

STAN NAPRĘŻEŃ I ODKSZTAŁCEŃ W KOLE WIRNIKOWYM Z MAŁĄ  
LICZBĄ BOCZNYCH ŁOPATEK PROMIENIOWYCH<sup>1)</sup>

JANUSZ ZIÓŁKOWSKI (ŁÓDŹ)

Wykaz ważniejszych oznaczeń

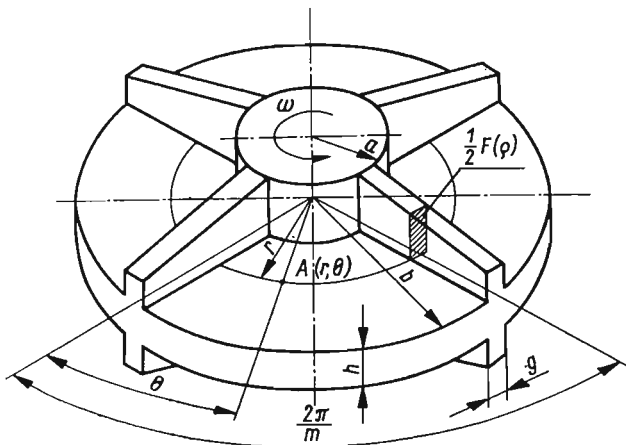
- a* promień piasty koła wirnikowego,
- A* macierz współczynników  $a_{ik}$ ,
- b* promień zewnętrzny koła wirnikowego; macierz wolnych wyrazów  $b_l$ ,
- B* macierz współczynników  $B_{in}^{(k)}$ ,
- c* stała,
- e* liczba naturalna,
- E* moduł Younga,
- F* pole przekroju poprzecznego łopatki,
- g* grubość łopatki; przyspieszenie siły ciężkości,
- h* grubość tarczy kołowej,
- H* stała,
- i, k, l* liczby naturalne,
- m* liczba łopatek,  $m = 2, 3, \dots$ ,
- n* liczba naturalna,  $n = 1, 2, \dots$ ,
- p* siła wzajemnego oddziaływania łopatki i tarczy,
- P* funkcja,
- r* współrzędna biegunowa promienia; kierunek promieniowy.
- R* funkcja,
- u* przemieszczenia promieniowe,
- v* przemieszczenia obwodowe,
- x* dotyczy rozwiązania szczególnego,
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  współczynniki,
- $\gamma$  ciężar właściwy,
- $\delta$  funkcja impulsu jednostkowego,
- $\epsilon, \eta$  współczynniki,
- $\Theta$  współrzędna biegunowa kąta, kierunek obwodowy,
- $\kappa$  współczynnik,
- $\nu$  współczynnik Poissona,
- $\rho$  bezwymiarowa współrzędna biegunowa promienia  $\rho = r/b$ ,
- $\sigma$  naprężenia normalne,
- $\tau$  naprężenia styczne,
- $\omega$  prędkość kątowa.

<sup>1)</sup> Niniejsza publikacja jest fragmentem wybranej pracy doktorskiej pod kierunkiem prof. dra inż. Jerzego Leyko

## 1. Równania podstawowe

W pracy rozwiązano zagadnienie rozkładu przemieszczeń i naprężeń w kole wirnikowym z małą liczbą bocznych łopatek promieniowych, usytuowanych symetrycznie względem tarczy. Opracowaną metodę zilustrowano przykładem liczbowym.

Rozpatruje się tarczę kołową, wirującą, o stałej grubości z łopatkami promieniowymi umieszczonymi symetrycznie po obu stronach płaszczyzny środkowej tarczy (rys. 1). Wprowadzono oznaczenia:  $m$  — liczba łopatek,  $\varrho$  — bezwymiarowa współrzędna biegunowa promienia,  $\varrho = r/b$ .



Rys. 1

W celu rozwiązania zagadnienia dla małej liczby łopatek wyklucza się możliwość stosowania metod opartych na teorii cienkich płyt kołowych o ortotropii konstrukcyjnej. W niniejszej pracy przyjęto przeto oddziaływanie łopatki na tarczę nośną w postaci nieświadomej siły promieniowej, powierzchniowej, osiowo-niesymetrycznej  $p(\varrho, \Theta)$ .

Tak sformułowane zagadnienie sprowadzono do modelu tarczy kołowej wirującej, podlegającej płaskiemu stanowi naprężeń osiowo-niesymetrycznych, obciążonej siłami odśrodkowymi wirujących mas oraz siłami oddziaływania łopatek  $p(\varrho, \Theta)$ .

Równania równowagi wewnętrznej dla tarczy (rys. 2) mają następującą postać

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial \varrho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \Theta} = -\frac{b}{h} p(\varrho, \Theta) - \frac{\gamma}{g} b^2 \omega^2 \varrho,$$

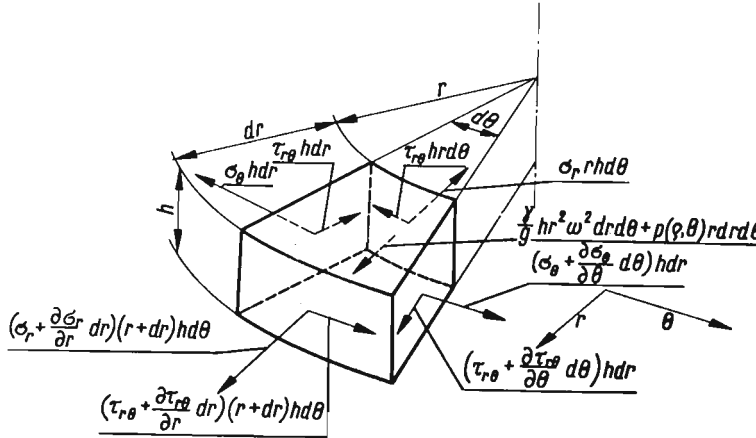
$$(1.2) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \Theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \varrho} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{\varrho} = 0.$$

Wprowadzając do równań równowagi zależności wynikające z uogólnionych praw Hooke'a, wyrażające naprężenia za pomocą odkształceń względnych oraz zależności geometryczne wiążące odkształcenia z przemieszczeniami, otrzymano dla postawionego zagadnienia układ dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu o pochodnych cząstkowych, wyrażonych w przemieszczeniach

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{u}{\varrho^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho \partial \Theta} - \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial v}{\partial \Theta} =$$

$$= -\frac{(1-\nu^2)b^2}{Eh} p(\varrho, \Theta) - \frac{(1-\nu^2)\gamma\omega^2 b^3}{gE} \varrho,$$

$$\frac{1-\nu}{2} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho^2} \right] + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} + \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial \Theta} = 0.$$



Rys. 2

**2. Równania różniczkowe dla danego zagadnienia (rozkład w postaci impulsu jednostkowego) i ich rozwiązanie**

Przyjmuje się, że łopatką oddziaływyje na tarczę liniową siłą promieniową  $p(\varrho)$ . Ponieważ siła  $p(\varrho, \Theta)$  występująca w układzie równań (1.3) jest siłą powierzchniową przeto siłę liniową  $p(\varrho)$  rozłożono na obwodzie w postaci impulsu jednostkowego o okresie  $2\pi/m$  (rys. 3).

