

## CIECZE NIENEWTONOWSKIE W ŚWIETLE MECHANIKI KONTINUUM

STEFAN ZAHORSKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Zainteresowanie cieczami nienewtonowskimi, których własności mechaniczne odbiegają istotnie od cieczy klasycznych, wzrasta ostatnio znacznie z uwagi na rozwój przemysłu tworzyw sztucznych, przemysłu papierniczego i spożywczego, przemysłu paliw płynnych i smarów itp. Prowadzenie i właściwe ukierunkowanie badań doświadczalnych wymaga znajomości odpowiedniej teorii pozwalającej opisać i objaśnić liczne zjawiska obserwowane w cieczach nieklasycznych. Do chwili obecnej powstała już obszerna literatura teoretyczna i doświadczalna ujmująca zagadnienie w sposób mniej lub bardziej racjonalny i efektywny (por. [1, 2, 3, 4, 5, 6]).

Niniejszy przegląd stawia sobie za cel zaznajomienie z najważniejszymi zagadnieniami teorii i wynikami doświadczeń w ujęciu mechaniki kontinuum. Sposób przedstawienia obliczony jest na czytelnika zaznajomionego z podstawami mechaniki kontinuum, lecz nie będącego specjalistą w dziedzinie cieczy nienewtonowskich. Innymi słowy, jest to wyspecjalizowany przegląd dla zainteresowanych niespecjalistów.

Należy również podkreślić, że przegląd ten nie pretenduje do zbyt wielkiej ogólności i reprezentatywności; częściowy wybór literatury dokonany został w celu jak najlepszego i najpełniejszego, w opinii autora, zilustrowania pewnych zjawisk i sposobów ich wyjaśnienia. Z uwagi na obszerność przedmiotu, celowo pominięto takie zagadnienia, jak struktura cieczy, termodynamika, dyfuzja, przepływy zaburzone itp. Nie omówiono także licznych modeli cieczy badanych metodami mechaniki kontinuum, jak ciecze anizotropowe, ciekłe kryształy, podciecze itp., odsyłając zainteresowanego czytelnika do monografii [1]. Szeroko rozwinięta klasyczna teoria liniowych ośrodków lepkosprężystych również znalazła się poza przeglądem (por. [7, 8]).

W niniejszej pracy, po rozważeniu ograniczeń teorii klasycznych, rozwinięto teorię nieściśliwych cieczy prostych obejmującą, w pewnym sensie, większość starszych teorii cieczy nienewtonowskich. Omówiono klasę tzw. przepływów wiskometrycznych o dużym znaczeniu laboratoryjnym i praktycznym, zwracając szczególną uwagę na efekty naprężeń normalnych. Niektóre typy przepływów przedstawiono krótko dla uproszczonych modeli cieczy. Dokonano ogólnej klasyfikacji równań konstytutywnych cieczy związanych bezpośrednio lub pośrednio z nieściśliwymi cieczami prostymi. Trochę więcej miejsca po-

święcono cieczom drugiego stopnia i tzw. cieczom z konwekcyjną sprężystością. Na zakończenie przedyskutowano krótko zagadnienia stateczności, zwłaszcza dla płaskich ustalonych przepływów ścinających.

## 2. Ograniczenia teorii cieczy newtonowskich

Klasyczne równania konstytutywne cieczy lepkich, wyrażające *prawo Newtona-Cauchy-Poissona*

$$(2.1) \quad \mathbf{T} = -(p + \lambda \operatorname{tr} \mathbf{D}) \mathbf{1} + 2\eta_0 \mathbf{D},$$

gdzie  $\mathbf{T}$  jest symetrycznym tensorem naprężenia w sensie Cauchy,  $\mathbf{D}$  — tensorem prędkości deformacji, tj. symetryczną częścią gradientu pola prędkości,  $\mathbf{1}$  — tensorem jednostkowym, zaś  $\lambda$ ,  $\eta_0$  — stałymi cieczy charakteryzującymi odpowiednio ściśliwość i lepkość newtonowską<sup>1)</sup>, przybierają w przypadku cieczy nieściśliwych szczególnie prostą postać

$$(2.2) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + 2\eta_0 \mathbf{D}, \quad \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0.$$

Zależności powyższe po wstawieniu do dynamicznych równań równowagi prowadzą do równań Naviera–Stokesa powszechnie stosowanych w klasycznej hydrodynamice. Stąd też często, w literaturze przedmiotu, zależności (2.2) nazywają się zależnościami opisującymi ciecz Naviera–Stokesa (por. [2]).

Z rozwiązania równań Naviera–Stokesa dla ustalonego przepływu Poiseuille'a otrzymuje się znane *prawo Hagen-Poiseuille'a*

$$(2.3) \quad Q = \frac{\pi R^4 f}{8\eta_0},$$

wyrażające liniowy związek między wydatkiem cieczy na jednostkę czasu  $Q$  i gęstością siły inicjującej  $f$  (gradientem ciśnienia w kierunku przepływu). Wydatek cieczy jest wprost proporcjonalny do czwartej potęgi promienia rury, natomiast odwrotnie proporcjonalny do lepkości  $\eta_0$ . Podobnie ma się sprawa dla ustalonego przepływu Couette'a, dla którego proporcjonalność momentu  $M$  określonego na jednostkę wysokości do prędkości kątowej  $\Omega$  z jaką obraca się jeden z cylindrów, wyraża się wzorem następującym:

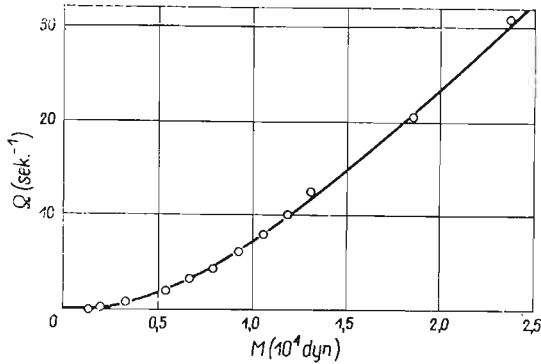
$$(2.4) \quad M = \frac{4\pi\eta_0 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega,$$

przy czym  $R_2$  i  $R_1$  oznaczają odpowiednio promień zewnętrzny i wewnętrzny wiskozyometru. Z doświadczeń wynika, że dla wielu realnych cieczy (zwłaszcza tych o niskim ciężarze cząsteczkowym) spełnione są zarówno zależności (2.2), jak i (2.3), (2.4).

Istnieje wiele praktycznie nieściśliwych cieczy o znaczeniu technicznym i laboratoryjnym, których zachowanie nie daje się opisać równaniami (2.2). Należą do nich roztwory i stopione

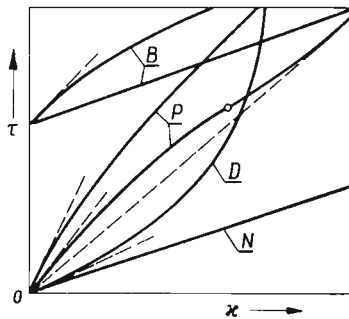
<sup>1)</sup> Notacja używana w pracy została w znacznej mierze zaczerpnięta z monografii [1, 2], gdzie można znaleźć szczegółowe definicje wprowadzonych wielkości i symboli. Wektory i tensory oznaczono odpowiednio półgrubymi małymi i dużymi literami. Tensory należy rozumieć jako liniowe transformacje przyporządkowujące każdemu wektorowi drugi wektor;  $\operatorname{tr} \mathbf{T}$  oznacza operację śladu przyporządkowującą tensorowi liczbę, podobnie  $\det \mathbf{T}$  jest wyznacznikiem tensora, a  $\mathbf{T}^T$  — tensorem transponowanym. Funkcjonały konstytutywne oznaczono literami gotyckimi, zaś funkcje i stałe materiałowe — literami greckimi.

polimery, roztwory mydła i celulozy, roztwory biologiczne, różne koloidy, itp., a także farby, smoły, asfalty, kleje i inne, których «ciekły» charakter nie ulega najmniejszej wątpliwości. Badania doświadczalne wykazały, że odpowiednie funkcje  $Q(f)$  lub  $M(\xi_2)$  są dla tych cieczy wyraźnie nieliniowe (por. rys. 1). Okazało się, że dla szerokiej klasy cieczy nienewtonowskich funkcje typu  $Q(f)$  i  $M(\xi_2)$  mogą być obliczone na podstawie znajomości funkcji lepkości  $\eta(\kappa)$  zależnej wyłącznie od gradientu ścinania  $\kappa$  (prędkości ścinania).



Rys. 1. Prędkość kątowna w zależności od momentu skręcającego w viskozymetrze Couette'a. Lateks kauczukowy (GR-S) zawierający 62,2% części stałych (I. M. Krieger i S. H. Maron, J. Appl. Phys. **25**, 1954, 72)

Różny charakter zmienności  $\eta(\kappa)$  warunkujący nieliniową zależność naprężenia ścinającego  $T$  od gradientu  $\kappa$ , posłużył w reologii do podziału ośrodków nienewtonowskich na «pseudoplastyki», «ciecze dylatancyjne» i «ośrodki Bingham'a» (por. [4, 5]). Zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 2, lepkość pseudoplastyków i roztworów polimerów maleje w porównaniu z wartością  $\eta(0)$ , często osiągając asymptotycznie stałą wartość  $\eta(\infty)$ ,



Rys. 2. Schemat podziału cieczy nienewtonowskich.  $P$  — pseudoplastyki i roztwory polimerów,  $D$  — ciecze dylatancyjne,  $B$  — ośrodki Bingham'a,  $N$  — ciecze nienewtonowskie

podczas gdy dla cieczy dylatancyjnych odpowiednia lepkość wzrasta wraz ze wzrostem gradientu ścinania. Dla plastycznych ośrodków Bingham'a proces płynięcia rozpoczyna się w momencie kiedy naprężenie  $T$  osiąga pewną wartość krytyczną.

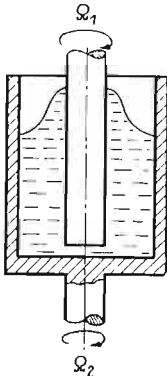
Zjawiska polegające na zmniejszaniu się lub wzroście naprężenia stycznego w zależności od okresu czasu, w którym realizowany jest proces ścinania, stanowią podstawę podziału

cieczy nienewtonowskich na *tiksotropowe* i *reopeksyjne* (por. [3, 4]). Wiedzano od dawna, że niektóre farby dają się łatwiej mieszać w miarę upływu czasu mieszania oraz że drobnoziarnisty piasek nasycony wodą odkształca się nieznacznie pod wpływem szybkich i krótkotrwałych obciążeń, w przeciwieństwie do obciążeń długotrwałych. Należy jednak podkreślić, że pojęcia tiksotropii i reopeksji wydają się dość sztuczne i w gruncie rzeczy zbędne dla wystarczająco ogólnych — zależnych od historii procesu — równań konstytutywnych cieczy prostych (por. [1]). Wprowadzenie tych pojęć do opisu zjawisk makroskopowych wynikało raczej z niedoskonałości stosowanych modeli, co nie oznacza, że na gruncie opisu mikroskopowego ośrodków wielofazowych nie posiadają one określonego znaczenia.

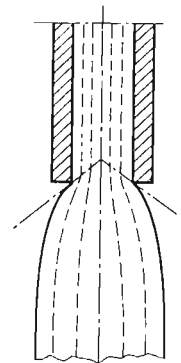
Innym zjawiskiem, istotnie odróżniającym ciecze nienewtonowskie od klasycznych cieczy lepkich, jest występowanie określonych naprężeń normalnych, podobnie do efektu Poyntinga w ciałach stałych. Z rozważenia różnicy naprężeń normalnych w kierunku promieniowym dla ustalonego przepływu Couette'a cieczy newtonowskiej wynika, że

$$(2.5) \quad \Delta T^{(rr)} = T^{(rr)}(R_2) - T^{(rr)}(R_1) = - \int_{R_1}^{R_2} \rho r [\omega(r)]^2 dr < 0,$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością cieczy, zaś  $\omega(r)$  — prędkością kątową w odległości  $r$  od osi cylindrów. Ponieważ naciski na ścianki są równe odpowiednim naprężeniom wziętym ze znakiem przeciwnym, nacisk na ściankę zewnętrzną —  $T^{(rr)}(R_2)$  jest większy od nacisku na ściankę wewnętrzną —  $T^{(rr)}(R_1)$ . Powierzchnia swobodna cieczy przybiera wówczas charaktery-



Rys. 3. Podnoszenie się cieczy na powierzchni wewnętrznego walca w przepływie Couette'a



Rys. 4. Zwiększanie się średnicy swobodnej strugi cieczy wypływającej z kapilary

styczny kształt paraboloidy obrotowej. Doświadczenia wykazują jednak, że dla takich cieczy nienewtonowskich, jak np. roztwory polimerów, obserwuje się zjawisko odwrotne, tj. występowanie większych nacisków na ściankę wewnętrzną, oraz że faktu tego nie można wytłumaczyć tylko przez właściwy dobór funkcji lepkości  $\eta(\dot{\gamma})$ ; potrzebne są inne funkcje zależne od bardziej złożonego modelu cieczy.

