MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 7 (1969)

ZALEŻNOŚĆ RYZYKA AWARII OD PARAMETRÓW PROCESU OBCIĄŻENIA

MACIEJ MAKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Celem niniejszej pracy jest zanalizowanie zależności ryzyka awarii $r(t)$ od charakterystyk losowego obciążenia.

Zagadnienie to rozwiązano w przypadku, gdy konstrukcja podlega zmęczeniu i starzeniu oraz obciążenie jest dowolnym niestacjonarnym procesem losowym. Jest to uogólnienie zadania, jakie postawili i rozwiązali (w zastosowaniu do utraty wytrzymałości ośrodka stałego mikroniejednorodnego) MURZEWSKI i autor [6].

W przypadku szczególnym stacjonarnego procesu obciążenia i stałej nośności, otrzymano wniosek pokrywający się z wynikiem pracy [6], mianowicie $r = \text{const}$.

Rozpatrujemy obciążenia konstrukcji tego samego rodzaju, np. obciążenia budynków mieszkalnych tego samego typu, mostów tej samej klasy i konstrukcji, itp.

Obciążenie $P(t)$ jest procesem losowym, tzn. że dla każdej ustalonej chwili t obciążenie jest zmienną losową określoną dla zbioru wszystkich obiektów danej klasy, natomiast dla konkretnego obiektu obciążenie jest funkcją nielosową czasu, która jednakże nie jest znana *a priori*.

Ograniczymy się do rozpatrywania jednej budowli o dokładnie skontrolowanych wymiarach, wykonanej z materiałów, których własności są w pełni określoną funkcją czasu. Przy tych założeniach nośność konstrukcji $N(t)$ jest nielosową i *a priori* określoną funkcją czasu (rys. 1). Tak postawione zagadnienie może być podstawą do dalszych uogólnień — dla losowych procesów $N(t)$.

Zagadnienie będzie rozwiązane przy zastosowaniu teorii przewyższania określonego poziomu przez proces losowy [9].

Wymieniona teoria była już stosowana do zagadnień praktycznych. RICE [7] wyprowadził wzór na średnią częstość $\bar{n}_N$ przekroczeń poziomu N przy dodatnim nachyleniu realizacji $P(t)$ stacjonarnych, scentralizowanych, różniczkowych procesów gaussowskich:

$$\bar{n}_N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-K_0''}{K_0}}\, e^{-\frac{N^2}{2K_0}}, \tag{1.1}$$

gdzie K_0 — wariancja, K_0'' — druga pochodna funkcji korelacyjnej.

Jeśli przewyższenie poziomu N przez proces stacjonarny powoduje zniszczenie obiektu, to $\bar{n}_N$ równa się ryzyku r.

2. Oznaczenia i definicje

$N(t)$ nośność konstrukcji w chwili t,
T trwałość konstrukcji (czas bezawaryjnej eksploatacji),
$\mathscr{P}(t)$ niezawodność konstrukcji (prawdopodobieństwo przetrwania),
$r(t)$ ryzyko awarii (intensywność prawdopodobieństwa),
$P(t)$ proces obciążenia,
$\dot{P}(t)$ szybkość obciążenia,
$\overline{p}(t)$ wartość średnia obciążenia,
$K(t_1, t_2)$ funkcja korelacyjna procesu obciążenia,
$\mu^2(t)$ wariancja obciążenia,
$R_{p\dot{p}}(t_1, t_2)$ funkcja korelacji wzajemnej dla obciążenia i szybkości obciążenia,
$f(p, \dot{p}/t)$ dwuwymiarowa gęstość obciążenia i szybkości obciążenia w tej samej chwili t,
$F(p, \dot{p}/t)$ dwuwymiarowa dystrybuanta obciążenia i szybkości obciążenia w chwili t.