Dla biegunowego układu współrzędnych funkcja impulsu jednostkowego o okresie  $2\pi/m$  wyraża się w postaci następującego szeregu trygonometrycznego

$$(2.1) \quad \delta(\varrho, \Theta) = \frac{m}{\pi b} \frac{1}{\varrho} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nm\Theta) \right].$$

Siłę liniową  $p(\varrho)$  można rozłożyć na powierzchni tarczy stosując przekształcenie

$$(2.2) \quad p(\varrho, \Theta) = \delta(\varrho, \Theta) p(\varrho).$$

Po podstawieniu (2.1) do (2.2) promieniowa siła powierzchniowa jest równa

$$(2.3) \quad p(\varrho, \Theta) = \frac{m}{\pi b} \frac{p(\varrho)}{\varrho} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nm\Theta) \right].$$

Wprowadzając siłę (2.3) do układu równań (1.3) otrzymano

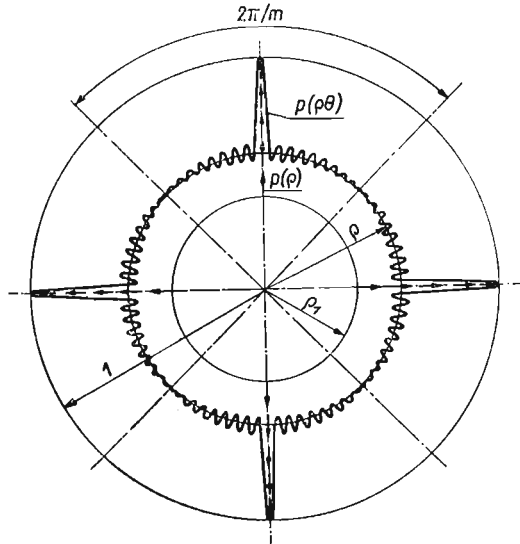
$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{u}{\varrho^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho \partial \Theta} - \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial v}{\partial \Theta} = \\ = \alpha_1 \frac{p(\varrho)}{\varrho} + \alpha_2 \frac{p(\varrho)}{\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nm\Theta) + \alpha_3 \varrho,$$

$$\frac{1-\nu}{2} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho^2} \right] + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} + \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial \Theta} = 0,$$

gdzie

$$(2.5) \quad \alpha_1 = \frac{\alpha_2}{2} = - \frac{(1-\nu^2)b}{Eh} \frac{m}{2\pi},$$

$$(2.6) \quad \alpha_3 = - \frac{(1-\nu^2)\gamma\omega^2 b^3}{gE}.$$



Rys. 3

Przy założeniu, że siłę liniową oddziaływania łopatki można wyrazić wielomianem potęgowym

$$(2.7) \quad p(\varrho) = \frac{1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_1,$$

podstawowy układ równań różniczkowych dla rozpatrywanego zagadnienia ma postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{u}{\varrho^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho \partial \Theta} - \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial v}{\partial \Theta} =$$

$$(2.8) \quad = \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^{k-1} + \alpha_3 \varrho + 2 \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nm\Theta),$$

$$\frac{1-\nu}{2} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho^2} \right] + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} + \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial \Theta} = 0.$$

Rozwiązanie ogólne układu równań (2.8) przewiduje się w postaci

$$(2.9) \quad u(\varrho, \Theta) = u_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\varrho) \cos(nm\Theta),$$

$$v(\varrho, \Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\varrho) \sin(nm\Theta).$$

$u_0(\varrho)$  określa tutaj rozwiązanie zagadnienia osiowo-symetrycznego dla tarczy wirującej z uśrednionymi na obwodzie siłami oddziaływania łopatek. Szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\varrho) \cos(nm\Theta)$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(\varrho) \sin(nm\Theta)$  przedstawiają rozwiązanie zagadnienia osiowo-niesymetrycznego, uwzględniające wpływ miejscowego oddziaływania łopatek. Podstawiając przewidywane rozwiązanie ogólne wyrażone równaniami (2.9) do układu równań różniczkowych (2.8) otrzymano:

a) dla zagadnienia osiowo-symetrycznego, równanie różniczkowe zwyczajne

$$(2.10) \quad \frac{d^2 u_0}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{du_0}{d\varrho} - \frac{u_0}{\varrho^2} = \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^{k-1} + \alpha_3 \varrho,$$

którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$(2.11) \quad u_0(\varrho) = \frac{C_1}{\varrho} + C_2 \varrho + \frac{\alpha_3}{8} \varrho^3 + \frac{\varepsilon_0}{2} \varrho \ln \varrho + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\varepsilon_k}{k^2 + 2k} \varrho^{k+1},$$

gdzie  $C_1, C_2$  — stałe znajdujące się z warunków brzegowych zagadnienia;

b) dla zagadnienia osiowo-niesymetrycznego — układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$(2.12) \quad \frac{d^2 u_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{du_n}{d\varrho} - \left[ 1 + \frac{1-\nu}{2} n^2 m^2 \right] \frac{u_n}{\varrho^2} + \frac{1+\nu}{2} nm \frac{1}{\varrho} \frac{dv_n}{d\varrho} - \frac{3-\nu}{2} nm \frac{v_n}{\varrho^2} = 2 \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^{k-1}$$

$$\frac{1-\nu}{2} \left[ \frac{d^2 v_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dv_n}{d\varrho} - \frac{v_n}{\varrho^2} \right] - n^2 m^2 \frac{v_n}{\varrho^2} - \frac{3-\nu}{2} nm \frac{u_n}{\varrho^2} - \frac{1+\nu}{2} nm \frac{1}{\varrho} \frac{du_n}{d\varrho} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Rozwiązanie układu (2.12) składa się z rozwiązania ogólnego układu równań jednorodnych oraz rozwiązania szczególnego układu pełnego. Dla układu równań jednorodnych

$$(2.13) \quad \frac{d^2 u_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{du_n}{d\varrho} - \left[ 1 + \frac{1-\nu}{2} n^2 m^2 \right] \frac{u_n}{\varrho^2} + \frac{1+\nu}{2} nm \frac{1}{\varrho} \frac{dv_n}{d\varrho} - \frac{3-\nu}{2} nm \frac{v_n}{\varrho^2} = 0,$$

$$\frac{1-\nu}{2} \left[ \frac{d^2 v_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dv_n}{d\varrho} - \frac{v_n}{\varrho^2} \right] - n^2 m^2 \frac{v_n}{\varrho^2} - \frac{3-\nu}{2} nm \frac{u_n}{\varrho^2} - \frac{1+\nu}{2} nm \frac{1}{\varrho} \frac{du_n}{d\varrho} = 0,$$

rozwiązanie przewiduje się w postaci

$$(2.14) \quad \bar{u}_n(\varrho) = A_t \varrho^t, \quad \bar{v}_n(\varrho) = \bar{A}_t \varrho^t$$