Często obserwowano «wpełzanie» farb na wewnętrzne mieszadło oraz znaczne zwiększenie średnicy swobodnej strugi cieczy wypływającej z kapilary (nazywane w języku angielskim *die swell*), lecz nie wiązano tego z efektami naprężeń normalnych (por. rys. 3, 4). Systematyczne studia tych zjawisk oraz próby ich teoretycznego wyjaśnienia datują się od czasu ostatniej wojny. Zostały one zapoczątkowane w W. Brytanii badaniami GARNERA,

NISSANA, WOODA, WEISSEBERGA i innych (por. [9, 10, 11]). Zwłaszcza doświadczalne i teoretyczne prace WEISSEBERGA i jego szkoły przedstawione na Międzynarodowym Kongresie Reologii w roku 1948 (por. [12]), zwróciły powszechną uwagę na efekt naprężeń normalnych zwany często w literaturze *efektem Weissenberga*. Wspomniane już zjawisko zwiększenia średnicy strugi cieczy nazywane jest często *efektem Barusa* [13] lub *efektem Merringtona* [14]; odgrywa ono istotną rolę w procesie formowania włókien sztucznych (por. [15]). Istnieją liczne próby wyjaśnienia wspomnianych zjawisk poprzez wpływ historii przepływu, wpływ *sprężystych* własności cieczy itp. (por. np. [2, 3]); próbę teoretycznego jakościowego opisu w oparciu o ogólną teorię cieczy prostych COLEMANA i NOLLA omówimy w jednym z następných punktów.

Przy rozważaniu momentów ograniczających stosowalność klasycznej teorii Naviera-Stokesa, należy zwrócić uwagę na zjawiska relaksacji naprężeń i nawrotu sprężystego obserwowane często w cieczach nienewtonowskich. Posłużyły one za podstawę podziału cieczy nieklasycznych na *ciecze lepkie* lub *ciecze niesprężyste (inelastic)* z jednej strony, a *ciecze lepkosprężyste* lub *ciecze sprężyste* z drugiej strony (por. [3]). Należy jednak podkreślić, że terminy te nie są zawsze jednoznaczne i powodują dużo nieporozumień. Niektórzy autorzy, na przykład, wiążą pojęcie *sprężystości* cieczy z efektami naprężeń normalnych, inni natomiast za decydujący moment uważają istnienie historii deformacji lub przepływu. Trzeba również pamiętać, że niektóre teorie cieczy *sprężystych*, będące formalnym przeniesieniem sprężystych własności ciał stałych na ciecze, w których nie istnieje określona konfiguracja odniesienia — stan naturalny (por. p. 3), są błędne z teoretycznego punktu widzenia (por. uwagi w monografii [1]).

Większość efektów różniących istotnie ciecze nienewtonowskie od klasycznych odkrywano przede wszystkim w trakcie badań doświadczalnych. Zasadniczą przeszkodą na drodze zbudowania wystarczająco ogólnych równań konstytutywnych był fakt, że w określonych typach przepływów, zwłaszcza realizowanych w różnego rodzaju wiskozymetrach, ujawniały się tylko niektóre własności cieczy. Na przykład, w przepływach ustalonych rola historii deformacji jest istotnie ograniczona, zaś w ustalonym przepływie między nieruchomymi koncentrycznymi walcami nie można rozróżnić ogólnej cieczy prostej od czysto lepkiej cieczy typu Reintera–Rivlina (por. p. 5.4) itp.

W ciągu ostatnich kilkunastu lat włożono dużo pracy w rozwój różnych koncepcji cieczy nieklasycznych; doprowadziła ona do teorii nieściśliwych cieczy prostych Coleman–Nolla (por. [1, 2]) zapoczątkowanej fundamentalną pracą NOLLA z roku 1958 [16]<sup>1)</sup>. Zasadnicze założenia tej teorii, niektóre wyniki teoretyczne oraz próby ich weryfikacji doświadczalnej będą stanowić treść kilku kolejnych punktów w pierwszej części niniejszego przeglądu.

### 3. Nieściśliwe ciecze proste

Przechodząc do krótkiego omówienia teorii nieściśliwych cieczy prostych<sup>2)</sup> należy zastanowić się nad ogólną definicją cieczy. Zgodnie z określeniem OLDROYDA [18] i LODGE'A [3] *cieczą nazywamy ośrodek, dla którego naprężenia zawsze osiągną stan równowagi odpo-*

<sup>1)</sup> Znacznie mniej rozwiniętą teorię ściśliwych cieczy prostych można znaleźć w pracy [17].

<sup>2)</sup> Teoria Coleman–Nolla dotyczy w gruncie rzeczy nieściśliwych płynów prostych. Z uwagi na ograniczenie nałożone w tytule niniejszego przeglądu pozostaniemy przy polskim terminie: ciecz prosta.

wiadający obciążeniu izotropowemu lub zerowemu, o ile ośrodek pozostaje w stałym kształcie. Pociąga to za sobą stwierdzenie, że ciecze w stanie spoczynku nie może przenosić naprężeń ścinających.

W założeniu, że  $\mathbf{x}$  oznacza położenie w przestrzeni euklidesowej punktu materialnego  $X$  w aktualnym czasie  $t$ , zaś  $\xi$  jest położeniem tego samego punktu materialnego w dowolnej chwili  $\tau (\tau \leq t)$ , ruch można zapisać w postaci

$$(3.1) \quad \xi = \chi_t(\mathbf{x}, \tau), \quad -\infty < \tau \leq t,$$

w której  $\chi_t$  oznacza funkcję względnej deformacji. Gradient względnej deformacji

$$(3.2) \quad \mathbf{F}_t(\tau) = \nabla_{\mathbf{x}} \chi_t(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{F}_t(t) = \mathbf{1},$$

opisuje zmianę lokalnej konfiguracji  $X$  między czasem  $\tau$  i  $t$ . Funkcję tensorową

$$(3.3) \quad \mathbf{F}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_t(t-s) \quad \text{dla} \quad \infty > s \geq 0,$$

nazywamy historią względnego gradientu deformacji. Jeśli mamy dane pole prędkości  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , to biorąc pod uwagę, że

$$(3.4) \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{d}{d\tau} \chi_t(\mathbf{x}, \tau) \right|_{\tau=t},$$

można określić funkcję względnej deformacji z rozwiązania równań:

$$(3.5) \quad \dot{\xi}(\tau) = \mathbf{v}(\xi(\tau), \tau), \quad \xi(t) = \mathbf{x},$$

gdzie kropką oznaczono różniczkowanie po czasie  $\tau$ .

Po tych wstępnych definicjach wielkości kinematycznych zapisujemy równania konstytutywne cieczei prostej w postaci następującej (por. [1, 2]):

$$(3.6) \quad \mathbf{T}(t) + p\mathbf{1} = \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}(s)), \quad \det \mathbf{F}(s) = \mathbf{1},$$

przy czym  $p$  jest ciśnieniem hydrostatycznym, zaś  $\int_{s=0}^{\infty}$  oznacza funkcjonal konstytutywny, którego argumentem jest cała przeszła historia deformacji. Równania (3.6) wyrażają fakt, że nieściśliwe ciecze proste to klasa ośrodków, dla których tensor naprężenia jest określony, z dokładnością do ciśnienia hydrostatycznego, przez historię względnego gradientu deformacji, oraz że dopuszczalne są jedynie przepływy izochoryczne. Oczywiście funkcjonal  $\int_{s=0}^{\infty}$  jest inny dla każdego przypadku cieczy prostej specyfikując w ten sposób jej mechaniczne zachowanie się<sup>1)</sup>.

W szczególnym przypadku cieczy newtonowskiej mamy

$$(3.7) \quad \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}(s)) = -\eta_0 \left. \frac{d}{ds} (\mathbf{F}(s) + \mathbf{F}(s)^T) \right|_{s=0}.$$

Występującą w równaniach (3.6) niejednoznaczność funkcjonału konstytutywnego (wobec nieokreślonego ciśnienia  $p$ ) usuwamy przez założenie

$$(3.8) \quad \text{tr} \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}(s)) = 0, \quad p = -\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T}.$$

<sup>1)</sup> Uogólnienie równań konstytutywnych cieczy prostych na inne niemechaniczne efekty jest całkowicie możliwe. Termodynamika ośrodków prostych została zaproponowana przez Colemaną [19] (por. także [1]).

Dalsze informacje dotyczące własności funkcjonału konstytutywnego wynikają z żądania spełnienia znanej ogólnej zasady mechaniki kontinuum nazywanej *zasadą materialnej obiektywności* (por. np. [1]). W myśl tej zasady wszystkie równania konstytutywne muszą być niezmiennicze względem zmian układu odniesienia w przestrzeni euklidesowej – wyrażonych zależnością (por. [16])

$$(3.9) \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)[\mathbf{x} - \mathbf{q}],$$

w której  $\mathbf{q}$  jest niezależne od czasu, zaś  $\mathbf{Q}(t)$  oznacza dowolny zależny od czasu tensor ortogonalny, tj.  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$ . Zasada materialnej obiektywności wyraża niezależność własności ośrodka od ruchu «obserwatora» w przestrzeni; co jest zresztą w zgodzie z czysto intuicyjnym odczuciem.

Stosując powyższą zasadę do równań (3.6) otrzymamy, że (por. [2])

$$(3.10) \quad \mathbf{R}(0) \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}(s)) \mathbf{R}(0)^T = \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{R}(s) \mathbf{F}(s) \mathbf{R}(0)^T),$$

dla każdej ciągłej funkcji  $\mathbf{R}(s)$ , której wartości są tensorami ortogonalnymi i dla każdej historii  $\mathbf{F}(s)$ . Innymi słowy, warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, żeby funkcjonał definiował ciecz prostą jest spełnienie zależności (3.10).

Łatwo zauważyć, że wprowadzona definicja cieczy prostej jest zgodna z definicją cieczy przytoczoną na początku niniejszego punktu. Na podstawie (3.10) można udowodnić (por. [2]), że zarówno dla cieczy prostej pozostającej cały czas w spoczynku, tj.  $\mathbf{F}(s) = \mathbf{1}(s) = \mathbf{1}$ , jak i dla poruszającej się ruchem sztywnym, tj.  $\mathbf{F}(s)\mathbf{F}(s)^T = \mathbf{1}$ , naprężenie jest ciśnieniem hydrostatycznym, mianowicie

$$(3.11) \quad \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{1}(s)) = 0, \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1}.$$

Zasady materialnej obiektywności nie należy mylić z zagadnieniem niezmienniczości równań konstytutywnych względem zmiany odpowiedniej konfiguracji odniesienia zgodnie z wewnętrzną symetrią ośrodka. Równanie konstytutywne dowolnego ośrodka prostego, mianowicie

$$(3.12) \quad \mathbf{T} = \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}_{\mathbf{x}}(s)), \quad \mathbf{F}_{\mathbf{x}}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_{\mathbf{x}}(t-s), \quad \infty > s \geq 0,$$

gdzie  $\mathbf{F}_{\mathbf{x}}(\tau)$  jest gradientem deformacji względem dowolnej konfiguracji odniesienia  $\mathbf{x}$  (nie będącej konfiguracją w chwili aktualnej), muszą być niezmiennicze względem odpowiedniej grupy izotropii  $\mathcal{G}$  (por. [1]). Przez *grupę izotropii  $\mathcal{G}$  względem konfiguracji  $\mathbf{x}$*  rozumie się zbiór wszystkich takich unimodularnych transformacji  $\mathbf{H} \in \mathcal{U}$ , że

$$(3.13) \quad \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}_{\mathbf{x}}(s)) = \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}_{\mathbf{x}}(s)\mathbf{H}).$$

Jeśli grupa izotropii ośrodka dla dowolnej konfiguracji odniesienia jest podgrupą grupy unimodularnej, wówczas mamy proste ciało stałe; jeśli jest równa grupie unimodularnej otrzymujemy nową definicję cieczy prostej. W szczególnym przypadku, gdy grupa jest grupą ortogonalną otrzymamy izotropowe proste ciało stałe. Rozumowanie powyższe pozwala nie tylko uściślić w sensie matematycznym definicję cieczy prostej i wykazać jej

zgodność z (3.6), ale prowadzi również do wniosku, że *każda ciecz prosta jest izotropowa*, tzn., że jej własności są jednakowe we wszystkich kierunkach i dla każdego kształtu<sup>1)</sup>.