Zgodnie z tym co powiedzieliśmy we wstępie, rozpatrywana konstrukcja jest reprezentantem pewnej populacji jednorodnych konstrukcji spełniających te same warunki

Zakładamy, że czas życia konstrukcji jest zmienną losową, w związku z tym można określić funkcję, która jest prawdopodobieństwem bezawaryjnej pracy konstrukcji w okresie czasu t.

Def. 1

Prawdopodobieństwo przetrwania konstrukcji

$$\mathscr{P}(t) = \mathscr{P}[P(t) < N(t)]; \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Obok tej funkcji używa się w teorii niezawodności również funkcji $Q(t)$ będącej prawdopodobieństwem powstania awarii.

Def. 2

Prawdopodobieństwo zniszczenia (awarii)

$$Q(t) = 1 - \mathscr{P}(t).$$

Jeśli założymy, że funkcja $Q(t)$ jest ciągła wraz z pierwszą pochodną, można mówić o gęstości prawdopodobieństwa powstania awarii, czyli o gęstości rozkładu trwałości.

Def. 3

Gęstość rozkładu trwałości

$$q(t) = \frac{d}{dt} Q(t) = -\dot{\mathscr{P}}(t).$$

Następnym równie ważnym pojęciem teorii niezawodności jest prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy konstrukcji w odcinku czasu (t, t_1), gdy wiadomo, że do chwili t konstrukcja pracowała bezawaryjnie.

Def. 4

Niezawodność warunkowa (prawdopodobieństwo przetrwania w okresie od t do t_1).

$$\mathscr{P}(t \div t_1) = \frac{\mathscr{P}(t_1)}{\mathscr{P}(t)}.$$

Z definicji tej wynika, że prawdopodobieństwo powstania awarii w odcinku czasu (t, t_1) przyjmuje postać

$$Q(t \div t_1) = \frac{\mathcal{P}(t)-\mathcal{P}(t_1)}{\mathcal{P}(t)}.$$

Przyjmując $t_1 = t+dt$ i obliczając granicę przy $dt \to 0$ otrzymujemy nową funkcję, zwaną ryzykiem awarii.

Def. 5

Ryzyko awarii

$$r(t) = \lim_{dt\to 0} \frac{Q(t \div t+dt)}{dt}.$$

Ryzyko awarii $r(t)$ można traktować jako warunkową gęstość powstania awarii w chwili t pod warunkiem, że do tej chwili konstrukcja pracowała bezawaryjnie lub, mówiąc mniej ściśle, jako prawdopodobieństwo tego, że konstrukcja, która pracowała bezawaryjnie do chwili t uszkodzi się w czasie $t+dt$, gdzie dt jest dostatecznie małe.

W przypadku gdy konstrukcja nie podlega zmęczeniu i starzeniu dość intuicyjne staje się przyjęcie założenia, że ryzyko awarii jest stałe (niezależne od czasu). Jeden z wniosków niniejszej pracy uzasadnia możliwość przyjmowania tego typu założenia.

3. Wyznaczanie ryzyka awarii przy zastosowaniu zagadnienia o przewyższaniu

Do wyznaczenia ryzyka awarii zastosowano zagadnienie o przewyższaniu, przy czym zagadnienie to uogólniono w niniejszej pracy na przypadek, w którym poziom przekraczany przez funkcję losową jest niekoniecznie stały.

Twierdzenie 1

Założenia: $P(t)$ — proces losowy ciągły wraz z pochodną,
$N(t)$ — funkcja nielosowa czasu.