Podstawiając przewidywane rozwiązania (2.14) do układu (2.13) otrzymamy

$$(2.15) \quad \begin{aligned} A_t \left( t^2 - 1 - \frac{1-\nu}{2} n^2 m^2 \right) + \bar{A}_t \left( \frac{1+\nu}{2} nmt - \frac{3-\nu}{2} nm \right) &= 0, \\ A_t \left( -\frac{3-\nu}{2} nm - \frac{1+\nu}{2} nmt \right) + \bar{A}_t \left[ \frac{1-\nu}{2} (t^2 - 1) - n^2 m^2 \right] &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ z założenia  $A_t^2 + \bar{A}_t^2 \neq 0$ , wobec tego przyrównujemy do zera wyznacznik charakterystyczny układu (2.15), a mianowicie

$$(2.16) \quad \begin{vmatrix} t^2 - 1 - \frac{1-\nu}{2} n^2 m^2; & \frac{1+\nu}{2} nmt - \frac{3-\nu}{2} nm \\ -\frac{3-\nu}{2} nm - \frac{1+\nu}{2} nmt; & \frac{1-\nu}{2} (t^2 - 1) - n^2 m^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Obliczając wyznacznik (2.16) otrzymano równanie czwartego stopnia, którego pierwiastki są równe

$$(2.17) \quad t_{1n} = -t_{2n} = 1 - nm; \quad t_{3n} = -t_{4n} = 1 + nm,$$

albo w skróconej postaci

$$(2.18) \quad t_{ln} = (-1)^{l-1} - (l^2 - 5l + 5)nm, \quad l = 1, 2, 3, 4.$$

Określono współczynnik

$$(2.19.1) \quad \alpha_{ln} = \frac{\bar{A}_t}{A_t} = \frac{nm[(1+\nu)t_{ln} + 3-\nu]}{(1-\nu)(t_{ln}^2 - 1) - 2n^2 m^2}$$

przyjmując wartości pierwiastków określone zależnością (2.18)

$$(2.19.2) \quad \alpha_{ln} = -\frac{3-\nu + (1+\nu)[(-1)^{l-1} - (l^2 - 5l + 5)nm]}{2(1-\nu)(-1)^{l-1}(l^2 - 5l + 5) + (1+\nu)nm}.$$

Otrzymane rozwiązania szczególne  $\varrho^{t_{ln}}$ , jak łatwo sprawdzić, są liniowo niezależne. Rozwiązanie ogólne układu równań jednorodnych (2.13) można więc przedstawić za pomocą liniowej kombinacji rozwiązań szczególnych

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \bar{u}_n(\varrho) &= \sum_{l=1}^4 B_{ln} \varrho^{t_{ln}}, \\ \bar{v}_n(\varrho) &= \sum_{l=1}^4 \alpha_{ln} B_{ln} \varrho^{t_{ln}}, \end{aligned}$$

gdzie  $B_{ln}$  — stałe znajdujące z warunków brzegowych zagadnienia. Rozwiązania szczególne układu równań różniczkowych (2.12) znaleziono w następującej postaci.

Dla  $k+1 \neq \pm 1 + nm$

$$(2.21) \quad u_{kn}^x(\varrho) = D_{kn} \varrho^{k+1}, \quad v_{kn}^x(\varrho) = \bar{D}_{kn} \varrho^{k+1},$$

gdzie

$$(2.22) \quad D_{kn} = \frac{2[(1-\nu)k^2 + 2(1-\nu)k - 2n^2m^2]}{(1-\nu)(n^2m^2 - k^2)[n^2m^2 - (k+2)^2]} \varepsilon_k,$$

$$\bar{D}_{kn} = \frac{2[(1+\nu)k + 4]nm}{(1-\nu)(n^2m^2 - k^2)[n^2m^2 - (k+2)^2]} \varepsilon_k.$$

Dla  $k+1 = -1+nm$

$$(2.23) \quad u_{kn}^x = (H \ln \varrho + J) \varrho^{-1+nm},$$

$$v_{kn}^x = (\alpha_{2n} H \ln \varrho + J) \varrho^{-1+nm},$$

gdzie

$$(2.24) \quad H = \frac{2(1-\nu) + (1+\nu)nm}{4(1-\nu)(nm-1)} \varepsilon_k,$$

$$J = \frac{2(1-\nu) - (3-\nu)nm}{8(1-\nu)(nm-1)nm} \varepsilon_k.$$

Dla  $k+1 = 1+nm$

$$(2.25) \quad u_{kn}^x = (H_1 \ln \varrho + J_1) \varrho^{1+nm},$$

$$v_{kn}^x = (\alpha_{3n} H_1 \ln \varrho + J_1) \varrho^{1+nm},$$

gdzie

$$(2.26) \quad H_1 = \frac{2}{2 + (1-\nu)\alpha_{3n} + \frac{3-\nu}{2}(1 + \alpha_{3n})nm} \varepsilon_k,$$

$$J_1 = \frac{2 \left\{ (1-\nu)\alpha_{3n} + \left[ -\frac{1+\nu}{2} + (1-\nu)\alpha_{3n} \right] nm \right\}}{(1+\nu)nm(nm+1) \left[ 2 + (1-\nu)\alpha_{3n} + \frac{3-\nu}{2}(1 + \alpha_{3n})nm \right]} \varepsilon_k.$$

Otrzymano ostatecznie rozwiązanie ogólne układu równań (2.8), które jest rozwiązaniem w przemieszczeniach rozpatrywanego zagadnienia

$$(2.27) \quad u(\varrho, \Theta) = u_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^4 B_{ln} \varrho^{l'n} + \sum_{k=0}^{N_1} u_{kn}^x(\varrho) \right] \cos(nm\Theta),$$

$$v(\varrho, \Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^4 \alpha_{ln} B_{ln} \varrho^{l'n} + \sum_{k=0}^{N_1} v_{kn}^x(\varrho) \right] \sin(nm\Theta).$$

### 3. Naprężenia w tarczy i łopatkach, warunki brzegowe zagadnienia

3.1. Naprężenia w tarczy. Dla płaskiego stanu naprężeń w tarczy kołowej naprężenia promieniowe, obwodowe i styczne określone są zależnościami

$$(3.1.2) \quad \sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left[ \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \nu \left( \frac{u}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \Theta} \right) \right],$$

$$(3.1.3) \quad \sigma_{\theta} = \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left[ \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \Theta} + \nu \frac{\partial u}{\partial \rho} \right],$$

$$(3.1.4) \quad \tau_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)b} \left[ \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right].$$

Podstawiając do (3.1) rozwiązanie w przemieszczeniach (2.27) oraz uwzględniając rozwiązanie zagadnienia osiowo-symetrycznego (2.11) otrzymano następujące wyrażenia dla naprężeń promieniowych, obwodowych i stycznych w tarczy:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_r(\rho, \Theta) &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left\{ (-1+\nu) \frac{C_1}{\rho^2} + (1+\nu) C_2 + \frac{3+\nu}{8} \alpha_3 \rho^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} [1+(1+\nu) \ln \rho] + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{N_1} \frac{k+1+\nu}{k^2+2k} \varepsilon_k \rho^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^4 [t_{ln} + \nu(1+nm\alpha_{ln})] B_{ln} \rho^{t_{ln}-1} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{N_1} \left[ \frac{du_{kn}^x}{d\rho} + \nu \left( \frac{u_{kn}^x}{\rho} + nm \frac{v_{kn}^x}{\rho} \right) \right] \right] \cos(nm\Theta) \left. \right\}; \\ \sigma_{\theta}(\rho, \Theta) &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left\{ (1-\nu) \frac{C_1}{\rho^2} + (1+\nu) C_2 + \frac{1+3\nu}{8} \alpha_3 \rho^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} [\nu+(1+\nu) \ln \rho] + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\nu(k+1)+1}{k^2+2k} \varepsilon_k \rho^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^4 (1+nm\alpha_{ln} + \nu t_{ln}) B_{ln} \rho^{t_{ln}-1} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=0}^{N_1} \left( \frac{u_{kn}^x}{\rho} + nm \frac{v_{kn}^x}{\rho} + \nu \frac{du_{kn}^x}{d\rho} \right) \right] \cos(nm\Theta) \left. \right\}; \\ \tau_{r\theta}(\rho, \Theta) &= \frac{E}{2(1+\nu)b} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^4 [\alpha_{ln}'(t_{ln}-1) - nm] B_{ln} \rho^{t_{ln}-1} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=0}^{N_1} \left( \frac{dv_{kn}^x}{d\rho} - \frac{v_{kn}^x}{\rho} - nm \frac{u_{kn}^x}{\rho} \right) \right] \sin(nm\Theta). \end{aligned}$$