Przy rozważaniach ogólnych, zwłaszcza przepływów wiskometrycznych (por. p. 4), nie są potrzebne żadne dodatkowe ograniczenia ani na postać funkcjonału konstytutywnego (3.6), ani też na historię gradientu ścinania. Aby umożliwić jednak różne aproksymacje oraz zrozumieć właściwie rolę cieczy klasycznych i ich najprostszych uogólnień na tle teorii cieczy prostych, konieczne jest wprowadzenie *zasady zanikającej pamięci* (por. [21]). Zasada ta w języku matematycznym wyraża fakt, że daleka przeszłość historii deformacji ma znacznie mniejszy wpływ na aktualne naprężenia, niż historia ostatnia; wymaga to nałożenia pewnych ograniczeń na dziedzinę funkcjonału  $\int_{s=0}^{\infty}$  i sam funkcjonal (por. [1]).

W przestrzeni wektorowej historii deformacji

$$(3.14) \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s) - \mathbf{1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}(s)^T \mathbf{F}(s) - \mathbf{1}, \quad |\mathbf{G}(s)| = (\text{tr} \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{1/2},$$

rozważmy następującą normę:

$$(3.15) \quad \|\mathbf{G}(s)\|_h = \left( \int_0^{\infty} [h(s)|\mathbf{G}(s)|]^2 ds \right)^{1/2},$$

przy czym  $h(s)$  jest dodatnio określoną funkcją wpływu zdefiniowaną w przedziale  $0 \leq s < \infty$ , znormalizowaną, tj.  $h(0) = 1$ , oraz dążącą do zera tak, że  $\lim_{s \rightarrow \infty} s^r h(s) = 0$  monotonicznie dla dużych  $s$ . Przestrzeń historii deformacji  $\mathbf{G}(s)$  z tak określoną normą jest przestrzenią Hilberta, tzn.  $\mathbf{G}(s) \in \mathcal{H}$ .

Spełniona jest *zasada zanikającej pamięci w sensie słabym*, jeśli istnieje funkcja wpływu rzędu  $r > 1/2$  oraz funkcjonal konstytutywny  $\int_{s=0}^{\infty}$  jest zdefiniowany i ciągły w otoczeniu  $\mathbf{o}$  przestrzeni  $\mathcal{H}$ .

Spełniona jest *zasada zanikającej pamięci w sensie mocnym*, jeśli istnieje funkcja wpływu rzędu  $r > 1/2 + n$  oraz funkcjonal  $\int_{s=0}^{\infty}$  jest zdefiniowany i posiada  $n$ -krotną pochodną Frécheta w otoczeniu  $\mathbf{o}$  przestrzeni  $\mathcal{H}$ .

Tak określoną zasadę zanikającej pamięci wykorzystuje się przy wyprowadzaniu niektórych aproksymacji przedyskutowanych w p. 8.

#### 4. Przepływy wiskometryczne

Istnieje szeroka klasa przepływów zwanych przepływami wiskometrycznymi (z uwagi na ich znaczenie doświadczalne i realizację w różnego typu wiskozymetrach), dla której teoria cieczy prostych prowadzi do szczególnie cennych wyników. Zagadnieniom przepływów wiskometrycznych poświęcona jest obszerna literatura zebrana w znacznej części w specjalnej monografii COLEMANA, MARKOVITZA i NOLLA [2] zawierającej 370 pozycji

<sup>1)</sup> Istnieją ośrodki, dla których grupy izotropii nie są równe grupie unimodularnej i nie zawierają w sobie grupy ortogonalnej. Przykładem służą tzw. proste podciecze (*simple subfluids*), których teoria została rozwinięta przez Wanga [20].



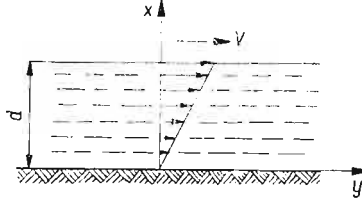
bibliograficznych. Do niej odsyłamy czytelników zainteresowanych w głębszym poznaniu tych zagadnień (por. także [1]).

Rozważmy najprostszy przepływ ścinający, dla którego w kartezjańskim układzie odniesienia (rys. 5) współrzędne fizyczne prędkości są następujące:

$$(4.1) \quad v^{(x)} = 0, \quad v^{(y)} = \kappa x, \quad v^{(z)} = 0.$$

Całkując równania (3.5) otrzymamy

$$(4.2) \quad \xi(\tau) = x, \quad \eta(\tau) = y + \kappa x(\tau - t), \quad \xi(\tau) = z,$$



Rys. 5. Prosty przepływ ścinający

a zatem historię względnego gradientu deformacji można zapisać w postaci

$$(4.3) \quad \mathbf{F}(s) = \mathbf{1} - s\mathbf{M}, \quad [\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie  $\mathbf{M}$  jest stałym tensorem. Podstawiając (4.3) do (3.6)<sub>1</sub> i (3.10), w założeniu, że  $\mathbf{R}(s) = \mathbf{Q}$  i  $\mathbf{Q}$  jest niezależne od  $s$ , otrzymamy

$$(4.4) \quad \mathbf{T} + p\mathbf{1} = \mathfrak{h}(\mathbf{M}), \quad \mathbf{Q}\mathfrak{h}(\mathbf{M})\mathbf{Q}^T = \mathfrak{h}(\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T)$$

dla wszystkich ortogonalnych  $\mathbf{Q}$ .

Jeśli w dowolnej chwili czasu i dla dowolnego punktu materialnego historia względnego gradientu deformacji przybiera postać (4.3) w pewnej ortogonalnej bazie  $\mathbf{g}^{(i)}$ , można bez trudu dowieść, że macierz tensora naprężenia musi być następująca (por. np. [2]):

$$(4.5) \quad [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T^{(11)} & T^{(12)} & 0 \\ T^{(12)} & T^{(22)} & 0 \\ 0 & 0 & T^{(33)} \end{bmatrix},$$

przy czym współrzędne macierzy zależą wyłącznie od  $\kappa$ . Wprowadzając następujące funkcje wiskometryczne

$$(4.6) \quad T^{(12)} = \tau(\kappa), \quad T^{(11)} - T^{(33)} = \sigma_1(\kappa), \quad T^{(22)} - T^{(33)} = \sigma_2(\kappa),$$

łatwo jest stwierdzić, że określają one całkowicie własności cieczy dla rozważanego typu przepływu. Funkcję  $\tau(\kappa)$  nazwano *funkcją naprężenia ścinającego*, zaś funkcje  $\sigma_1(\kappa)$  i  $\sigma_2(\kappa)$  *funkcjami naprężeń normalnych* (por. [1, 2]).

Można w dalszym ciągu dowieść, że funkcje wiskometryczne nie zależą od wyboru bazy  $\mathbf{g}^{(i)}$  oraz, że spełniają zależności (por. [1, 2]).

$$(4.7) \quad \tau(-\kappa) = -\tau(\kappa), \quad \sigma_1(-\kappa) = \sigma_1(\kappa), \quad \sigma_2(-\kappa) = \sigma_2(\kappa),$$

$$(4.8) \quad \tau(0) = \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0.$$

Naturalne jest założenie, że kierunek przepływu powinien być zgodny z kierunkiem działania obciążeń ścinających, wówczas<sup>1)</sup>

$$(4.9) \quad \kappa \tau(\kappa) > 0 \quad \text{dla} \quad \kappa \neq 0.$$

Zamiast funkcji  $\tau(\kappa)$  stosuje się często wspomnianą już funkcję lepkości zdefiniowaną następująco:

$$(4.10) \quad \eta(\kappa) = \frac{1}{\kappa} \tau(\kappa), \quad \eta_0 = \eta(0) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \eta(\kappa) = \tau'(0).$$

Z (4.9) wynika, że nie tylko  $\eta(\kappa) > 0$ , ale również  $\tau'(0) > 0$ ; można zatem wprowadzić funkcję odwrotną  $\lambda$

$$(4.11) \quad \kappa = \lambda(S), \quad S = \tau(\kappa),$$

nazywaną *funkcją prędkości ścinania*.

Dotychczasową analizę można rozszerzyć (por. [2]) na przypadki zmiennej macierzy  $[\mathbf{M}]$ , tj. na przypadki, w których  $\kappa$  i baza  $\mathbf{g}^{(i)}$  zależą od czasu  $t$  i położenia  $\mathbf{x}$  zajmowanego przez punkt materialny w czasie  $t$ . Dopuszczalne są także historie względnego gradientu deformacji różniące się od (4.3), o zależną od czasu zmianę układu odniesienia. Podamy zatem następującą definicję przepływu wiskometrycznego [2]:

*Przepływ nazywamy przepływem wiskometrycznym, jeśli historia względnego gradientu deformacji, dla każdego  $\mathbf{x}$  i  $t$  przybiera postać*

$$(4.12) \quad \mathbf{F}(s) = \mathbf{R}(s)(\mathbf{1} - s\mathbf{M}),$$

przy czym macierz tensora  $\mathbf{M}$  w bazie  $\mathbf{g}^{(i)}$  ma postać (4.3)<sub>2</sub>, zaś  $\mathbf{R}(s)$  jest tensorem ortogonalnym dla każdego  $s$  i  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{1}$ .

Ważną klasę przepływów wiskometrycznych stanowią tzw. *przepływy krzywolinearne* (curvilinear); dla których w dowolnym ortogonalnym układzie współrzędnych  $(x^1, x^2, x^3)$  pole prędkości wyraża się w postaci

$$(4.13) \quad v^1 = 0, \quad v^2 = u(x^1), \quad v^3 = w(x^1).$$

Fizyczne składowe tensora naprężenia są następujące:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} T^{(12)} &= v\tau(\kappa), \\ T^{(13)} &= \mu\tau(\kappa), \\ T^{(23)} &= \mu\nu\sigma_2(\kappa), \\ T^{(11)} - T^{(33)} &= \sigma_1(\kappa) - \mu^2\sigma_2(\kappa), \\ T^{(22)} - T^{(33)} &= (v^2 - \mu^2)\sigma_2(\kappa), \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.15) \quad \kappa = \frac{1}{e_1} (u'^2 e_2^2 + w'^2 e_3^2)^{1/2}, \quad v = \frac{e_2}{e_1} \frac{u'}{\kappa}, \quad \mu = \frac{w'}{\kappa} \frac{e_3}{e_1},$$

zaś  $e_i$  oznaczają długości wektorów naturalnej bazy  $\mathbf{e}_i$  układu  $(x^1, x^2, x^3)$ . Tak zdefiniowana klasa przepływów reprezentuje ustalone przepływy wiskometryczne, do których

<sup>1)</sup> Coleman [22] wykazał, że nierówność (4.9), dopuszczająca także znak równości, wynika z rozważań termodynamicznych.

zalicza się większość przepływów spotykanych w wiskozymetrach oraz niektóre przepływy o znaczeniu technicznym i przemysłowym.

Warto jeszcze podkreślić, że nie każdy przepływ ustalony jest przepływem wiskometrycznym, w którym własności cieczy łącznie z efektami naprężeń normalnych opisane są przez trzy funkcje materiałowe:  $\tau(\kappa)$  (lub  $\eta(\kappa)$ ),  $\sigma_1(\kappa)$ ,  $\sigma_2(\kappa)$ . Na przykład, proste rozciąganie strugi cieczy, opisujące w przybliżeniu część procesu formowania włókien sztucznych, nie jest przepływem wiskometrycznym (por. p. 7.2).

### 5. Szczególne przypadki przepływów wiskometrycznych

Z najważniejszych ustalonych przepływów wiskometrycznych należy wymienić:

a) *plaski przepływ Poiseuille'a*, dla którego w układzie współrzędnych kartezjańskich

$$(5.1) \quad v^x = 0, \quad v^y = v(x), \quad v^z = 0;$$

b) *przepływy helikoidalne*, dla których w walcowym układzie współrzędnych

$$(5.2) \quad v^r = 0, \quad v^\theta = \omega(r), \quad v^z = u(r),$$

i do których zaliczamy w szczególności przepływ między współosiowymi cylindrami, przepływ Couette'a, przepływ Poiseuille'a i przepływ między nieruchomymi współosiowymi cylindrami;

c) *przepływ między obracającymi się płytą i stożkiem*, dla którego w kulistym układzie współrzędnych

$$(5.3) \quad v^r = 0, \quad v^\theta = 0, \quad v^\varphi = \omega(\Theta);$$

d) *przepływ skręcający między wirującymi płytami*, dla którego w walcowym układzie współrzędnych

$$(5.4) \quad v^r = 0, \quad v^\theta = \omega(z), \quad v^z = 0.$$

W dalszym ciągu scharakteryzujemy niektóre z nich zwracając również uwagę na doświadczalne możliwości wyznaczenia odpowiednich funkcji wiskometrycznych (por. [2, 3]).