Teza:
$$r(t) = \int_{\dot{N}(t)}^{\infty} [\dot{p}-\dot{N}(t)] f[N(t)\dot{p}/t] d\dot{p}.$$

Dowód:

Oznaczając przez $\mathcal{P}(a/t)$ prawdopodobieństwo przewyższenia stałego poziomu „a" przez funkcję losową $P(t)$ w czasie dt mamy znany wzór [9]

$$\mathcal{P}(a/t) = dt \int_0^{\infty} \dot{p} f(a, \dot{p}/t) d\dot{p}$$

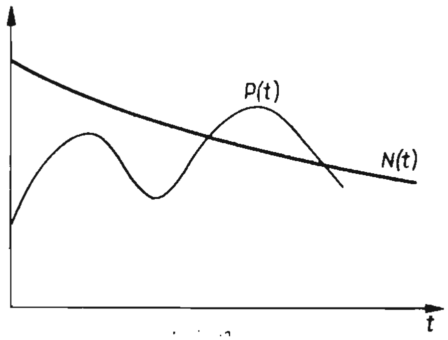
i w przypadku, gdy $a = 0$ wzór

$$\mathcal{P}(0/t) = dt \int_0^{\infty} \dot{p} f(0, \dot{p}/t) d\dot{p}. \tag{3.1}$$

Wyprowadzimy transformację

$$Y(t) = P(t)-N(t),$$
$$W(t) = \dot{P}(t)-\dot{N}(t).$$

Wyznaczenie prawdopodobieństwa przewyższenia przez funkcję losową $P(t)$ poziomu $N(t)$ sprowadza się teraz do wyznaczenia prawdopodobieństwa przewyższenia przez funkcję losową $Y(t)$ poziomu zerowego.



Rys. 1

Należy znaleźć dwuwymiarową gęstość $f_1(y, w)$.

$$F_1(y, w) = \mathscr{P}(Y < y, W < w) = \mathscr{P}(P-N < y, \dot{P}-\dot{N} < w) = \tag{3.2}$$
$$= \mathscr{P}(P < y+N, \dot{P} < W+\dot{N}) = F(y+N, w+\dot{N}),$$

czyli

$$F_1(y, w) = F(p, \dot{p}), \tag{3.3}$$

gdzie

$$p = y+N; \quad \dot{p} = w+\dot{N},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \dot{p}}\frac{\partial \dot{p}}{\partial y} = \frac{\partial F(y+N, w+\dot{N})}{\partial p}$$

i podobnie

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial w} = \frac{\partial^2 F(y+N, w+\dot{N})}{\partial p \partial \dot{p}} = f(y+N, w+\dot{N}),$$

mamy więc

$$f_1(y, w) = f(y+N, w+\dot{N}). \tag{3.4}$$

Oznaczając przez A zdarzenie, polegające na przewyższeniu w czasie dt przez funkcję losową $Y(t)$ poziomu zerowego, otrzymujemy na podstawie wzoru (3.1)

$$\mathscr{P}(A) = dt \int_0^\infty w f_1(0, w/t) dw = dt \int_0^\infty w f[N(t), w+\dot{N}(t)/t] dw;$$

podstawiając

$$w+\dot{N}(t) = \dot{p}$$

otrzymujemy

$$\mathscr{P}(A) = dt \int_{\dot{N}}^\infty (\dot{p}-\dot{N}) f[N(t), \dot{p}/t] d\dot{p}.$$

Z def. 5 ryzyka zniszczenia

$$r(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \lim_{dt\to 0} \frac{\mathscr{P}(A)}{dt}$$

otrzymujemy

$$r(t) = \int_{\dot{N}(t)}^{\infty} [\dot{p}-\dot{N}(t)] f[N(t), \dot{p}/t] d\dot{p}. \tag{3.5}$$

cbdo.

Twierdzenie 2

Założenie: $P(t)$ — stacjonarny w sensie węższym,
$N(t)$ — funkcja nielosowa (nośność).