Stałe  $C_1$ ,  $C_2$  występujące w rozwiązaniu zagadnienia osiowo-symetrycznego oraz stałe  $B_{1n}$ ,  $B_{2n}$ ,  $B_{3n}$ ,  $B_{4n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) dla zagadnienia osiowo-niesymetrycznego można wyznaczyć z warunków brzegowych. Biorąc pod uwagę konstrukcję rozpatrywanego koła wirnikowego sprężarkowego (rys. 1) przyjęto w przybliżeniu sztywne zamocowanie tarczy nośnej na brzegu wewnętrznym ( $\rho = \rho_1$ ), oraz znikanie naprężeń promieniowych i stycznych w tarczy na brzegu zewnętrznym ( $\rho = 1$ ). Otrzymano stąd następujące cztery warunki brzegowe

$$(3.3) \quad \begin{aligned} [u(\rho, \Theta)]_{\rho=\rho_1} &= 0, \\ [v(\rho, \Theta)]_{\rho=\rho_1} &= 0, \\ [\sigma_r(\rho, \Theta)]_{\rho=1} &= 0, \\ [\tau_{r\theta}(\rho, \Theta)]_{\rho=1} &= 0. \end{aligned}$$



Podstawiając do równań (3.3) odpowiednie rozwiązania dla przemieszczeń i naprężeń otrzymano:

a) Dla zagadnienia osiowo-symetrycznego stałe  $C_1, C_2$

$$(3.4.1) \quad C_1 = \frac{(3+\nu)\varrho_1^2 - (1+\nu)\varrho_1^4}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2} \frac{\alpha_3}{8} + \frac{\varrho_1^2 R(1) - (1+\nu)\varrho_1 P(\varrho_1)}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2},$$

$$(3.4.2) \quad C_2 = -\frac{3+\nu+(1-\nu)\varrho_1^4}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2} \frac{\alpha_3}{8} - \frac{R(1) + (1-\nu)\varrho_1 P(\varrho_1)}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2},$$

gdzie  $P(\varrho)$  i  $R(\varrho)$  określają następujące funkcje

$$(3.5.1) \quad P(\varrho) = \frac{\varepsilon_0}{2} \varrho \ln \varrho + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\varepsilon_k}{k^2+2k} \varrho^{k-1},$$

$$(3.5.2) \quad R(\varrho) = \frac{\varepsilon_0}{2} [1 + (1+\nu) \ln \varrho] + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{k+1+\nu}{k^2+2k} \varrho^k \varepsilon_k.$$

b) Dla zagadnienia osiowo-niesymetrycznego następujący układ równań

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \sum_{l=1}^4 B_{ln} \varrho_1^{l'n} + \sum_{k=0}^{N_1} u_{kn}^x(\varrho_1) = 0, \\ & \sum_{l=1}^4 \alpha_{ln} B_{ln} \varrho_1^{l'n} + \sum_{k=0}^{N_1} v_{kn}^x(\varrho_1) = 0, \\ & \sum_{l=1}^4 [t_{ln} + \nu(1+nm\alpha_{ln})] B_{ln} + \sum_{k=0}^{N_1} \left[ \frac{du_{kn}^x}{d\varrho} + \nu \left( \frac{u_{kn}^x}{\varrho} + nm \frac{v_{kn}^x}{\varrho} \right) \right]_{\varrho=1} = 0, \\ & \sum_{l=1}^4 [\alpha_{ln}(t_{ln}-1) - nm] B_{ln} + \sum_{k=0}^{N_1} \left( \frac{dv_{kn}^x}{d\varrho} - \frac{v_{kn}^x}{\varrho} - nm \frac{u_{kn}^x}{\varrho} \right)_{\varrho=1} = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ współczynniki  $\varepsilon_k$ , określające siłę oddziaływania łopatki, są nieznanne należało układ (3.6) zastąpić układem równań, który odpowiadałby poszczególnym formom obciążenia  $k = 0, 1, \dots, N_1$ , a mianowicie

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & \sum_{l=1}^4 B_{ln}^{(k)} \varrho_1^{l'n} + L_{kn}^{(1)}(\varrho_1) = 0, \\ & \sum_{l=1}^4 \alpha_{ln} B_{ln}^{(k)} \varrho_1^{l'n} + L_{kn}^{(2)}(\varrho_1) = 0, \\ & \sum_{l=1}^4 \beta_{ln} B_{ln}^{(k)} + L_{kn}^{(3)}(1) = 0, \\ & \sum_{l=1}^4 \gamma_{ln} B_{ln}^{(k)} + L_{kn}^{(4)}(1) = 0. \end{aligned}$$

W powyższym układzie równań wprowadzono oznaczenia

$$(3.8.1) \quad \beta_{ln} = t_{ln} + \nu(1 + nm\alpha_{ln}),$$

$$(3.8.2) \quad \gamma_{ln} = \alpha_{ln}(t_{ln} - 1) - nm,$$

$$L_{kn}^{(1)}(\varrho) = \frac{u_{kn}^x(\varrho)}{\varepsilon_k},$$

$$L_{kn}^{(2)}(\varrho) = \frac{v_{kn}^x(\varrho)}{\varepsilon_k},$$

(3.9)

$$L_{kn}^{(3)}(\varrho) = \frac{1}{\varepsilon_k} \left[ \frac{du_{kn}^x}{d\varrho} + \nu \left( \frac{u_{kn}^x}{\varrho} + nm \frac{v_{kn}^x}{\varrho} \right) \right],$$

$$L_{kn}^{(4)}(\varrho) = \frac{1}{\varepsilon_k} \left[ \frac{dv_{kn}^x}{d\varrho} - \frac{v_{kn}^x}{\varrho} - nm \frac{u_{kn}^x}{\varrho} \right].$$

Stałe  $B_{ln}$  wyznaczone z układu równań (3.6) oraz stałe  $B_{ln}^{(k)}$  wyznaczone z układu (3.7) powiązane są zależnością

$$(3.10) \quad B_{ln} = \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k B_{ln}^{(k)}.$$

Przyjmując w obliczeniach skończoną liczbę wyrazów szeregu  $n = 1, \dots, N_2$ , z układu równań (3.7) wyznaczono macierz współczynników  $[B_{ln}^{(k)}]$  składającą się z  $4(1 + N_1)N_2$  elementów.