**5.1. Płaski przepływ Poiseuille'a.** Na podstawie (5.1) i dynamicznych równań równowagi (por. [1])

$$(5.1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}, \quad \mathbf{b} = -\operatorname{grad} \psi,$$

gdzie  $\mathbf{a}$  jest przyspieszeniem,  $\psi$  — potencjałem sił masowych, otrzymamy

$$(5.1.2) \quad \kappa = v'(x) = \lambda(-xf+b), \quad \tau(v') = -xf+b,$$

przy czym  $f$ ,  $b$  są stałymi całkowania, a funkcja  $\lambda(\ )$  została zdefiniowana przez (4.11). Uwzględnienie warunku przylegania na ściankach, tj.  $v = 0$  dla  $x = \pm d/2$ , daje następujący profil prędkości oraz wydatek cieczy na jednostkę czasu:

$$(5.1.3) \quad v(x) = \int_x^{d/2} \lambda(f\xi) d\xi, \quad Q = \frac{2}{r^2} \int_0^{d/2} S \lambda(S) dS,$$

gdzie  $f$  odgrywa rolę gradientu ciśnienia inicjującego przepływ. Zależność ostatnia może być rozwiązana względem funkcji  $\lambda$ , mianowicie

$$(5.1.4) \quad \lambda \left( \frac{df}{2} \right) = \frac{2}{fd^2} \frac{\partial}{\partial f} (f^2 Q),$$

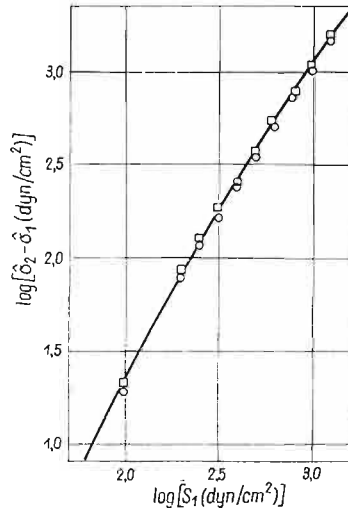
skąd, na podstawie doświadczalnej znajomości  $Q(f)$ , wylicza się funkcję naprężenia ścinającego  $\tau(z)$  lub funkcję lepkości  $\eta(z)$ .

Naprężenia dane są zależnościami (4.6) z tym, że

$$(5.1.5) \quad T^{(xy)} = -xf, \quad T^{(xx)} = \rho yf + h(t),$$

gdzie  $h(t)$  jest nieokreśloną, zależną wyłącznie od czasu, funkcją ciśnienia.

**5.2. Przepływ Couette'a.** Przepływ tego typu posiada duże znaczenie doświadczalne, toteż wielu badaczy konstruowało specjalne wiskozymetry Couette'a w celu określenia nie tylko funkcji lepkości, ale również naprężeń normalnych (por. [2]).



Rys. 6. Różnica funkcji naprężeń normalnych w specjalnym wiskozymetrze Couette'a dla 5,4% roztworu poliizobutyleny w cetanic. Oznaczenia: ○ —  $R_1 = 0,500$  cm,  $R_2 = 1,270$  cm; □ —  $R_1 = 0,500$  cm,  $R_2 = 0,743$  cm (wg [23])

Rozważenie równowagi dynamicznej przepływu prowadzi do następującej zależności między różnicą prędkości kątowych i momentem skręcającym na jednostkę wysokości:

$$(5.2.1) \quad \Delta\Omega = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \lambda \left( \frac{M}{2\pi r^2} \right) dr = \frac{1}{2} \int_{S_2}^{S_1} \frac{1}{S} \lambda(S) dS,$$

$$S_1 = \frac{M}{2\pi R_1^2}, \quad S_2 = \frac{M}{2\pi R_2^2},$$

która może być odwrócona w celu doświadczalnego pomiaru funkcji  $\Delta\Omega(M)$ , mianowicie

$$(5.2.2) \quad 2M \frac{\partial \Delta\Omega}{\partial M} = \lambda(S_1) - \lambda \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} S_1 \right).$$

Gdy różnica średnic między cylindrami zewnętrznym i wewnętrznym jest mała, korzysta się często z zależności

$$(5.2.3) \quad \Delta\Omega = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \lambda(S_1) + O\left(\frac{1}{R_1^2} (R_2 - R_1)^2\right).$$

W celu pomiaru efektów naprężeń normalnych wykorzystuje się różnicę naprężeń normalnych w kierunku promieniowym

$$(5.2.4) \quad \Delta T^{(rr)} = \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \frac{1}{r} \left[ \hat{\sigma}_2 \left( \frac{M}{2\pi r^2} \right) - \hat{\sigma}_1 \left( \frac{M}{2\pi r^2} \right) \right] - \rho r \omega(r)^2 \right\} dr,$$

gdzie oznaczono  $\hat{\sigma}_i(S) = \sigma_i[\lambda(S)]$ . Dla małej różnicy średnic otrzymamy

$$(5.2.5) \quad \Delta T^{(rr)} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} [\hat{\sigma}_2(S_1) - \hat{\sigma}_1(S_1) - \rho \Omega_1 \Omega_2 R_1^2] + O\left(\frac{1}{R_1^2} (R_2 - R_1)^2\right).$$

Z zależności (5.2.4) i (5.2.5) widać, że pomiar  $\Delta T^{(rr)}$  pozwala wyznaczyć odpowiednią różnicę funkcji viskometrycznych  $\sigma_2 - \sigma_1$ . Ponieważ człon inercjalny jest ujemny, warunkiem koniecznym do tego, żeby  $\Delta T^{(rr)}$  było dodatnie dla wszystkich  $M$  w otoczeniu zera, jest  $\sigma_2 > \sigma_1$  dla wszystkich  $\kappa$  w otoczeniu zera. Na rys. 6 pokazano przykładowo wyniki uzyskane przez MARKOVITZA [23] dla 5,4% roztworu poliizobutyleny w cecanie.

**5.3. Przepływ między stożkiem i płytą.** Różne aparaty skonstruowane na zasadzie stożka i płyty obok swych niewątpliwych zalet (np. łatwość posługiwania się, mała ilość badanej cieczy, możliwość nałożenia ruchów okresowych itp.) posiadają także liczne wady. Wynikają one z faktu, że pole prędkości (5.3) spełnia dynamiczne równania równowagi w sposób przybliżony, jeśli pominie się człony inercjalne oraz przyjmie małe kąty  $\alpha$  ( $\alpha < 4^\circ$ ) między płytą i stożkiem (por. [2]). Należy również pamiętać o zaburzeniach w pobliżu krawędzi stożka, prowadzących w efekcie do wystąpienia tzw. wtórnego przepływu (por. p. 7.1)<sup>1)</sup>.

W założeniu zwykle czynionych uproszczeń uzyskuje się następujący związek między przyłożonym momentem a różnicą prędkości kątowych:

$$(5.3.1) \quad M = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau(\kappa), \quad \kappa = \omega'(\theta) \approx \frac{\Delta\Omega}{\alpha},$$

gdzie  $R$  jest promieniem zewnętrznym urządzenia.

Zależność w postaci

$$(5.3.2) \quad \frac{\partial T^{(\theta\theta)}}{\partial \ln r} = \sigma_1(\kappa) + \sigma_2(\kappa),$$

służy zwykle do wyznaczenia sumy funkcji viskometrycznych  $\sigma_1 + \sigma_2$ . Rysunek 7 przedstawia odpowiednie jej wartości otrzymane przez MARKOVITZA i BROWNA [25] dla 6,9% roztworu poliizobutyleny w cecanie.

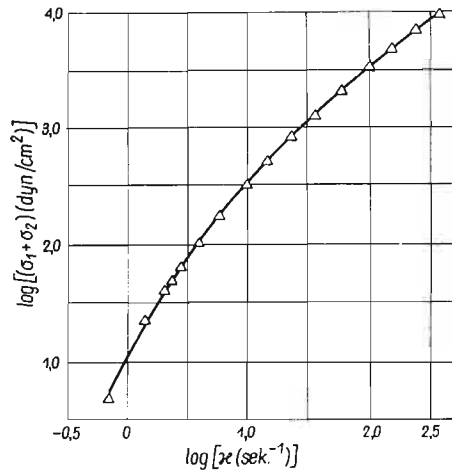
Niektórzy autorzy (np. [26]) zakładając, że powierzchnia  $r = R$  jest powierzchnią swobodną pozostającą w kontakcie z atmosferycznym ciśnieniem  $p_0$  oraz, że nie istnieją żadne

<sup>1)</sup> Szeroko stosowany w praktycznych pomiarach reogoniometr Weissenberga [24] jest zbudowany na zasadzie stożka i płyty.

efekty powierzchniowe, korzystają z następującego wyrażenia na całkowitą normalną siłę utrzymującą stożek i płytę na miejscu:

$$(5.3.3) \quad N = -\pi R^2 p_0 + \frac{\pi}{2} R^2 [\sigma_1(\kappa) - \sigma_2(\kappa)],$$

w celu obliczenia odpowiedniej różnicy funkcji wiskometrycznych  $\sigma_1 - \sigma_2$ . Postępowanie takie, z uwagi na wspomniane już efekty brzegowe, może być stosowane w sensie bardzo przybliżonym (por. [2]).



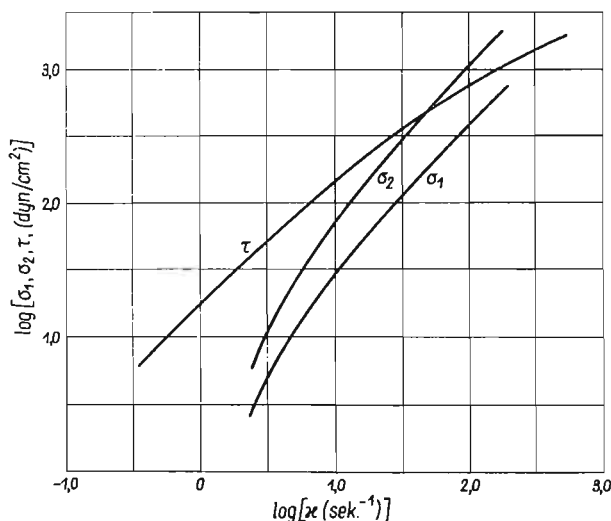
Rys. 7. Suma funkcji naprężeń normalnych w przepływie między stożkiem i płytą dla 6,9% roztworu poliizobutyleny w cecanie (wg [25])

**5.4. Inne przepływy i wyznaczenie funkcji naprężeń normalnych.** Do pomiarów naprężeń normalnych używa się także przepływu skręcającego między dwoma obracającymi się tarczami, który zresztą jako pierwszy posłużył do zademonstrowania tych naprężeń (por. [9, 11, 12]). Był on także wykorzystany przy konstrukcji specjalnego urządzenia stosowanego przez GREENSMITHA i RIVLINA [27] we wczesnych badaniach cieczy nienewtonowskich.

Przepływ skręcający bada się, podobnie jak przepływ między stożkiem i płytą, przy pominięciu efektów inercjalnych i zaburzeń wywołanych obecnością krawędzi. Umożliwia to wyznaczenie kombinacji funkcji naprężeń normalnych w postaci  $1/\kappa \sigma_2(\kappa) + \sigma_1'(\kappa)$  lub jej całki, którą należy uzupełnić pomiarami w innych typach przepływów.

MARKOVITZ i BROWN [23, 25, 28, 29] przeprowadzili badania naprężeń normalnych dla roztworów poliizobutyleny w cecanie opierając się na trzech typach przepływów wiskometrycznych. Według ich programu przepływ Couette'a posłużył do wyznaczenia różnicy  $\sigma_2 - \sigma_1$  [por. (5.2.5), rys. 6], zaś przepływ między stożkiem i tarczą do wyznaczenia sumy  $\sigma_1 + \sigma_2$  [por. (5.3.2), rys. 7]. Mając wyznaczone funkcje  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  można było przewidzieć rozkład naprężeń normalnych w przepływie skręcającym i porównać go z wynikami eksperymentów; porównanie takie wykazało bardzo dobrą zgodność wyników doświadczalnych z teorią. Na rys. 8 przytaczamy odpowiednie wykresy funkcji naprężeń normalnych i funkcji naprężenia ścinającego według badań MARKOVITZA i BROWNA (por. [1]).