Teza:
$$r(t) = \int_{\dot{N}(t)}^{\infty} [\dot{p}-\dot{N}(t)] f[N(t), \dot{p}] d\dot{p}.$$

Dowód:

Z założenia stacjonarności wynika, że dwuwymiarowa gęstość obciążenia nie zależy od translacji na osi czasu

$$f(p_1, p_2/t_1, t_2) = f(p_1, p_2/dt), \quad \text{gdzie} \quad dt = t_2 - t_1,$$

poprzez przekształcenie

$$\begin{aligned} p_1 &= p \\ p_2 &= p + \dot{p}\,dt \end{aligned} \tag{3.6}$$

przechodzimy do dwuwymiarowej gęstości zmiennych p i $\dot{p}$

$$f(p, \dot{p}/t_1, t_2) = f(p, p+\dot{p}dt/dt)\,|dt|, \tag{3.7}$$

gdzie $|dt|$ jest wartością bezwzględną jakobianu przekształcenia (3.6), stąd wynika, że

$$f(p, \dot{p}/t_1, t_2) = f(p, \dot{p}/dt), \quad \text{gdzie} \quad dt = t_2 - t_1,$$

czyli

$$f(p, \dot{p}/t, t) = f(p, \dot{p}/0) = f(p, \dot{p}),$$

a stąd

$$f[N(t), \dot{p}/t] = f[N(t), \dot{p}]. \tag{3.8}$$

Wstawiając (3.8) do wzoru (3.5) otrzymujemy tezę:

$$r(t) = \int_{\dot{N}(t)}^{\infty} [\dot{p}-\dot{N}(t)] f[N(t), \dot{p}] d\dot{p}. \tag{3.9}$$

cbdo.

Temat

Założenie: $P(t)$ — proces stacjonarny w sensie węższym.

Teza: $R p\dot{p}(t, t) = 0$.

Twierdzenie to znane jest w literaturze procesów losowych, np. [9]. Przytoczono nowy dowód tego twierdzenia.

Dowód:

Z definicji

$$Rp\dot{p}(t_1, t_2) = E\{[P(t_1)-\bar{p}(t_1)]\dot{P}(t_2)\} = E[P(t_1)\dot{P}(t_2)]-\bar{p}(t_1)E[\dot{P}(t_2)].$$

Ze stacjonarności $P(t)$ wynika $E[\dot{P}(t_2)] = 0$,
czyli

$$R_{p\dot{p}}(t, t) = E[P(t)\dot{P}(t)] = \frac{d}{dt}E\left[\frac{1}{2}P^2(t)\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E[P^2(t)].$$

Ze stacjonarności wynika, że $E[P^2(t)] = \text{const}$,
czyli $Rp\dot{p}(t, t) = 0$.

cbdo.

Wniosek 1

Rozważmy przypadek szczególny, gdy $P(t)$ jest procesem losowym stacjonarnym normalnym.

Wtedy na podstawie poprzedniego tematu: obciążenie i pochodna obciążenia w tej samej chwili t są zmiennymi losowymi nieskorelowanymi, a więc dla procesu normalnego są również zmiennymi losowymi niezależnymi, czyli:

$$f(p, \dot{p}) = f(p)f(\dot{p}).$$

W naszym przypadku mamy:

$$f[N(t), \dot{p}] = f[N(t)]f(\dot{p}). \tag{3.10}$$

Wstawiając (3.10) do (3.9) otrzymujemy

$$r(t) = \int\limits_{\dot{N}(t)}^{\infty} [\dot{p}-\dot{N}(t)]f[N(t)]f(\dot{p})d\dot{p}; \tag{3.11}$$

$P(t)$ z założenia jest normalny, czyli gęstość ma postać

$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu_p}\exp\left[-\frac{(p-\bar{p})^2}{2\mu^2{}_p}\right];$$