Otrzymane rozwiązanie dla naprężeń w kole wirnikowym określone zależnościami (3.2) zawiera rozwiązania dla samej tarczy wirującej oraz dla tarczy w spoczynku obciążonej oddziaływaniem łopatek. Naprężenia promieniowe i obwodowe w wirującej tarczy bez łopatek mają postać

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left[ (-1+\nu) \frac{\bar{C}_1}{\varrho^2} + (1+\nu) \bar{C}_2 + \frac{3+\nu}{8} \alpha_3 \varrho^2 \right], \\ \bar{\sigma}_\theta &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left[ (1-\nu) \frac{\bar{C}_1}{\varrho^2} + (1+\nu) \bar{C}_2 + \frac{1+3\nu}{8} \alpha_3 \varrho^2 \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.12.1) \quad \bar{C}_1 = \frac{(3+\nu)\varrho_1^2 - (1+\nu)\varrho_1^4}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2} \frac{\alpha_3}{8},$$

$$(3.12.2) \quad \bar{C}_2 = \frac{3+\nu+(1-\nu)\varrho_1^4}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2} \frac{\alpha_3}{8}.$$

Naprężenia promieniowe, obwodowe i styczne w tarczy obciążonej oddziaływaniem łopatek wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_r(\varrho, \Theta) &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left\{ (-1+\nu) \frac{\bar{C}_1}{\varrho^2} + (1+\nu) \bar{C}_2 + R(\varrho) + \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \sum_{n=1}^{N_2} \left[ \sum_{l=1}^4 \beta_{ln} B_{ln}^{(k)} \varrho^{l_{in}-1} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + L_{kn}^{(3)}(\varrho) \right] \cos(nm\Theta) \right\}, \\
 \bar{\sigma}_\theta(\varrho, \Theta) &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left\{ (1-\nu) \frac{\bar{C}_1}{\varrho^2} + (1+\nu) \bar{C}_2 + Q(\varrho) + \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \sum_{n=1}^{N_2} \left[ \sum_{l=1}^4 \delta_{ln} B_{ln}^{(k)} \varrho^{l_{in}-1} + \right. \right. \\
 (3.13) \quad &\quad \left. \left. + M_{kn}(\varrho) \right] \cos(nm\Theta) \right\}, \\
 \bar{\tau}_{r\theta}(\varrho, \Theta) &= \frac{E}{2(1+\nu)b} \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \sum_{n=1}^{N_2} \left[ \sum_{l=1}^4 \gamma_{ln} B_{ln}^{(k)} \varrho^{l_{in}-1} + L_{kn}^{(4)}(\varrho) \right] \sin(nm\Theta),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.14.1) \quad \bar{C}_1 = \frac{\varrho_1^2 R(1) - (1+\nu) \varrho_1 P(\varrho_1)}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2},$$

$$(3.14.2) \quad \bar{C}_2 = -\frac{R(1) + (1-\nu) \varrho_1 P(\varrho_1)}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2},$$

przy czym wprowadzono dodatkowo oznaczenia

$$(3.15) \quad \delta_{ln} = 1 + nm\alpha_{ln} + \nu l_{in},$$

$$(3.16) \quad M_{kn}(\varrho) = \frac{1}{\varepsilon_k} \left[ \frac{u_{kn}^x}{\varrho} + nm \frac{v_{kn}^x}{\varrho} + \nu \frac{du_{kn}^x}{d\varrho} \right],$$

$$(3.17) \quad Q(\varrho) = \frac{\varepsilon_0}{2} [\nu + (1+\nu) \ln \varrho] + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\nu(k+1)+1}{k^2+2k} \varepsilon_k \varrho^k.$$

Naprężenia promieniowe sumaryczne w tarczy wynoszą

$$(3.18) \quad \sigma_r(\varrho, \Theta) = \bar{\sigma}_r(\varrho) + \bar{\sigma}_r(\varrho, \Theta);$$

podobne związki zachodzą dla naprężeń obwodowych i stycznych ( $\bar{\tau}_{r\theta} = 0$ ).

**3.2. Naprężenia i przemieszczenia w łopatkach.** Łopatkę traktowano jako element liniowy podlegający jednokierunkowemu stanowi naprężeń. Na wycięty element łopatki, symetryczny względem płaszczyzny środkowej tarczy (rys. 4), działa siła odśrodkowa wirującej masy łopatki oraz siła liniowa oddziaływania tarczy  $p(\varrho)$ .

Równanie równowagi wewnętrznej łopatki ma postać

$$(3.19) \quad \frac{d[F(\varrho)\sigma_{rt}]}{dr} = p(\varrho) - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r F(\varrho).$$

Po podstawieniu do powyższego równania:

a) naprężeń w łopatkce wyrażonych za pomocą przemieszczeń

$$(3.20) \quad \sigma_{rt} = E \frac{du}{dr};$$

b) siły liniowej wzajemnego oddziaływania tarczy na łopatkę określoną zależnością (2.7)

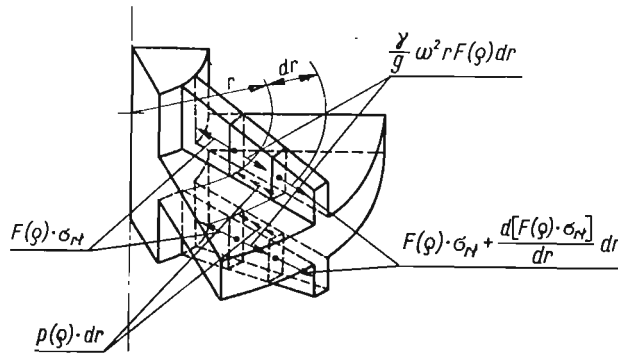
$$p(\varrho) = -\frac{2\pi Eh}{(1-\nu^2)bm} \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^k;$$

c) pola przekroju poprzecznego łopatkki wyrażonego liniową funkcją promienia

$$(3.21) \quad F(\varrho) = F_1 + F_2 \varrho$$

otrzymano następujące równanie różniczkowe dla przemieszczeń łopatkki

$$(3.22) \quad \frac{d}{d\varrho} \left[ (F_1 + F_2 \varrho) \frac{du}{d\varrho} \right] = -\frac{2\pi b h}{m(1-\nu^2)} \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^k - \frac{\gamma \omega^2 b^3}{gE} \varrho (F_1 + F_2 \varrho).$$



Rys. 4

Warunki brzegowe łopatkki wyrażają sztywne zamocowanie łopatkki na obwodzie wewnętrznym ( $\varrho = \varrho_1$ ) oraz znikanie naprężeń na obwodzie zewnętrznym ( $\varrho = 1$ )

$$(3.23) \quad u(\varrho_1) = 0, \quad \left( \frac{du}{d\varrho} \right)_{\varrho=1} = 0.$$