W niektórych starszych teoriach cieczy nienewtonowskich stwierdza się istnienie proporcjonalności  $\sigma_1 = k\sigma_2$  między odpowiednimi funkcjami naprężeń normalnych (por. [1]). W teoriach WEISSEBERGA, LODGE'A i innych (por. [3]) zakłada się nawet, że  $k = 0$ , co pociąga za sobą  $\sigma_1 = 0$  lub  $T^{(11)} = T^{(33)}$ . Nie tylko wyniki dotychczas przytoczonych doświadczeń przeczą takim założeniom, ale również przeczą specjalne doświadczenia



Rys. 8. Funkcje wiskometryczne uzyskane przez Markovitza i Browna dla 5,4% roztworu poliizobutyleny w cecanie (wg [1])

podjęte w celu stwierdzenia istnienia i nieproporcjonalności dwóch różnic naprężeń normalnych (np. [30]). Istnieje zresztą przepływ wiskometryczny pozwalający stwierdzić bezpośrednio wartość funkcji  $\sigma_1 \neq 0$ . Dla przepływu cieczy między nieruchomymi koncentrycznymi cylindrami odpowiednia różnica naprężeń normalnych w kierunku promieniowym wyraża się następująco (por. [2]):

$$(5.4.1) \quad \Delta T^{(rr)} = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \hat{\sigma}_1(S(r)) dr, \quad S(r) = \frac{b}{r} - \frac{rf}{2},$$

gdzie  $b$  jest znaną stałą, zaś  $f$  oznacza gradient ciśnienia na jednostkę długości przewodu. W myśl najnowszych poglądów, proporcjonalność funkcji naprężeń normalnych może mieć miejsce dla bardzo szczególnych rodzajów cieczy i w pewnych tylko przedziałach zmienności prędkości ścinania. Regułą jest niezależność  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  z tym, że funkcje te wyznaczone dla określonych przepływów wiskometrycznych są słuszne dla innych przepływów wiskometrycznych.

## 6. Jakościowe wyjaśnienie efektów naprężeń normalnych

W p. 2 opisaliśmy efekty naprężeń normalnych przy przepływie Couette'a i przy wpływie swobodnej strugi cieczy z kapilary. Zjawiska te mogą być wyjaśnione na gruncie teorii cieczy prostych, w założeniu, że rozwiązania teoretyczne słuszne dla nieskończonych cylind-

rów lub rur opisują w sposób przybliżony to, co zachodzi w rzeczywistych przyrządach laboratoryjnych (por. [2]).

Dla przepływu Couette'a (rys. 3) oznaczmy przez  $\Delta = p_0 + T^{(zz)}$  nadwyżkę ciśnienia atmosferycznego  $p_0$  nad odpowiednim naciskiem  $-T^{(zz)}$  cieczy w kierunku osiowym. Ponieważ z reguły  $\Delta \neq 0$ , powierzchnia swobodna cieczy nie może być płaską. Jeśli odpowiednia pochodna w kierunku promieniowym

$$(6.1) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial r} = -\rho r \omega(r)^2 + \frac{1}{r} \left[ \hat{\sigma}_2 \left( \frac{M}{2\pi r^2} \right) - \hat{\sigma}_1 \left( \frac{M}{2\pi r^2} \right) \right] + \frac{M}{\pi r^3} \hat{\sigma}_1 \left( \frac{M}{2\pi r^2} \right),$$

jest ujemna, jak to ma miejsce w przypadku gdy  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , można spodziewać się, że swobodna powierzchnia cieczy będzie się podnosić od cylindra wewnętrznego do zewnętrznego. Natomiast warunek

$$(6.2) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial r} > 0,$$

który jest spełniony tylko wtedy, gdy funkcje naprężeń normalnych nie są tożsamościowo równe zero, daje odwrotne pochylenie powierzchni swobodnej, powodując jak gdyby «wpełzanie» cieczy na powierzchnię cylindra wewnętrznego.

Dla przepływu Poiseuille'a, oznaczając przez  $\Gamma = p_0 + T^{(rr)}|_{r=R}$  nadwyżkę ciśnienia atmosferycznego  $p_0$  nad odpowiednim naciskiem  $-T^{(rr)}|_{r=R}$  cieczy na ściankę rury, otrzymamy

$$(6.3) \quad \Gamma(z) = \rho[\psi(z) - \psi(0)] + fz + \frac{1}{R^2} \int_0^R r \left[ \hat{\sigma}_1 \left( \frac{fr}{2} \right) - 2\hat{\sigma}_2 \left( \frac{fr}{2} \right) \right] dr.$$

Jeśli funkcje naprężeń normalnych nie są tożsamościowo równe zero,  $\Gamma(0)$  na wyjściu z rury może być różne od zera. W zależności od tego czy  $\Gamma(0) < 0$  czy też  $\Gamma(0) > 0$ , otrzymamy zwiększenie lub zmniejszenie średnicy strugi cieczy. Można zatem oczekiwać, że zwiększenie średnicy nastąpi wtedy, gdy

$$(6.4) \quad 2\hat{\sigma}_2 \left( \frac{fr}{2} \right) - \hat{\sigma}_1 \left( \frac{fr}{2} \right) > 0 \quad \text{dla} \quad 0 < \frac{fr}{2} < \frac{fR}{2}.$$

## 7. Niektóre niewiskometryczne przepływy cieczy prostych

**7.1. Wtórne przepływy w rurach.** Dla ustalonego przepływu cieczy prostych przez rury, których przekroje nie są kołowo symetryczne, nie jest, w ogólnym przypadku, możliwe otrzymanie prostoliniowych linii prądu określonych następującym polem prędkości (por. [1]):

$$(7.1.1) \quad \mathbf{v} = v(\mathbf{p})\mathbf{k}, \quad v(\mathbf{p}) = 0 \text{ na konturze,}$$

gdzie  $\mathbf{k}$  jest jednostkowym wektorem w kierunku przepływu, a  $\mathbf{p}$  wektorem charakteryzującym położenie punktu materialnego na przekroju. Aby przepływ taki był możliwy, muszą być spełnione zależności

$$(7.1.2) \quad \operatorname{div}(\eta(z)\nabla v) = -a, \quad \nabla v \operatorname{div} \left( \frac{\sigma_1(z)}{z^2} \nabla v \right) + \nabla g = 0,$$

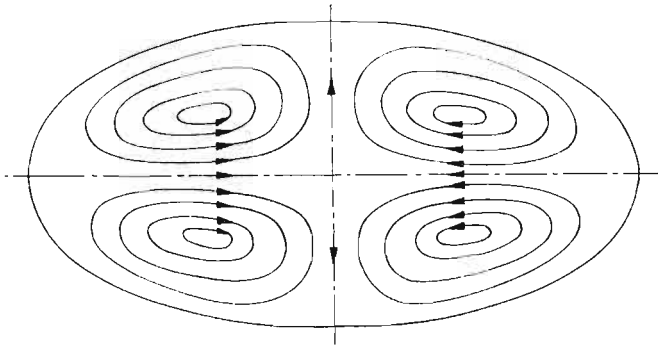


przy czym  $a$  jest stałą odpowiadającą gradientowi ciśnienia, zaś  $g$  pewną funkcją wektora  $\mathbf{p}$ . Ponieważ nie wszystkie rozwiązania (7.1.2)<sub>1</sub> spełniają (7.1.2)<sub>2</sub>, przepływy prostoliniowe przez rury o przekroju niekołowym są dynamicznie możliwe tylko dla szczególnych przypadków cieczy (por. [31, 32]). Dotyczy to w szczególności liniowo lepkiej cieczy newtonowskich, dla których:  $\eta(\kappa) = \eta_0 = \text{const}$ ,  $\sigma_1 = 0$ ; cieczy drugiego stopnia (por. p. 9), dla których:  $\eta(\kappa) = \eta_0 = \text{const}$ ,  $\sigma_1 = \kappa^2 \cdot \text{const}$ ; cieczy Reiner–Rivlina (por. p. 8), itp.

Następnym krokiem w rozwinięciu teorii przepływów cieczy prostych przez rury o dowolnym przekroju jest rozważenie pola prędkości w postaci

$$(7.1.3) \quad \mathbf{v} = v(\mathbf{p})\mathbf{k} + \mathbf{u}(\mathbf{p}), \quad \mathbf{v} = 0 \text{ na konturze,}$$

gdzie  $\mathbf{u}(\mathbf{p})$  jest dodatkowym polem prędkości charakteryzującym tzw. *wtórne przepływy cieczy* w płaszczyźnie przekroju rury (por. [1]). Z punktu widzenia teorii, zagadnienie jest znacznie bardziej złożone i tylko przypadki niektórych szczególnych przekrojów dały się rozwiązać efektywnie.



Rys. 9. Schemat wtórnych przepływów w eliptycznym przekroju rury

RIVLIN i GREEN [32] oraz LANGLOIS i RIVLIN [33, 34] rozwiązali, na przykład, przepływ w rurze o przekroju eliptycznym, rozwijając pole  $v(\mathbf{p})$  w szereg potęgowy według małych wartości gradientu ciśnienia  $a$ . Dla tego przekroju przepływ wtórny charakteryzuje się następującymi składowymi prędkości:

$$(7.1.4) \quad \begin{aligned} u_x &= -\frac{\delta}{\eta_0^5} a^4 A \left( \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left( \frac{x^2}{c^2} + \frac{5y^2}{b^2} - 1 \right) x + O(a^5), \\ u_y &= +\frac{\delta}{\eta_0^5} a^4 A \left( \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left( \frac{5x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) y + O(a^5), \end{aligned}$$

przy czym  $\delta$  oznacza stałą zależną od własności cieczy, a  $A$  — stałą zależną od wymiarów elipsy, której półosie wynoszą odpowiednio  $c$  i  $b$ . A zatem przepływy wtórne wywołane są w tym przypadku dopiero efektami czwartego rzędu, tj. proporcjonalnymi do  $a^4$ , zaś kierunek przepływów zależy od znaku  $\delta$ . Na rys. 9 przedstawiono schematycznie charakter przepływu wtórnego w przekroju eliptycznym dla  $\delta > 0$ ; dla  $\delta < 0$  kierunek zawirowań będzie przeciwny.

Inny charakter wtórnych przepływów obserwowano dla przypadku stożka i płyty oraz przepływu skręcającego (por. [2]). RIVLIN [35] podkreślił analogię, jaka może mieć miejsce

między laminarnymi przepływami cieczy nienewtonowskich i przepływami zaburzonymi klasycznymi cieczy Naviera–Stokesa.

**7.2. Ustalony rozciąganie.** Przypadek cieczy prostej w kształcie długiego walca (swobodna struga cieczy), poddanej prostemu ustalonymu rozciąganiu w kierunku osi, został rozważony przez COLEMANA i NOLLA [36], jako szczególny przypadek tzw. *przepływów ze stałą historią deformacji*.

Dla prostego ustalonego rozciągania równania na funkcję względnej deformacji w kartezjańskim układzie odniesienia są następujące:

$$(7.2.1) \quad \xi = \mathbf{x} \exp[\mathbf{D}(\tau - t)], \quad [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}d & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}d \end{bmatrix}.$$

Prowadzą one do normalnych napięć na powierzchniach czołowych i powierzchni tworzącej walca w postaci

$$(7.2.2) \quad \begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{2} \rho d^2 \left( \frac{1}{4} (r^2 - R^2) - \frac{1}{3} L^2 \right) + \frac{3}{2} d \hat{\lambda}_1 + \frac{3}{4} d^2 \hat{\lambda}_2, \\ t_L &= \frac{1}{2} \rho d^2 \left( \frac{1}{4} (r^2 - R^2) + \frac{2}{3} L^2 \right) + \frac{3}{2} d \hat{\lambda}_1 + \frac{3}{4} d^2 \hat{\lambda}_2, \\ t_R &= \frac{1}{2} \rho d^2 \left( z^2 - \frac{1}{3} L^2 \right), \end{aligned}$$

gdzie  $R$  i  $L$  oznaczają promień zewnętrzny i długość walca, zaś funkcje materiałowe  $\hat{\lambda}_i$  zostały zdefiniowane następująco:

$$(7.2.3) \quad \hat{\lambda}_i = \lambda_i \left( \frac{\sqrt{6}}{2} d, \frac{d^3}{4} \right), \quad i = 1, 2.$$

Jak widać z (7.2.2), nawet przy pominięciu efektów inercyjnych, własności cieczy w rozważanym typie przepływu zależą tylko od dwóch funkcji materiałowych niezależnych od poprzednio zdefiniowanych funkcji wiskometrycznych  $\tau$ ,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  (por. p. 4). Można również stwierdzić (por. [1]), że w doświadczeniach z prostym ustalonym rozciąganiem nie daje się odróżnić klasy cieczy prostych od czysto lepkich cieczy Reiner–Rivlina (por. p. 8).