$\dot{P}(t)$ — jako pochodna procesu stacjonarnego normalnego jest również procesem stacjonarnym normalnym o wartości średniej równej zero i wariancji równej drugiej pochodnej funkcji korelacyjnej procesu $P(t)$ wziętej ze znakiem minus w punkcie $\tau = 0$;

$$\bar{\dot{p}} = 0 \qquad \mu^2{}_{\dot{p}} = -\frac{d^2Kp(\tau)}{d\tau^2} \quad \text{dla} \quad \tau = 0,$$

czyli

$$\begin{aligned} f[N(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu_p}\exp\left[-\frac{(N(t)-\bar{p})^2}{2\mu^2{}_p}\right],\\ f(\dot{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu_{\dot{p}}}\exp\left[-\frac{\dot{p}^2}{2\mu^2{}_{\dot{p}}}\right]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Wstawiając związki (3.12) do wzoru (3.11) otrzymujemy

$$r(t) = \frac{1}{2\pi\mu_p\mu_{\dot p}} \exp\left[-\frac{(N(t)-\bar p)^2}{2\mu^2{}_p}\right] \int\limits_{\dot N(t)}^{\infty} \dot p \exp\left[-\frac{\dot p^2}{2\mu^2{}_{\dot p}}\right] d\dot p -$$

$$-\dot N(t) \frac{1}{2\pi\mu_p\mu_{\dot p}} \exp\left[-\frac{(N(t)-\bar p)^2}{2\mu^2{}_p}\right] \int\limits_{\dot N(t)}^{\infty} \exp\left[-\frac{\dot p^2}{2\mu^2{}_{\dot p}}\right] d\dot p.$$

Wyliczając pierwszą całkę przez podstawienie

$$\frac{\dot p^2}{2\mu^2{}_{\dot p}} = t$$

otrzymujemy

$$r(t) = \frac{1}{2\pi\mu_p} \exp\left[-\frac{(N(t)-\bar p)^2}{2\mu^2{}_p}\right] \left\{\dot p \exp\left[-\frac{\dot N^2(t)}{2\mu^2{}_{\dot p}}\right] - \frac{\dot N(t)}{\mu_{\dot p}} \int\limits_{\dot N(t)}^{\infty} \exp\left[-\frac{\dot p^2}{2\mu^2{}_{\dot p}}\right] d\dot p, \right. \tag{3.13}$$

gdzie występującą w tym wzorze całkę można doprowadzić do stablicowanej funkcji Laplace'a.

Wniosek 2

Założenie: 1) konstrukcja nie podlega zmęczeniu ani starzeniu $N(t) \equiv N = \text{const}$,
2) obciążenie jest procesem stacjonarnym.

Teza: $$r(t) \equiv r = \int\limits_0^{\infty} \dot p f(N, \dot p) d\dot p.$$

W przypadku, gdy $N(t) \equiv N = \text{const}$, mamy do czynienia z klasycznym znanym z literatury zagadnieniem o przewyższaniu przez funkcję losową ustalonego poziomu N. Wzór na ryzyko awarii w tym przypadku można wyprowadzić ustalając warunek na przewyższenie, licząc $\mathscr{P}(A)$ i $\lim\limits_{dt\to 0} \frac{\mathscr{P}(A)}{dt}$, lub jako natychmiastowy wniosek z twierdzenia 2 przyjmując w założeniu

$$N(t) \equiv N = \text{const, czyli } \dot N(t) \equiv 0;$$

mamy więc

$$r(t) \equiv r = \int\limits_0^{\infty} \dot p f(N, \dot p) d\dot p \tag{3.14}$$

cbdo.

Widzimy stąd, że jeśli konstrukcja nie podlega zmęczeniu ani starzeniu i obciążenie jest procesem stacjonarnym, to ryzyko awarii jest niezależne od czasu $r(t) \equiv r = \text{const}$.

Wniosek 3

Założenie takie samo, jak we wniosku 2, i oprócz tego $P(t)$ normalny. Wtedy

$$r(t) = \frac{\mu_{\dot p}}{2\pi\mu_p} \exp\left[-\frac{(N-\bar p)^2}{2\mu^2{}_p}\right]. \tag{3.15}$$

Wzór (3.15) wynika natychmiast ze wzoru (3.13), gdzie podstawiono $N(t) \equiv N = \text{const}$ i zgadza się ze wzorem Rice'a (1.1) dla $\bar{p} = 0$ uwzględniwszy, że dla procesów gaussowskich $\mu_{\dot{p}} = -\left.\frac{d^2K(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}$.