Rozwiązując równanie (3.22) z uwzględnieniem warunków (3.23) otrzymano zależności:

a) dla przemieszczeń łopatkki

$$(3.24) \quad u_l = \sum_{k=0}^{N_1} d_k(\varrho) \varepsilon_k + N(\varrho),$$

gdzie

$$(3.25) \quad d_k(\varrho) = \frac{\eta_1}{\eta_0} \frac{1}{k+1} \left\{ \sum_{e=0}^k \frac{\varrho^{k+1-e} - \varrho_1^{k+1+e}}{k+1-e} (-\varkappa)^e \cdot [1 + (-1)^k \varkappa^{k+1}] \ln \frac{\varrho + \varkappa}{\varrho_1 + \varkappa} \right\},$$

$$(3.26) \quad N(\varrho) = -\frac{\eta_2 b}{6} \left[ \frac{2}{3} (\varrho^3 - \varrho_1^3) + \frac{\kappa}{2} (\varrho^2 - \varrho_1^2) - \kappa^2 (\varrho - \varrho_1) + (\kappa^3 - 3\kappa - 2) \ln \frac{\varrho + \kappa}{\varrho_1 + \kappa} \right]$$

oraz

$$(3.27) \quad \eta_0 = \frac{1}{\kappa} = \frac{F_1}{F_2}; \quad \eta_1 = -\frac{2\pi b h}{(1-\nu^2)mF_1}; \quad \eta_2 = \frac{\gamma}{g} \omega^2 b^2 \frac{1}{E},$$

b) dla naprężeń w łopatkce

$$(3.28) \quad \sigma_{r,l} = \frac{2\pi h E}{(1-\nu^2)m} \frac{1}{F(\varrho)} \sum_{k=0}^N \frac{\varepsilon_k}{k+1} (1-\varrho^{k+1}) + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \omega^2 b^2 \frac{F_1}{F(\varrho)} (1-\varrho^2) + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{g} \omega^2 b^2 \frac{F_2}{F(\varrho)} (1-\varrho^3).$$

#### 4. Wyznaczanie siły oddziaływania metodą najmniejszych kwadratów — metoda rozwiązania

Siła liniowa  $p(\varrho)$  oddziaływania tarcza-łopatkka została przyjęta w postaci wielomianu potęgowego (2.7). Niewiadome współczynniki tego wielomianu wyznaczono z porównania przemieszczeń promieniowych tarczy i łopatki. Rozwiązania dla przemieszczeń promieniowych należało więc wyrazić w postaci liniowej względem niewiadomych współczynników  $\varepsilon_k$ . Uwzględniając w rozwiązaniach dla przemieszczeń promieniowych tarczy określonych zależnościami (2.11) i (2.27) warunki brzegowe zagadnienia wyrażone równaniami (3.3) otrzymano

$$(4.1) \quad u(\varrho, \Theta) = a_0(\varrho)\varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{N_1} a_k(\varrho)\varepsilon_k + K(\varrho) + \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \sum_{n=1}^{N_1} \left[ \sum_{l=1}^4 B_{ln}^{(k)} \varrho^{l'n} + L_{kn}^{(1)}(\varrho) \right] \cos(nm\Theta),$$

gdzie

$$(4.2) \quad a_0(\varrho) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\varrho_1^2 - (1+\nu)\varrho_1^2 \ln \varrho_1}{1+\nu + (1-\nu)\varrho_1^2} \frac{1}{\varrho} - \frac{1 + (1-\nu)\varrho_1^2 \ln \varrho_1}{1+\nu + (1-\nu)\varrho_1^2} \varrho + \varrho \ln \varrho \right],$$

$$(4.3) \quad a_k(\varrho) = \frac{(k+1+\nu)\varrho_1^2 - (1+\nu)\varrho_1^{k+2}}{[1+\nu + (1-\nu)\varrho_1^2](k^2+2k)} \frac{1}{\varrho} - \frac{(1-\nu)\varrho_1^{k+2} + k + 1 + \nu}{[1+\nu + (1-\nu)\varrho_1^2](k^2+2k)} \varrho + \frac{1}{k^2+2k} \varrho^{k+1},$$

$$(4.4) \quad K(\varrho) = \frac{\alpha^3}{8} \left[ \frac{(3+\nu)\varrho_1^2 - (1+\nu)\varrho_1^4}{1-\nu + (1-\nu)\varrho_1^2} \frac{1}{\varrho} - \frac{3+\nu + (1-\nu)\varrho_1^4}{1+\nu + (1-\nu)\varrho_1^2} \varrho + \varrho^3 \right].$$

Porównując przemieszczenia promieniowe tarczy określone zależnością (4.1) dla  $\Theta = 0$  z przemieszczeniami łopatki (3.24) otrzymano związek, który powinien być spełniony dla każdego punktu styku łopatki z tarczą, w postaci

$$(4.5) \quad \left\{ a_0(\varrho) - d_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{N_1} \left[ \sum_{l=1}^4 B_{ln}^{(0)} \varrho^{l'n} + L_{0n}^{(1)}(\varrho) \right] \right\} \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{N_1} \left\{ a_k(\varrho) - d_k(\varrho) + \sum_{n=1}^{N_1} \left[ \sum_{l=1}^4 B_{ln}^{(k)} \varrho^{l'n} + L_{kn}^{(1)}(\varrho) \right] \right\} \varepsilon_k + K(\varrho) - N(\varrho) = 0, \quad \text{dla } \varrho_1 \leq \varrho \leq 1.$$

Praktycznie otrzymano liczbę równań  $1+N$ , równą liczbie punktów zgodności przemieszczeń łopatki i tarczy z  $1+N_1$  niewiadomymi ( $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N_1}$ ). Ponieważ  $1+N > 1+N_1$ , układ ten rozwiązano metodą najmniejszych kwadratów błędów.

W zapisie macierzowym otrzymany układ przyjmie postać

$$(4.6) \quad [A][\varepsilon] = [b],$$

gdzie  $[A]$  — macierz współczynników  $a_{ik}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N_1$ ,  $[\varepsilon]$  — macierz kolumnowa niewiadomych  $\varepsilon_k$ ,  $[b]$  — macierz wolnych wyrazów  $b_i$ .

Można udowodnić, że postępowanie prowadzące do znalezienia macierzy kolumnowej niewiadomych  $[\varepsilon]$  metodą najmniejszych kwadratów odpowiada rozwiązaniu układu  $1+N_1$  równań z  $1+N_1$  niewiadomymi, otrzymanego w wyniku lewostronnego pomnożenia równania macierzowego przez macierz transponowaną  $[A^T]$ .

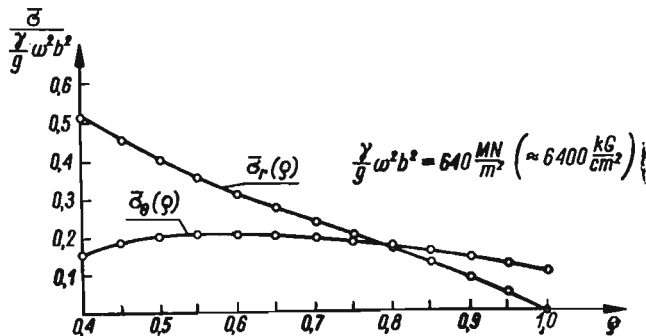
$$(4.7) \quad [A^T][A][\varepsilon] = [A^T][b].$$

Przy założeniu, że  $\det(A^T A) \neq 0$ , z równania (4.7) otrzymano macierz kolumnową niewiadomych  $[\varepsilon]$ .

### 5. Przykład

Opracowaną metodę określenia stanu przemieszczeń i naprężeń w kole wirnikowym z małą liczbą bocznych łopatek promieniowych zilustrowano następującym przykładem liczbowym.

