyczności, tzn. rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego, charakterystyczne i mieszane. Powyższa możliwość została wykorzystana w zagadnieniach optymalizacji konstrukcji [1]. W elastooptyce nie jest dotychczas stosowana, choć koncepcja całkowania wzdłuż odpowiednich charakterystyk została podana w pracy [16] dla wielkości uzyskiwanych z izochrom.

Jak zaznaczono w p. 2 i 3, wspólną cechą dotychczas opublikowanych rezultatów na obu modelach jest ograniczenie się do rejestracji sił czy naprężeń przy bardzo małych deformacjach, na ogół pomijanych w analizie. Za zasadniczą tego przyczynę należy uznać trudności eksperymentalne: Dla wywołania efektu dwójłomności wymuszonej w modelu z wałeczków, a zwłaszcza w piasku szklanym, konieczne są duże naciski ziaren. Stąd też w wykonanych doświadczeniach przykładano obciążenie ze wszystkich stron modelu, lub też ograniczano jego ruch przez sztywne ściany. Doświadczenia przy istnieniu wolnej powierzchni, wobec małego ciężaru własnego modelu, nie pozwalają na zaobserwowanie efektów optycznych. Również obecność cieczy w modelu z piasku szklanego utrudnia realizację znacznych odkształceń.

Pewną próbę pomiaru naprężeń w trakcie deformacji modelu podjęli autorzy pracy [11] (rys. 15). Obrót ramienia pozwolił uzyskać względnie jednorodne pole deformacji przy wielkości odkształceń postaciowych około 1,5%. Z pomiaru względnego położenia krążków określono średni tensor odkształcenia $\bar{\epsilon}_{ij}$ dla analogicznych obszarów kołowych jak dla naprężeń. Średni tensor odkształcenia zdefiniowano za HILLEM [13] jako całkę po obszarze z odkształceń w punktach, co prowadzi przy wykorzystaniu twierdzenia Greena do następującej postaci

$$(4.4) \quad \bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2V} \int_S (U_i \nu_j + U_j \nu_i) ds,$$

gdzie U_i i U_j są składowymi wektora przemieszczenia U na brzegu ciała S ; ν_i, ν_j są składowymi jednostkowego wektora normalnego do powierzchni S (cosinusami kierunkowymi) w punktach o danych przemieszczeniach (rys. 13b). Dla wyznaczenia $\bar{\epsilon}_{ij}$ wystarczająca

jest zatem znajomość przemieszczeń brzegu. W definicji $\bar{\varepsilon}_{ij}$, podobnie jak w $\bar{\sigma}_{ij}$, przyjmuje się założenie o ciągłości ośrodka. Dokładna analiza uzyskanych wyników zostanie opublikowana.

Zależność (4.4) można również zastosować do określenia stanu odkształcenia w modelu z piasku szklanego. Z uwagi jednakże na niewielkie wymiary ziaren w stosunku do całej objętości modelu można do wyznaczenia stanu odkształcenia skorzystać z ogólnie stosowanych metod obliczania deformacji w ośrodkach ciągłych np. metody siatek, gdzie odkształcenia określa się z pomiaru przemieszczeń węzłów prostokątnej siatki (por. np. [10]).

5. Uwagi końcowe

Z przedstawionej powyżej charakterystyki modelowych materiałów sypkich czułych optycznie oraz analizy uzyskiwanych z badań informacji wynika niewątpliwa wartość omówionych metod doświadczalnego określenia stanu naprężenia w ośrodkach sypkich. Metody te stanowią mogą istotne uzupełnienie innych, tradycyjnych metod. Pomimo uzyskanych interesujących rezultatów, szereg zagadnień pozostaje jednakże nadal otwartych i wymagających dalszych opracowań.