### 8. Klasyfikacja cieczy nienewtonowskich

Pozostawiając na uboczu naszych rozważań ciecze nienewtonowskie nieproste lub ciecze posiadające wewnętrzną strukturę (ciecze anizotropowe, ciekłe kryształy, podciecze, ciecze wielobiegunowe itp.), można pokazać, że większość stosowanych w literaturze typów równań konstytutywnych stanowi szczególne przypadki nieściśliwych cieczy prostych. Równania takie otrzymuje się bądź przez właściwie potraktowany proces aproksymacji, bądź też przez postulowanie związków między naprężeniem i odpowiednimi parametrami

kinematycznymi. W niniejszym punkcie omówimy tylko najważniejsze typy równań konstytutywnych cieczy nieściśliwych, dla których dalsze szczegóły można znaleźć w obszernej monografii TRUESDELLA i NOLLA [1].

W założeniu, że tylko bardzo krótka historia gradientu deformacji jest istotna, można zażądać, aby tensor naprężenia zależał od  $n$  kolejnych pochodnych czasowych gradientu deformacji. Takie rozumowanie doprowadziło RIVLINA i ERICKSENA [37] do sformułowania ogólnych równań *cieczy nieściśliwej typu różniczkowego* w postaci

$$(8.1) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \eta(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n),$$

gdzie

$$(8.2) \quad \mathbf{A}_n = \left. \frac{d^n}{d\tau^n} \mathbf{C}_t(\tau) \right|_{\tau=t}, \quad \mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau)^T \mathbf{F}_t(\tau),$$

oznaczają tensory kinematyczne Rivlina–Ericksena. Zaslugą RIVLINA i SPENCERA [38, 39] było wyprowadzenie twierdzeń o reprezentacji funkcji tensorowej  $\eta$  w zależności od tensorów  $\mathbf{A}_n$  i ich wspólnych niezmienników (por. [1]). Dla *ustalonych przepływów wiskometrycznych*, dla których  $\mathbf{A}_k = 0$  dla  $k \geq 3$  (por. [1]), otrzymamy

$$(8.3) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \mathbf{A}_1^2 + \alpha_4 \mathbf{A}_2^2 + \alpha_5 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \\ + \alpha_6 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2) + \alpha_7 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1) + \alpha_8 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1^2),$$

gdzie  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) są funkcjami niezmienników utworzonych z tensorów  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{A}_2$ . Związek między zdefiniowanymi w p. 4 funkcjami wiskometrycznymi i współczynnikami  $\alpha_i$  jest następujący:

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \eta(\kappa) &= \alpha_1 + 2\kappa^2 \alpha_5 + 4\kappa^4 \alpha_7, \\ \sigma_1(\kappa) &= \kappa^2 (2\alpha_2 + \alpha_3 + 4\kappa^2 \alpha_4 + 4\kappa^2 \alpha_6 + 8\kappa^4 \alpha_8), \\ \sigma_2(\kappa) &= \kappa^2 \alpha_3. \end{aligned}$$

W szczególnym przypadku, gdy równanie konstytutywne przedstawia związek tensora naprężenia i jego  $p$  kolejnych pochodnych czasowych z gradientem deformacji i jego  $r$  kolejnymi pochodnymi po czasie, mamy do czynienia z *cieczami typu prędkościowego*. Równanie cieczy typu prędkościowego może być wyrażone w postaci (por. [1])

$$(8.5) \quad \overset{(p)}{\mathbf{T}} = \overset{(1)}{\eta}(\overset{(1)}{\mathbf{T}}, \overset{(1)}{\mathbf{T}}, \dots, \overset{(p-1)}{\mathbf{T}}; \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r),$$

gdzie litera  $p$  u góry symbolu oznacza odpowiednio zdefiniowany (por. [1, 40])  $p$ -ty strumień (uogólnioną obiektywną pochodną po czasie). W klasie cieczy typu prędkościowego<sup>1)</sup> mieszczą się *ciecze sprężysto-lepkie* rozważane przez OLDROYDA [18]. Ich równania konstytutywne w postaci

$$(8.6) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{P}, \\ \mathbf{P} + \lambda_1 \frac{D}{Dt} \mathbf{P} - \mu_1 (\mathbf{P}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{P}) = 2\eta_0 \left( \mathbf{D} + \lambda_2 \frac{D}{Dt} \mathbf{D} - \mu_2 \mathbf{D}^2 \right),$$

<sup>1)</sup> Równanie w postaci (8.5) może równie dobrze definiować ciecz jak i ciało stałe, w zależności od warunków symetrii i warunków początkowych (por. [1]).

zawierają pięć stałych materiałowych  $\lambda_1, \mu_1, \eta_0, \lambda_2, \mu_2$  oraz różnią się odpowiednio kowariantną (typ *A*) i kontrawariantną (typ *B*) reprezentacją tensora  $\mathbf{P}^{(1)}$ .

W założeniu, że funkcjonal konstytutywny cieczy prostej może być wyrażony w postaci sumy szeregu całek wielokrotnych, GREEN i RIVLIN [42] zbudowali teorię *cieczy typu całkowego*; była to zresztą najwcześniejsza teoria ogólna uwzględniająca złożone efekty pamięci ośrodka. Dla *cieczy typu całkowego rzędu drugiego* otrzymuje się

$$(8.7) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \int_0^\infty \zeta(s)\mathbf{G}(s)ds + \int_0^\infty \int_0^\infty \{\alpha(s_1, s_2)[\text{tr}\mathbf{G}(s_1)]\mathbf{G}_2(s_2) + \\ + \beta(s_1, s_2)\mathbf{G}(s_1)\mathbf{G}(s_2)\} ds_1 ds_2,$$

przy czym  $\mathbf{G}(s)$  zdefiniowano wzorem (3.14), zaś  $\zeta, \alpha$  i  $\beta$  noszą charakter funkcji materiałowych. Szczególnymi przypadkami cieczy typu całkowego (rzędu pierwszego) są ciecze spełniające równania *skończonej liniowej lepkosprężystości* [por. (8.9)] oraz *infinitesimalnej liniowej lepkosprężystości* (równania Boltzmanna). Zasługą COLEMANA i NOLLA [43] jest pokazanie racjonalnego przejścia od koncepcji cieczy prostych do koncepcji klasycznych cieczy lepkosprężystych.

Możliwa jest oczywiście teoria *cieczy typu mieszanego*, tj. *całkowo-różniczkowego* (por. [1]), chociaż nie znalazła ona szerszego praktycznego zastosowania.

Opracowane przez COLEMANA i NOLLA [21] metody asymptotycznej aproksymacji funkcjonałów konstytutywnych, spełniających zasadę zanikającej pamięci w sensie mocnym (por. p. 3), dały początek całemu szeregowi równań konstytutywnych opisujących różne podklasy cieczy prostych.

Równania *cieczy prostej rzędu  $n$*  (por. [1]) można zapisać w postaci następującej:

$$(8.8) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \sum_{t=1}^n \mathfrak{B}_t(\mathbf{G}(s)),$$

w której  $\mathfrak{B}_t$  oznacza ograniczony funkcjonal wielomianowy stopnia  $t$ . Dla  $n = 1$ , po wykorzystaniu twierdzenia o całkowej reprezentacji funkcjonału liniowego, otrzymamy równania

$$(8.9) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \int_0^\infty \mathbf{K}(s)[\mathbf{G}(s)]ds, \quad \int_0^\infty |\mathbf{K}(s)|^2 h(s)^2 ds < \infty,$$

odpowiadające *skończonej liniowej lepkosprężystości*.

Stosując do funkcji historii deformacji  $\mathbf{G}(s)$  proces retardacji (por. [21]), polegający na następującej zmianie skali czasu:

$$(8.10) \quad \mathbf{G}^\alpha(s) = \mathbf{G}(\alpha s), \quad 0 < \alpha < 1,$$

gdzie czynnik retardacji  $\alpha$  charakteryzuje «spowalnianie» przepływu<sup>2)</sup>, uzyskuje się równania *cieczy typu różniczkowego stopnia  $n$*

$$(8.11) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \sum_{(j_1 \dots j_n)} [j_1 \dots j_n] [\mathbf{A}_{j_1} \dots \mathbf{A}_{j_n}] + o(\alpha^n) \\ 1 \leq j_1 \leq j_2 \dots j_n \leq n, \quad j_1 + j_2 + \dots + j_n \leq n,$$

<sup>1)</sup> Ich uogólnienie na efekty pamięci (typ *A'* i *B'*) zostało przedstawione przez Waltersa (por. [41]).

<sup>2)</sup> Podobne wyniki można uzyskać stosując zaproponowane przez Rivlina [44] rozwinięcie prędkości w szereg potęgowy:  $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{v}_1 + \alpha^2 \mathbf{v}_2 + \dots$

równoważne w pewnym sensie równaniom (8.1).  ${}^1_{j_1 \dots j_i} [ \ ]$  oznacza tutaj  $t$ -liniową formę, a znak sumy rozciąga się na wszystkie zbiory  $(j_1 \dots j_i)$  spełniające wymienione warunki. W szczególności dla  $n = 0$  mamy ciecz idealną, zaś dla  $n = 1$  ciecz newtonowską opisaną równaniem (2.2).

W celu dalszej ilustracji rozważmy *ciecz typu różniczkowego stopnia czwartego*, dla której pełna reprezentacja wynosi

$$(8.12) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= -p\mathbf{1} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_4, \\ \mathbf{S}_1 &= \eta_0 \mathbf{A}_1, \\ \mathbf{S}_2 &= \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2, \\ \mathbf{S}_3 &= \beta_1 \mathbf{A}_3 + \beta_2 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \beta_3 (\text{tr} \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_1, \\ \mathbf{S}_4 &= \gamma_1 \mathbf{A}_4 + \gamma_2 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_1) + \gamma_3 \mathbf{A}_2^2 + \gamma_4 (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2) + \gamma_5 (\text{tr} \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_2 + \\ &\quad + \gamma_6 (\text{tr} \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_1^2 + [\gamma_7 \text{tr} \mathbf{A}_3 + \gamma_8 \text{tr} (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2)] \mathbf{A}_1, \end{aligned}$$

przy czym współczynniki  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  są stałymi materiałowymi. Dla ustalonych przepływów wiskometrycznych mamy (por. [1])

$$(8.13) \quad \begin{aligned} \eta(\kappa) &= \frac{1}{\kappa} \tau(\kappa) = \eta_0 + 2(\beta_2 + \beta_3) \kappa^2 + o(\kappa^3), \\ \sigma_1(\kappa) &= (2\alpha_1 + \alpha_2) \kappa^3 + [4(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5) + 2\gamma_6] \kappa^4 + o(\kappa^4), \\ \sigma_2(\kappa) &= \alpha_2 \kappa^2 + 2\gamma_6 \kappa^4 + o(\kappa^4), \end{aligned}$$

a zatem odpowiednia funkcja lepkości określona jest równaniami (8.12) z dokładnością do członów  $o(\kappa^3)$ , podczas gdy funkcje naprężeń normalnych z dokładnością do członów  $o(\kappa^4)$ .

Przypadek *cieczy stopnia drugiego*, szeroko stosowany w rozwiązaniach różnych zagadnień konkretnych, otrzymamy zachowując w (8.12) tylko  $\mathbf{S}_1$  i  $\mathbf{S}_2$  (por. [1])

$$(8.14) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \eta_0 \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2, \quad \mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D}.$$

Jest to najprostsze uogólnienie równań konstytutywnych cieczy newtonowskiej prowadzące do efektów naprężeń normalnych (por. p. 9).

Równanie (8.14) jest w literaturze stosowane i rozumiane jako przybliżenie cieczy prostej dla wystarczająco powolnych przepływów i jako opisujące pewien idealny model cieczy dla dowolnych przepływów; ten drugi sposób podejścia może prowadzić jednak do wyników niezadawalających (por. p. 9).