Przypadki szczególne uwzględnione we wniosku 2 i 3 zostały uzyskane wcześniej, drogą bezpośredniego zastosowania zagadnienia o przewyższaniu przez funkcję losową stałego poziomu [6].

4. Wnioski

Fundamentalne prawo probabilistycznej teorii niezawodności wyraża prawdopodobieństwo przetrwania konstrukcji jako funkcję okresu eksploatacji

$$\mathscr{P}(T) = \exp\left[-\int_0^T r(t)dt\right]. \tag{3.16}$$

Oznaczając przewidywany okres eksploatacji przez T^* i przyjmując z góry, że prawdopodobieństwo przetrwania konstrukcji w okresie T^* jest bliskie jedynki i równe $1-\omega$ otrzymujemy zgodnie z (3.16)

$$\mathscr{P}(T^*) = \exp\left[-\int_0^{T^*} r(t)dt\right],$$

czyli

$$1-\omega = \exp\left[-\int_0^{T^*} r(t)dt\right].$$

Oznaczając przez $R(t)$ funkcję pierwotną do $r(t)$ otrzymujemy

$$1-\omega = \exp[R(0)-R(T^*)],$$

czyli mamy w postaci uwikłanej

$$R(T^*) = R(0)-\ln(1-\omega). \tag{3.17}$$

Znając ryzyko, możemy więc wyciągnąć prognozę na temat przewidywanego okresu eksploatacji z prawdopodobieństwem $1-\omega$; T^* może służyć za miarę bezpieczeństwa konstrukcji obok innych miar zdefiniowanych w probabilistycznej teorii bezpieczeństwa [5].

Literatura cytowana w tekście

1. W. W. Bołotin, *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Warszawa 1968.
2. E. Fidelis i in., *Matematyczne podstawy oceny niezawodności*, Warszawa 1966.
3. B. W. Gniedenko, *Metody matematyczne w teorii niezawodności*, Warszawa 1968.
4. E. J. Gumbel, *Statistics of Extremes*, Columbia University Press., New York 1962.
5. J. Murzewski, *Wprowadzenie do teorii bezpieczeństwa konstrukcji*, PWN, Warszawa 1963.
6. J. Murzewski, M. Makowski, *Wytężenie ośrodka mikroniejednorodnego przy stacjonarnym procesie naprężeń*, Archiwum Inżynierii Lądowej, t. XV, z. 1-2 (1969).

7. S. O. RICE, *Mathematical Analysis of Random Noise*, BSTJ.
8. SMIRNOW, DUNIN BARKOWSKI, *Krótki kurs statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1966.
9. A. A. SWIESZNIKOW, *Podstawowe metody funkcji losowych*, Warszawa 1966.

Резюме

ЗАВИСИМОСТЬ ВОЗМОЖНОСТИ АВАРИИ ОТ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА НАГРУЗКИ

В настоящей работе выводится [6] формула, определяющая возможность аварии, при предположении изменяющейся во времени несущей способности и воздействия случайных нагрузок на конструкцию.

Используя задачу о превышении случайной функцией некоторого уровня, обусловивается возможность аварии от нагрузки, ее скорости и от несущей способности.

Доказывается, что в частном случае, стационарного процесса нагрузки и постоянной несущей способности возможность аварии не зависит от времени.

Summary

DEPENDENCE OF THE RISK OF FAILURE ON LOADING PROCESS PARAMETERS

The formula [6] for the risk of failure is derived under assumptions that the load carrying capacity is variable in time and the loads acting on the structure are random. The problem of surpassing of a certain level by the random function is applied and the risk of failure is formulated in terms of the loads, the load rates and the carrying capacity. It has been demonstrated that in the particular case of a stationary load process and a constant carrying capacity the risk of failure is independent of time.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 grudnia 1968 r.