Jako pierwsze zagadnienie można tu wymienić ograniczenie omawianych metod do materiałów idealnie sypkich tzn. pozbawionych spójności. Otwartym problemem pozostaje także określenie stanu naprężenia w przypadkach trójwymiarowej deformacji. Pewne rezultaty uzyskał DANTU [4] w badaniach na trójwymiarowym zbiorze kul wykonanych z żywicy Catalin. Po przyłożeniu obciążeń do zbioru kul poddano cały model wygrzewaniu uzyskując w ten sposób zamrożenie stanu deformacji. Ze stanu deformacji kul określono wartości sił kontaktowych z pomocą wzorów Hertza, wiążących wielkość powierzchni kontaktu dwóch kul z siłą nacisku. Dla wizualnego przedstawienia zamrożonego stanu naprężenia w kulach wypełniono wolne przestrzenie aralditem i wycięte z całego modelu płaskie płytki obserwowano w świetle spolaryzowanym. Otrzymano podobne do rys. 6 układy izochrom będące jednakże efektem obciążeń w różnych płaszczyznach.

Pewne zastrzeżenia może także budzić przyjęta przez de JOSSELINA de JONGA i VERRIJTA [7] aproksymacja rzeczywistego kształtu izochrom przez koła i wynikający stąd związek (2.3). Dla uniknięcia tego błędu w pracy [11] zrezygnowano z korzystania z wyrażenia analitycznego wykonując skalowanie użytych krążków dla różnych sił i różnego stosunku średnic. Uzyskano w ten sposób krzywe podające wprost zależność siły kontaktu od oddalenia izochromy od punktu kontaktu.

Jako pożądanе dalsze kierunki badań można na pierwszym miejscu wymienić obserwację wielkości dynamicznych (sił, naprężeń) przy znacznych deformacjach ośrodka. Zagadnienie to jest ważne przy poszukiwaniu praw rządzących przepływem materiałów sypkich przez kanały, leje zsypanowe itp. Doświadczenia takie pozwoliłyby także na weryfikację praw fizycznych opisujących stan plastycznego płynięcia materiału. Celowe byłyby także próby zastąpienia piasku szklanego materiałem czulszym optycznie co pozwoliłoby na zmniejszenie przykłađanych obciążeń.