Osobną pozycję w teorii cieczy nienewtonowskich zajmują równania, wspomnianej już, *nieściśliwej cieczy lepkiej Reiner-Rivlina* (por. [1]), mianowicie

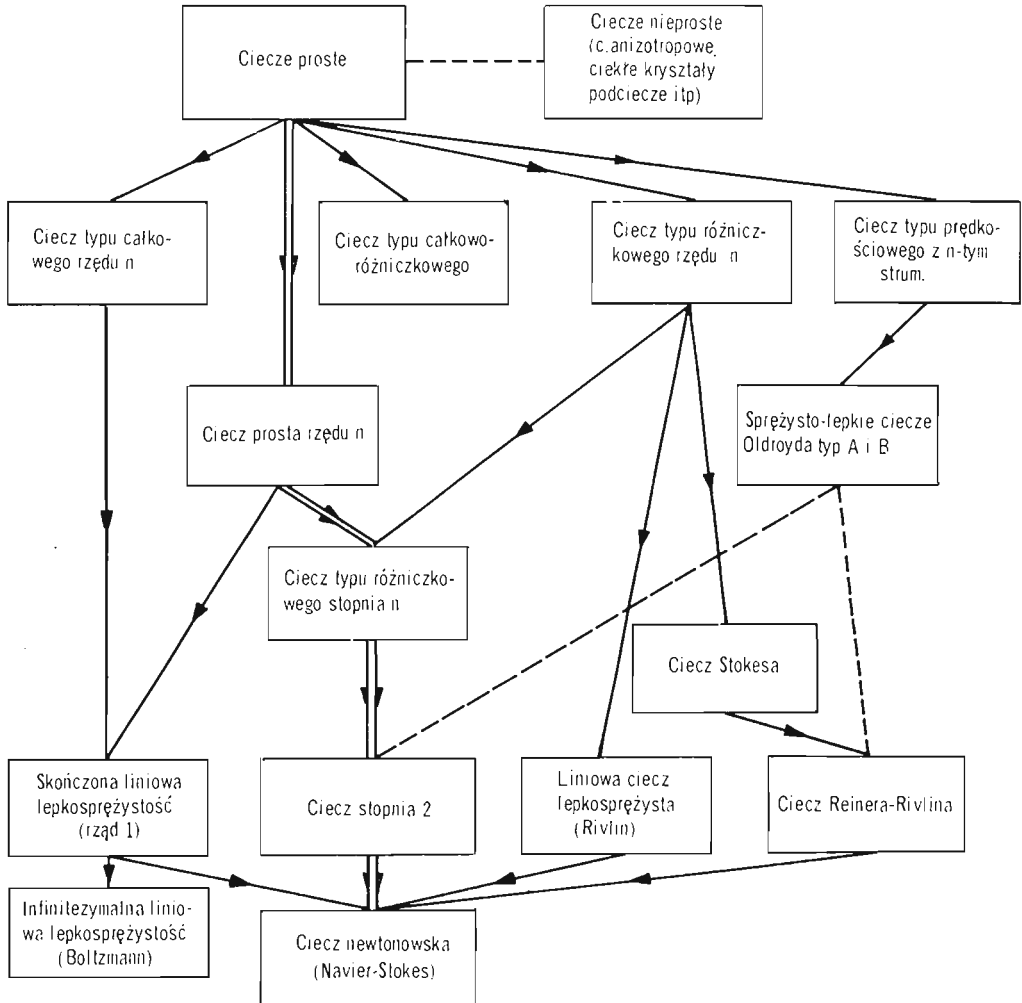
$$(8.15) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mu_1 \mathbf{D} + \mu_2 \mathbf{D}^2, \quad \mathbf{D} = 1/2 \mathbf{A}_1,$$

gdzie  $\mu_1$  i  $\mu_2$  są dowolnymi funkcjami niezmienników  $\text{tr} \mathbf{D}^2$ ,  $\text{tr} \mathbf{D}^3$  ( $\text{tr} \mathbf{D} \equiv 0$ ). Ciecze tego typu doczekały się obszernej literatury teoretycznej i doświadczalnej, chociaż z uwagi na następujące zależności dla ustalonych przepływów wiskometrycznych:

$$(8.16) \quad \begin{aligned} \eta(\kappa) &= \frac{1}{\kappa} \tau(\kappa) = \frac{1}{2} \mu_1 \left( \frac{1}{4} \kappa^2, 0 \right), \\ \sigma_1(\kappa) &= \sigma_2(\kappa) = \frac{1}{4} \kappa^2 \mu_2 \left( \frac{1}{4} \kappa^2, 0 \right), \end{aligned}$$

nie mogą właściwie opisywać zachowania się licznych cieczy nienewtonowskich, dla których  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ .

Zależności między poszczególnymi klasami cieczy, omówionymi w niniejszym punkcie, zostały schematycznie przedstawione na rys. 10. Należy pamiętać, że linie łączące różne typy cieczy ilustrują formalnie istniejące związki, nie precyzując wcale założeń, których spełnienia wymagają odpowiednie przejścia.



Rys. 10. Klasyfikacja cieczy nienewtonowskich na tle cieczy prostych

Trzeba również dodać, że przedstawiona klasyfikacja nie wyczerpuje wszystkich możliwości opisu cieczy nienewtonowskich i zawiera tylko najbardziej racjonalną ich część. Pominięto, na przykład, tzw. teorie *sprężystych* cieczy, o których była mowa w p. 2. Pominięto również ciecze opisywane *prawem potęgowym* (por. np. [4]), którego nie można uznać za słuszne z teoretycznego punktu widzenia z uwagi na nieobiektywność sformuło-

wania, niemożność opisanego efektów naprężeń normalnych, ograniczenie do zagadnień jednowymiarowych itp.

### 9. Niektóre rozwiązania dla cieczy drugiego stopnia

Jak już wspominaliśmy w punkcie poprzednim, równania cieczy drugiego stopnia (8.14) były szeroko stosowane do rozwiązań zagadnień konkretnych. Ich stosunkowa prostota (stałe współczynniki materiałowe) pozwoliła przeanalizować pewne przypadki przepływów nieustalonych — niemożliwe do rozwiązania dla bardziej ogólnych teorii (por. [1]).

Dla *nieustalonego prostego przepływu ścinającego* (por. p. 4), w założeniu zerowych sił masowych, otrzymamy równanie następujące:

$$(9.1) \quad \eta_0 \partial_{xx} v + \alpha_1 \partial_{xtx} v = \rho \partial_t v,$$

różniące się od równania parabolicznego teorii klasycznej mieszaną pochodną cząstkową trzeciego rzędu.

Jego szczególne rozwiązanie dla fal harmoniczych w postaci

$$(9.2) \quad v = V e^{-ax} \cos(\omega t - bx),$$

gdzie  $a$  i  $b$  są określonymi funkcjami  $\xi = \alpha_1 \omega / \eta_0$ , zostało przeanalizowane przez TRUESDELLA [45]. Wykazał on m.in., że dla  $\alpha_1 > 0$ , tłumienie  $a$  jest monotoniczną funkcją  $\xi$  i osiąga granicę  $(\rho/\alpha_1)^{1/2}$  przy  $\xi \rightarrow \infty$ ; natomiast dla  $\alpha_1 < 0$ <sup>1)</sup>,  $a$  najpierw wzrasta z częstotliwością, osiągając maksimum równe  $-\rho/8\alpha_1$  przy  $\omega = \rho\eta_0/8 \sqrt[3]{\alpha_1^2}$ , a następnie asymptotycznie opada do zera. A zatem dla  $\alpha_1 < 0$  przy dużych częstotliwościach zaburzenia propagują się nieznacznie zmniejszone. W każdym przypadku niezerowa wartość  $\alpha_1$  redukuje zdolność cieczy do ścinania, lecz pozwala na propagację zaburzeń na większą odległość.

Rozważono również *drżania cieczy zawartej między koncentrycznymi cylindrami*, z których wewnętrzny jest nieruchomy, zaś zewnętrzny oscyluje wzdłuż osi z częstotliwością  $\nu$  (por. [1]). Różnica między naprężeniami promieniowymi na ściankach cylindrów wynosi w przybliżeniu

$$(9.3) \quad \Delta T^{(rr)} = (2\alpha_1 + \alpha_2) \frac{V^2}{gR_2^2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2}g \right) \cos^2 \nu t + O(g^2) \right],$$

$$g = (R_1 - R_2)/R_2 > 0.$$

Podobnie dla drgań skrętnych otrzymano

$$(9.4) \quad \Delta T^{(rr)} = -2\alpha_1 \frac{\Omega^2}{g} [1 + O(g)] \cos^2 \nu t.$$

Warto również zwrócić uwagę na *zagadnienie stateczności rozwiązania* równania (9.1) przedyskutowane przez COLEMANA, DUFFINA i MIZELA [46], z uwagi na dalsze konsekwencje dla stateczności przepływów ścinających (por. p. 11). Udowodnili oni, że dla  $\alpha_1 < 0$  rozwiązanie szczególne (9.1) w postaci

$$(9.5) \quad v = A e^{a_n t} \sin \frac{n\pi}{d} x, \quad a_n = \frac{\eta_0 \pi^2 n^2}{(-\alpha_1)(\pi^2 n^2 - \sigma^2 d^2)}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\rho}{-\alpha_1}},$$

<sup>1)</sup> To jest przypadek obserwowany dla roztworów poliizobutyleny w cetanie [25]; porównaj także rozważania punktu 10, gdzie  $\alpha_1 < 0$  z definicji.

spełniające warunki brzegowe:  $v(0, t) = v(d, t) = 0$ , jest nieograniczone, gdy  $n > \sigma d/\pi$ . Każde ograniczone rozwiązanie  $v(x, t)$  liniowego równania (9.1) jest niestateczne w tym sensie, że istnieje nieograniczone rozwiązanie  $v^*(x, t)$  z tymi samymi warunkami brzegowymi, co  $v(x, t)$ , lecz posiadające wartości początkowe  $v^*(x, 0)$  różniące się dowolnie mało od wartości początkowych  $v(x, 0)$ . Ponieważ nieograniczone rozwiązania dla cieczy drugiego stopnia nie mają fizycznego znaczenia, należy albo założyć, że w pewnym momencie przepływu przestają być linearne (por. p. 7.1), albo też wyłączyć je z klasy «powolnych» przepływów w sensie retardacji (por. p. 8).

### 10. Ciecze z konwekcyjną sprężystością

Stwierdzając, że takie terminy, jak *ciecz niesprężysta*, *ciecz lepko-sprężysta* itp. nie posiadają zdefiniowanego jednoznacznie znaczenia oraz że różne teorie będące formalnym przeniesieniem własności ciał sprężystych na ciecze są niesłuszne (por. p. 2), dochodzimy do pytania czy koncepcji *sprężystości* cieczy można nadać właściwe racjonalne znaczenie.

Znaczenie takie posiada wprowadzona przez TRUESDELLA [47] definicja *cieczy z konwekcyjną sprężystością*, dla której konfiguracją odniesienia jest konfiguracja zajmowana przez punkt materialny w czasie  $t-t^*$ , przy czym  $t$  oznacza czas aktualny, zaś  $t^*$  jest stałą cieczy nazywaną *czasem charakterystycznym* (*response time*). Równania konstytutywne tego szczególnego przypadku nieściśliwej cieczy prostej można zapisać w postaci (por. [48])

$$(10.1) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{f}(\mathbf{B}_{t-t^*}(t)) = -p\mathbf{1} + \mathbf{g}(\mathbf{F}_{t-t^*}(t))$$

$$\mathbf{B}_{t-t^*} = \mathbf{F}_{t-t^*} \mathbf{F}_{t-t^*}^T.$$

Z uwagi na pewne ogólne związki, które obowiązują w ośrodkach sprężystych (por. [1]), funkcje wiskometryczne cieczy z konwekcyjną sprężystością muszą być związane następującą zależnością

$$(10.2) \quad \sigma_2(\kappa) - \sigma_1(\kappa) = t^* \kappa^2 \eta(\kappa).$$

Stąd widać, że dla przepływów wiskometrycznych równania takich cieczy mogą nie opisywać w sposób wystarczająco ogólny zachowania się cieczy prostych. Natomiast dla tej klasy przepływów wyniki przewidziane przez teorię cieczy drugiego stopnia są identyczne z wynikami dla teorii cieczy z konwekcyjną sprężystością, jeśli  $t^* = -2\alpha_1/\eta_0$ <sup>1)</sup>.

Jeśli historia względnego gradientu deformacji występującego w (10.1) jest analityczna, równania konstytutywne nieściśliwej cieczy z konwekcyjną sprężystością przyjmują postać alternatywną

$$(10.3) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + (\alpha + 2\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t^*)^n}{n!} \mathbf{A}_n + \beta \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t^*)^{m+n}}{m!n!} \mathbf{A}_m \mathbf{A}_n,$$

w której  $\alpha$  i  $\beta$  są funkcjami następujących niezmienników tensorów Rivlina-Ericksena:  $(t^*)^k \text{tr} \mathbf{A}_k$ ,  $(t^*)^{k+l} \text{tr} \mathbf{A}_k \mathbf{A}_l$ . LOCKETT i ZAHORSKI [48] pokazali, że *nieściśliwa ciecz typu różniczkowego, w ustalonych przepływach wiskometrycznych, nie może być odróżniona od*

<sup>1)</sup> Zgodnie z zasadą przyczynowości  $t^* > 0$ , a zatem  $\alpha_1 < 0$ ; stanowi to, obok wyników doświadczalnych, jeszcze jedną motywację znaku stałej  $\alpha_1$ .



cieczy z uogólnioną postacią konwekcyjnej sprężystości. To samo odnosi się do nieściśliwych cieczy trzeciego stopnia w dowolnych przepływach i cieczy czwartego stopnia w dwuwymiarowych przepływach, jeśli tylko odpowiednie historie deformacji są analityczne.

Uogólnienie równania (10.1) na ciecze proste można otrzymać wprowadzając całe widmo charakterystycznych czasów  $t_i^*$  ( $i = 1, \dots, n$ ) i przechodząc do zależności funkcjonalnej dla  $n \rightarrow \infty$ .