Promień zewnętrzny tarczy kołowej  $b = 13,5$  cm, promień piasty  $a = 5,4$  cm, grubość tarczy  $h = 0,8$  cm, grubość łopatki  $g = 0,4$  cm, pole przekroju poprzecznego łopatki



Rys. 5

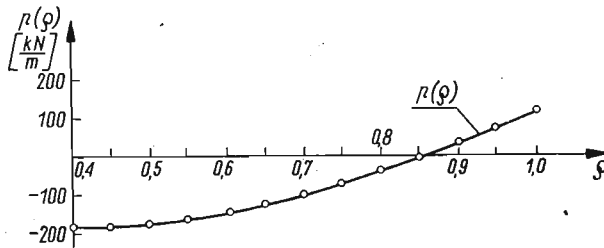
$F(\varrho) = (3,2 - 2\varrho)10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $0,4 \leq \varrho \leq 1,0$ , liczba łopatek  $m = 4$ , prędkość kątowa  $\omega = 2095 \text{ rd/s}$ , masa właściwa tarczy i łopatki  $\gamma/g = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 (\approx 8 \cdot 10^{-6} \text{ kG/s}^2 \text{ cm}^4)$  moduł Younga  $E = 0,21 \text{ TN/m}^2 (\approx 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2)$ , współczynnik Poissona  $\nu = 0,3$ .

Rozkład naprężeń promieniowych i obwodowych w wirującej tarczy bez łopatek obliczony ze wzorów (3.11), pokazano na rys. 5. Współczynniki macierzy  $[B_{in}^{(k)}]$  obliczono z układu równań (3.7).

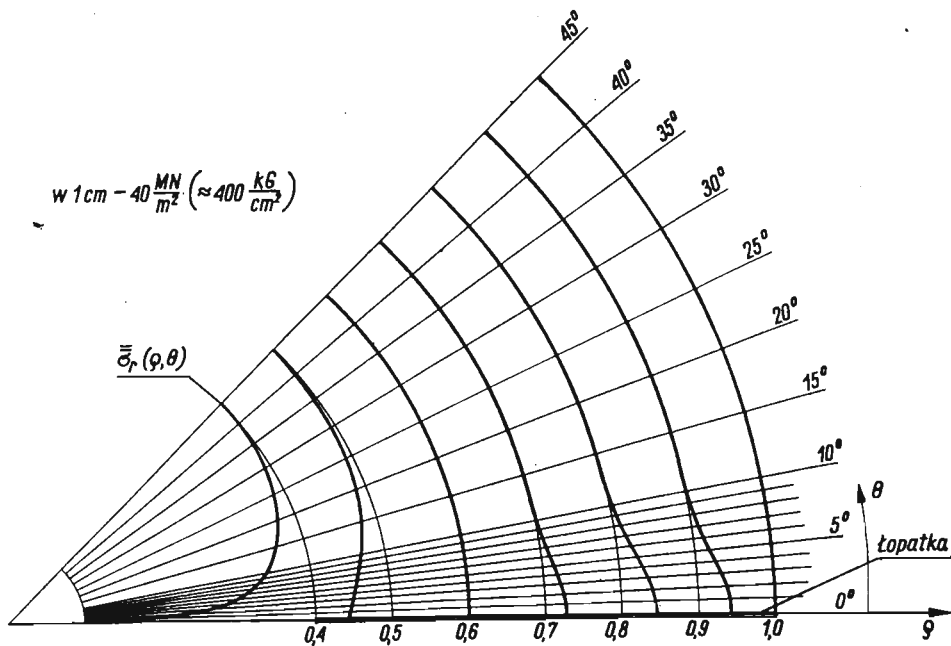
W celu znalezienia współczynników  $\varepsilon_k$ , występujących w wielomianie potęgowym (2.7), porównywano przemieszczenia promieniowe łopatki i tarczy w 29 punktach roz-

mieszczonych wzdłuż łopatki. Otrzymany układ równań rozwiązano metodą najmniejszych kwadratów.

Rozkład siły liniowej  $p(\varrho)$  wzajemnego oddziaływania łopatki i tarczy przybliżono wielomianami potęgowymi czwartego i piątego stopnia. W obu przypadkach błąd względ-