Literatura cytowana w tekście

1. A. S. L. CHAN, *The design of Michell optimum structures*, Coll. Aero. Cranf. Rep., 142, 1960.
2. P. DANTU, *Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents*, Proc. 4-th ICOSOMFE, 144-148, London 1957.
3. P. DANTU, *Étude expérimentale d'un milieu pulvérulent compris entre deux plans verticaux et parallèles*, Ann. Ponts Chaus., No 4, 1967.
4. P. DANTU, *Étude statistique des forces intergranulaires dans un milieu pulvérulent*, Geotechnique, 18, 1968, 50-55.
5. G. de JOSSELINE de JONG, *Discussion of «Longitudinal and transverse diffusion in granular deposits»*, Trans. Amer. Geoph. Un., Vol. 39, No 6, 1958, 1160-1162.
6. G. de JOSSELINE de JONG, *Foto-elastisch onderzoek van korrelstapelingen*, LGM Med., Vol. 4, No 4, 1960, 119-134.
7. G. de JOSSELINE de JONG, A. VERRUJUT, *Étude photo-élastique d'un empilement de disques*, Cah. Gr. Franc. Rheol., T. 2, No 1, 1969, 73-86.
8. R. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, B. MICHALSKI, *Metoda warstwy elastoptycznej w zastosowaniu do modelowego badania przestrzennych zagadnień kontaktowych*, Rozpr. Inż., T. 15, z. 3, 1967, 455-469.
9. R. DOROSZKIEWICZ, *Badania naprężeń w konstrukcjach niejednorodnych obciążonych ciężarem własnym*, Rozpr. Inż., T. 16, z. 2, 1968, 177-207.
10. A. DRESCHER, K. KWASZCZYŃSKA, Z. MRÓZ, *Statics and kinematics of the granular medium in the case of wedge indentation*, Arch. Mech. Stos., T. 19, z. 1, 1967, 99-113.
11. A. DRESCHER, G. de JOSSELINE de JONG, *Application of photoelasticity to granular media*, (w oprac.).
12. M. FROCHT, *Photoelasticity*, Vol. I, Wiley, New York, 1941.
13. R. HILL, *Élastic properties of reinforced solids: some theoretical principles*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 11, 1964, 357-372.
14. A. NIEMIERKO, B. OBIEGAŁKA, *O sposobach pomiaru składowych naprężeń w gruntach*, Arch. Inż. Łąd., T. XIII, z. 4, 1967, 645-661.
15. NGUYEN CHANH, *Étude expérimentale de la poussée et de la butée des terres*, Ann. Ponts Chaus., No 4, 1968.
16. W. SZCZEPIŃSKI, *Method of characteristics in computation of the experimental stress analysis*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Techn., Vol. XII, No 12, 1964, 619-626.
17. T. WAKABAYASHI, *Photoelastic method for determination of stress in powdered mass*, Proc. 7-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1957, 153-158.
18. T. WAKABAYASHI, *Photoelastic method for determination of stress in powdered mass*, Proc. 8-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1958, 235-242.
19. T. WAKABAYASHI, *Photoelastic method for determination of stress in powder mass*, Proc. 9-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1959, 133-140.
20. T. WAKABAYASHI, *A further study on the determination of stress in powder mass*, Proc. 10-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1960, 187-192.
21. T. WAKABAYASHI, *Photoelastic method for determination of stress in powder mass*, Proc. 11-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1961, 135-138.
22. J. WEBER, *Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents. Application à la rhéologie de ces milieux*, Cah. Gr. Franc. Rheol., T. 1, No 3, 1966, 161-170.

Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ОПТИЧЕСКИ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СЫПУЧИХ СРЕД

В работе рассматривается возможность применения модельных оптически чувствительных материалов для определения напряженного состояния в сыпучих средах. Обсуждается подробно два вида модельных сыпучих сред: а) среда составленная из валиков либо кружков из оптически

чувствительного материала, б) стеклянный песок с порами заполненными иммерсионной жидкостью. На основе литературных данных и собственных исследований проанализированы механические и оптические особенности обеих моделей а также виды информации получаемых из опытов. Указывается, что при использовании законов эластооптики модель построенная из валиков снабжает непосредственно информацией дискретного характера (о контактных силах), которая может использоваться и для континуального подхода путем введения среднего тензора напряжения. Приводится метод определения компонент этого тензора. Модель в виде стеклянного песка сообщает данные о траекториях главных напряжений на основе которых можно в некоторых случаях определить аналитическим путем значения напряжений. Рассмотрены также вопросы описания сред.

В работе рассмотрены достигнутые результаты и дальнейшие возможности развития метода, который должен найти широкое применение в научных исследованиях.

Summary

APPLICATION OF OPTICALLY SENSIBLE MODEL MATERIALS IN STRESS ANALYSIS OF GRANULAR MEDIA

Discussed is the problem of application of photoelastic materials as model media for experimental stress analysis in granular masses. Distinguished are two kinds of model media: a) medium composed of rollers or discs of a photoelastic material, b) crushed glass sand with pores filled by an immersion fluid. The mechanical and optical properties of both types of models are discussed on the basis of published data and author's results. The rollers model furnishes direct information of the discrete character (contact forces). These information may be, however, used also if the continua approach is employed by introducing the concept of a mean stress tensor. Proposed is the procedure allowing to estimate the components of this mean tensor. The glass sand model furnishes data on the principal stresses trajectories. In some cases the values of stresses may be calculated if use is made of the stress trajectories. The problem of description of the deformation of media is discussed.

The paper contains a review of recent results and discussion on further possible development of the method, which seems to be very promising for research works in mechanics of granular media.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 marca 1970 r.