Rys. 6

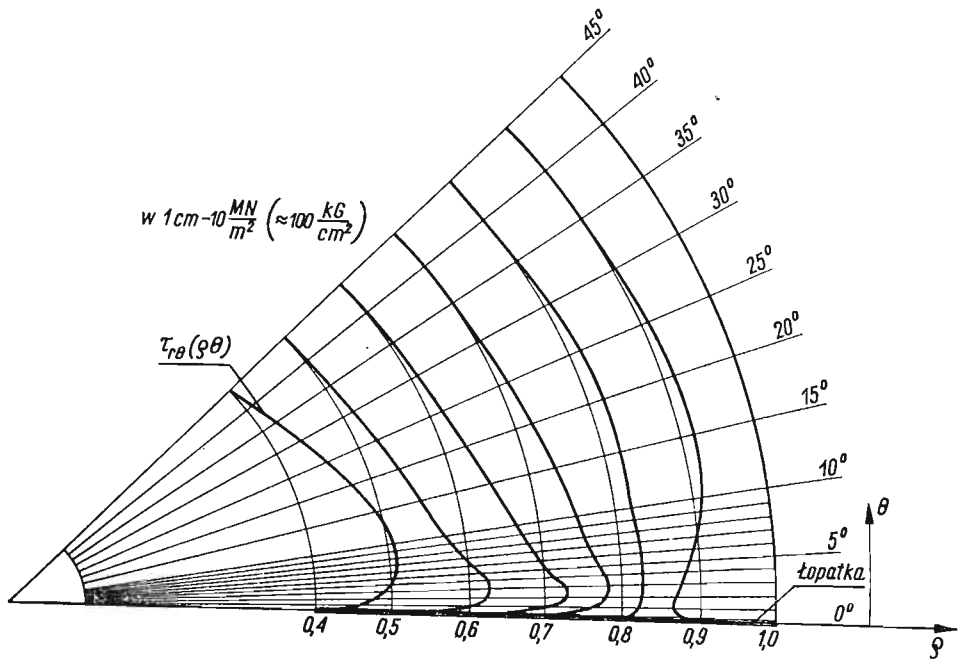


Rys. 7

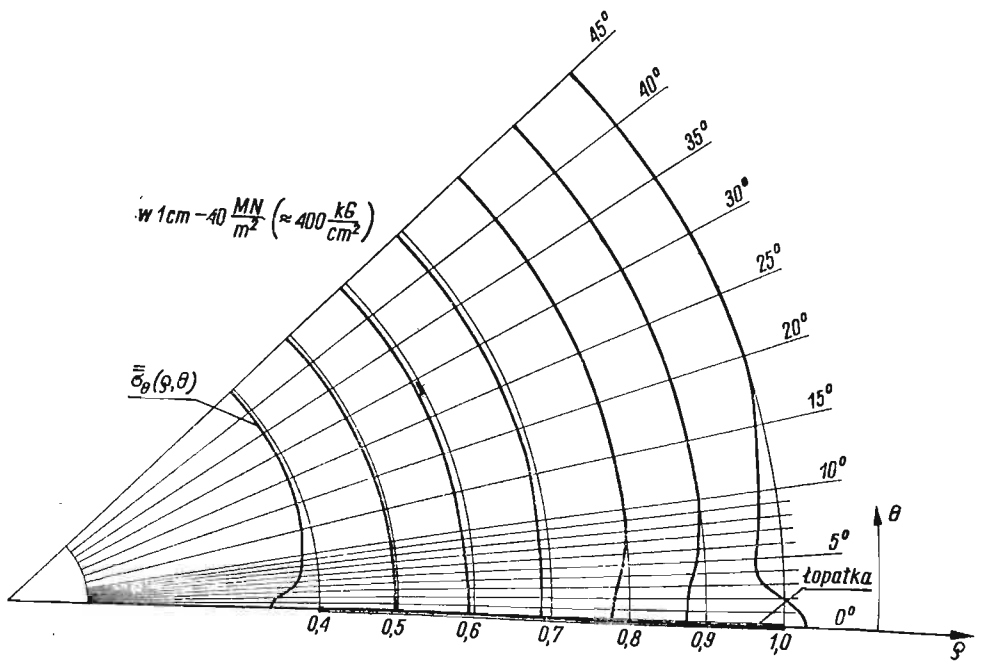
ny nie przekraczał 8%. Do obliczeń końcowych przyjęto rozkład siły liniowej  $p(\varrho)$  w postaci wielomianu potęgowego piątego stopnia ( $k = 0, 1, 2, \dots, 5$ ) i pokazano na rys. 6.

Sumy szeregów nieskończonych występujące we wzorach (3.2) na naprężenia promieniowe, obwodowe i styczne przybliżano uwzględniając skończoną liczbę wyrazów  $N_2 = 15$  i  $N_2 = 25$ . Otrzymane wyniki różniły się o niespełna 2%. W obliczeniach końcowych naprężenia promieniowe (rys. 7), obwodowe (rys. 8) i styczne (rys. 9) liczono ze wzorów (3.13), przyjmując skończoną liczbę wyrazów szeregu  $n = 1, 2, 3, \dots, 15$ . Rozkład naprężeń w łopatce liczony ze wzoru (3.28), pokazano na rys. 10.

Obliczenia wykonano na elektronicznej maszynie cyfrowej ZAM Beta 2.

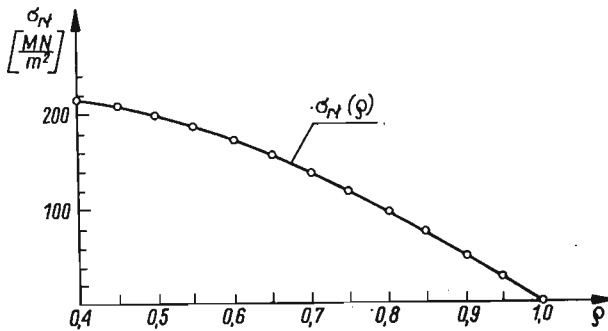


Rys. 8



Rys. 9





Rys. 10

### 6. Wnioski końcowe

Opracowana metoda wyznaczania stanu przemieszczeń i naprężeń może być stosowana do ściśle określonego typu kół wirnikowych. Poczynione założenie dotyczące symetrycznego usytuowania łopatek promieniowych z obu stron tarczy ogranicza rozwiązanie do kół wirnikowych, sprężarkowych, z dwustrumieniowym przepływem czynnika.

W przeciwieństwie do obecnie stosowanych metod [1, 2, 3, 4, 5, 6], opracowana metoda pozwala na:

- uwzględnienie naprężeń w tarczy pochodzących od miejscowego oddziaływania łopatek;
- uwzględnienie kształtu łopatki wyrażonego dowolną funkcją promienia;
- wyznaczenie siły liniowej  $p(\varrho)$  wzajemnego oddziaływania łopatki na tarczę;
- określenie stanu naprężeń w łopatce.

Podane rozwiązanie dla przemieszczeń (2.27) i naprężeń (3.2) może być zastosowane również dla tarczy pełnej z promieniowymi łopatkami zaczynającymi się w środku tarczy. W tym przypadku wzory na przemieszczenia i naprężenia upraszczają się, ponieważ należy przyjąć  $B_{1n}^{(k)} = 0$  oraz  $B_{4n}^{(k)} = 0$ . Warunki brzegowe wyrażone równaniami (3.3) ograniczają się wówczas do dwóch warunków dla naprężeń promieniowych i stycznych na brzegu zewnętrznym tarczy ( $\varrho = 1$ ), natomiast dwa pozostałe warunki dla przemieszczeń promieniowych i obwodowych w środku tarczy ( $\varrho = 0$ ) spełnione są tożsamościowo.

### Literatura cytowana w tekście

1. И. А. БИРГЕР, *Круглые пластинки и оболочки вращения*, Оборонгиз, Москва 1962.
2. А. С. БОНДАРЧУК, *Изгиб во вращающемся диске с боковыми лопатками*. Труды Киевского-Автомоб.-Дорожного Института, вып. 7, Киев 1960.
3. J. LEYKO, *Stan naprężeń w wirniku o promieniowych łopatkach położonych po jednej stronie*. Arch. Bud. Masz., PAN, Warszawa, 3, 7 (1960).
4. Ц. Г. ЛЕХНИЦКИЙ, *Анизотропные пластинки*, Москва 1947.
5. K. LÖFFLER, *Die Berechnung von rotierenden Scheiben und Schalen*, Springer-Verlag, Berlin 1961.
6. Э. С. Уманский, *Растяжение круглых дисков силами действующими в средней плоскости вдоль радиусов*. Известия Киевского Политехнического Института, т. X, Машгиз, Москва 1950.

## Резюме

НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЯ В РОТОРЕ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ  
БОКОВЫХ РАДИАЛЬНЫХ ЛОПАТОК

В работе даются общие дифференциальные уравнения, описывающие перемещения во вращающемся диске постоянной толщины, закрепленном на недеформируемой ступице и нагруженном собственными центробежными силами, а также поверхностными, направленными радиально и несимметрично расположенными силами  $p(\varrho, \Theta)$ , изображающими воздействие лопаток.

При решении дифференциальных уравнений радиальные силы воздействия лопаток приняты в виде полинома и распределены по окружности в виде тригонометрической последовательности с периодом  $2\pi/m$  — число лопаток). Неизвестные коэффициенты полинома определяющего линейную силу  $p(\varrho)$  были найдены путем сравнения радиальных перемещений диска и лопатки в нескольких десятках точек расположенных вдоль лопатки. Предложенный метод расчета иллюстрируется численным примером.

## Summary

STATE OF STRESS AND STRAIN IN A ROTOR WITH A SMALL  
NUMBER OF RADIAL SIDE BLADES

The general system of differential displacement equations is given, describing the problem of a rotating circular disc of constant thickness and a rigid hub loaded by centrifugal forces and by radial, axially non-symmetric surface forces  $p(\varrho, \Theta)$  representing the action of side blades (Fig. 1).

The radial force is assumed in the form of a polynomial and expanded in the circumferential direction into a trigonometric series of period  $2\pi/m$  ( $m$  — number of blades). The unknown coefficients appearing in the polynomial describing the line force  $p(\varrho)$  are found by equating the radial displacements of the disc and the blade in about 30 points located along the blade. This method is illustrated by a numerical example.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 stycznia 1968 r.*