### 11. Stateczność przepływów ścinających

Zagadnienie stateczności przepływów cieczy nienewtonowskich posiada znaczenie nie tylko teoretyczne, ale i praktyczne, zwłaszcza w technologii polimerów, masy papierniczej itp. Towarzyszące takim przepływowi anomalie (przepływy wtórne, zjawisko Tomsa w przepływie zaburzonym, efektywny poślizg na ściankach, itp.) mogą mieć związek z utratą stateczności (np. [49]), chociaż nie istnieje jednolity pogląd, czy anomalie takie dadzą się wyjaśnić na gruncie teorii kontynualnych, czy też rozważań czysto strukturalnych. Na przykład, zjawisko Tomsa (por. [50]) — wyraźną redukcję oporów przepływu nawet dla bardzo rozcieńczonych roztworów polimerów w porównaniu z przepływem czystego rozpuszczalnika — niektórzy autorzy wiążą z takimi czy innymi własnościami sprężystymi cieczy (por. np. [51]), inni doszukują się głównych przyczyn w zjawisku poślizgu w warstwie przyściennej tworzącej się na skutek odpowiedniej orientacji struktury (por. np. [52]).

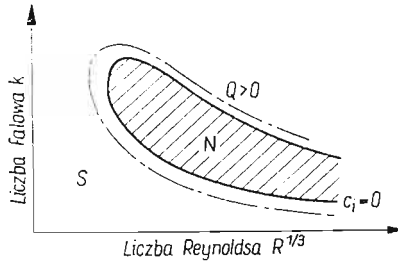
Ogólną teorię niestateczności wywołanej falami ścinania w ustalonych przepływach cieczy prostych przedstawili niedawno COLEMAN i GURTIN [53]. Stwierdzili oni m.in., że w obszarach poddanych ścinaniu amplitudy fal przyspieszenia mogą w sprzyjających warunkach dążyć do nieskończoności w skończonym przedziale czasu. Im większa jest prędkość ścinania, tym mniejsza jest krytyczna amplituda, której odwrotność zależy proporcjonalnie od *chwilowego modułu drugiego rzędu* zdefiniowanego przez drugą pochodną funkcjonalną od funkcjonału konstytutywnego (por. p. 3).

Krótki przegląd zagadnień stateczności dla płaskich ustalonych przepływów ścinających z określonymi warunkami brzegowymi zamieszczono w pracach [49, 54]; przedstawimy obecnie tylko niektóre wyniki.

Większość rozwiązanych przypadków dotyczy dwuwymiarowych zaburzeń nałożonych na płaski przepływ podstawowy (por. np. [55, 56, 57, 58]), co wobec nieistnienia odpowiednika twierdzenia Squire'a dla cieczy nienewtonowskich ogranicza ich znaczenie. Okazuje się bowiem, że obszar stateczności dla zaburzeń trójwymiarowych może nie zawierać się w analogicznym obszarze dla zaburzeń dwuwymiarowych (por. [59, 60]).

W zagadnieniach płaskich przepływów cieczy ze swobodną powierzchnią rozróżnia się dwa rodzaje fal zaburzenia: raczej krótkie *fale ścinania* o dużej częstości i długie *fale powierzchniowe* propagujące się stosunkowo wolno (por. [61]). Dla cieczy typu różniczkowego drugiego lub wyższego stopnia, rozważenie fal ścinania prowadzi zawsze do niestateczności przepływu lub fizycznie niedopuszczalnych wniosków (por. [57, 62]), co jest konsekwencją przybliżonego charakteru równań konstytutywnych (por. p. 8). Uniknąć tego można przez właściwie uwzględnioną pamięć ośrodka.

Rozwiązania zagadnień stateczności dla *plaskich przepływów Poiseuille'a* (np. [55, 58]) oraz dla *warstw cieczy spływających po nachylnych płaszczyznach* (np. [56, 57]) wykazują raczej destabilizujący charakter parametrów odpowiedzialnych za *sprężyste* lub *lepko-sprężyste* własności cieczy drugiego stopnia, cieczy sprężysto-lepkich typu Oldroyda itp. (por. rys. 11, 12).

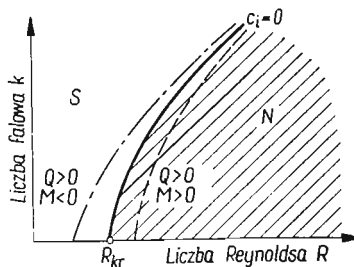


Rys. 11. Krzywa neutralnej stateczności dla płaskiego przepływu Poiseuille'a. *S* — obszar stateczności, *N* — obszar niestateczności

Rozważania przeprowadzone przez ZAHORSKIEGO [49] nad nieściśliwą cieczą z konwekcyjną sprężystością stopnia trzeciego (por. p. 10), spływającą po płaszczyźnie nachylonej pod kątem  $\vartheta$  do poziomu, doprowadziły do następującej krytycznej liczby Reynoldsa dla zaburzeń powierzchniowych:

$$(11.1) \quad R_{kr}/\text{ctg } \vartheta = \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{5} M + \frac{15}{7} M^2 \right) \left[ \left( \frac{2}{15} - \frac{62}{105} M + \frac{128}{45} M^2 \right) + \right. \\ \left. + Q \left( \frac{1}{3} - \frac{11}{15} M + \frac{417}{80} M^2 \right) \right]^{-1},$$

gdzie parametr  $Q > 0$  reprezentuje *sprężyste* własności cieczy ( $Q$  jest proporcjonalny do stałej  $\alpha_1$  dla cieczy drugiego stopnia), zaś mały parametr  $M$  określa w przybliżeniu zmianę



Rys. 12. Krzywa neutralnej stateczności fal powierzchniowych dla płaskiego przepływu po nachylonej płaszczyźnie. *S* — obszar stateczności, *N* — obszar niestateczności,  $R_{kr}$  — punkt bifurkacji

lepkości w zależności od prędkości ścinania. Dla  $M > 0$ , można spodziewać się efektów stabilizujących, zwłaszcza dla silnie spłaszczonych profili prędkości i większych grubości warstwy.

Zagadnienia utraty stateczności znacznie się komplikują dla *dwuwarstwowych przepływów po nachylonej płaszczyźnie*, wykazując różnorodny wpływ parametrów charakteryzujących

rozwarstwienie gęstości i lepkości (por. [63, 64]). W pracy [54], w oparciu o pewne wyniki KAO [65], wykazano, m.in., że dla fal powierzchniowych w dwuwarstwowym przepływie cieczy z konwekcyjną sprężystością stopnia drugiego, krytyczna liczba Reynoldsa wyraża się następująco:

$$(11.2) \quad R_{1kr}/ctg \vartheta = m[F(\delta, m) + Q_1 \tau^*]^{-1},$$

gdzie  $F$  jest pewną znaną funkcją parametrów  $\delta$  i  $m$  określających odpowiednio stosunek grubości i lepkości warstwy dolnej do górnej, a  $Q_1$  charakteryzuje wpływ własności *sprężystych*. Stabilizujący lub destabilizujący (w porównaniu z warstwą jednorodną) wpływ tych własności zależy istotnie od wielkości  $\tau^*$  definiującej stosunek czasów charakterystycznych (por. p. 10) w cieczy dolnej i górnej. Pomimo dość złożonego obrazu zjawiska, *można spodziewać się efektu stabilizującego, gdy  $\tau^* < 0$ , tj. dla bardziej sprężystej warstwy górnej*. Odpowiadałoby to z grubsza rzecz biorąc roli jaką odgrywają zanieczyszczenia powierzchniowe (por. [66]) i rozwarstwienie cieczy obserwowane przy przepływach rozтворów i stopów polimerów oraz bardzo drobnych zawiesin (por. [67, 68]).

#### Literatura cytowana w tekście

1. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik*, vol. III/3 Berlin-Heidelberg-New York 1965.
2. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ, W. NOLL, *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids. Theory and Experiment*, Berlin-Heidelberg-New York 1966.
3. A. S. LODGE, *Elastic Liquids*, London-New York 1964.
4. W. L. WILKINSON, *Non-Newtonian Fluids*, London-Oxford-New York-Paris 1960.
5. *Rheology, Theory and Applications*, vol. 1 i 2. Pod red. F. R. EIRICHA, New York 1956 i 1958.
6. M. REINER, *Rheology, Handbuch der Physik*, vol. VI, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.
7. JOHN D. FERRY, *Lepkosprężystość polimerów*, Warszawa 1965.
8. W. NOWACKI, *Teoria pelzania*, Warszawa 1963.
9. F. H. GARNER, A. H. NISSAN, *Rheological properties of high-viscosity solutions of long molecules*, *Nature*, **158** (1946) 634-635.
10. K. WEISSENBERG, *A continuum theory of rheological phenomena*, *Nature*, **159** (1947), 310-311.
11. G. F. WOOD, A. H. NISSAN, F. H. GARNER, *Viscosity of soap-in-hydrocarbon systems*, *J. Inst. Petroleum*, **33** (1947), 71-102.
12. K. WEISSENBERG, *Abnormal substances and abnormal phenomena of flow*, *Proc. Int. Congr. Rheol.*, (1948); I, 1949, 29-46.
13. C. BARUS, *Isothermals, isopiestic and isometrics relative to viscosity*, *Amer. J. Sci.*, **45** (1893), 87-96.
14. A. C. MERRINGTON, *Measurements of anomalous viscosity by the capillary tube method*, *Nature*, **152** (1943), 214-215.
15. *Man-Made Fibers. Science and Technology*, vol. 1. Pod red. H. F. MARKA, G. M. ATLASA i E. CERNII, New-York-London-Sydney 1967.
16. W. NOLL, *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **2** (1958), 197-226.
17. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *Simple fluids with fading memory*, *Proc. Int. Symp. Second-order Effects*, Haifa (1962), New York 1964, 530-552.
18. J. G. OLDROYD, *On the formulation of rheological equations of state*, *Proc. Roy. Soc.*, **A200** (1950), 523-541.
19. B. D. COLEMAN, *Thermodynamics of materials with memory*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **17** (1964), 1-46.

20. C. C. WANG, *A general theory of subfluids*, Arch. Rational Mech. Anal., **20** (1965), 1–40.
21. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics*, Arch. Rational Mech. Anal., **6** (1960), 355–370.
22. B. D. COLEMAN, *Kinematical concepts with applications in the mechanics and thermodynamics of incompressible viscoelastic fluids*, Arch. Rational Mech. Anal., **9** (1962), 273–300.
23. H. MARKOVITZ, *Normal stress functions from Couette flow measurements*, J. Polymer Sci., **B3** (1965), 3–5.
24. K. WEISSENBERG, *Specification of rheological phenomena by means of a rheogoniometer*, Proc. Int. Congr. Rheol., (1948), II, 1949, 114–118.
25. H. MARKOVITZ, D. R. BROWN, *Normal stress measurements on a polyisobutylene-cetane solutions in parallel plate and cone plate instruments*, Proc. Int. Symp. Second-order Effects, Haifa (1962), New York 1964, 585–602.
26. A. JOBLING, J. E. ROBERTS, *An investigation, with the Weissenberg rheogoniometer, of the stress distribution in flowing polyisobutylene solutions at various concentrations and molecular weights*, J. Polymer Sci., **36** (1959), 433–441.
27. H. W. GREENSMITH, R. S. RIVLIN, *Measurements of the normal stress effect in solutions of polyisobutylene*, J. Amer. Chem. Soc., **73** (1951), 1901–1904.
28. H. MARKOVITZ, *Normal stress measurements on polymer solutions*, Proc. Int. Congr. Rheol., **1** (1963), New York 1965, 189–212.
29. H. MARKOVITZ, *The normal stress effect in steady torsional flow, predicted and experimental values*, Phys. Fluids, **8** (1965), 200.
30. J. W. HAYES, R. I. TANNER, *Measurements of the second normal stress difference in polymer solutions*, Proc. Int. Congr. Rheol., **3**, (1963), New York 1965, 389–399.
31. J. E. ERICKSEN, *Overdetermination of the speed in rectilinear motion of non-Newtonian fluids*, Quart. Appl. Math., **14** (1956) 318–321.
32. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *Steady flow of non-Newtonian fluids through tubes*, Quart. Appl. Math., **14** (1956), 299–308.
33. W. E. LANGLOIS, R. S. RIVLIN, *Slow steady-state flow of viscoelastic fluids through non-circular tubes*, Rend. Mat., **22** (1963), 164–185.
34. R. S. RIVLIN, *Second and higher order theories for the flow of a viscoelastic fluid in a non-circular pipes*, Proc. Int. Symp. Second-order Effects, Haifa (1962), New York 1964, 668–677.
35. R. S. RIVLIN, *The relation between the flow of non-Newtonian fluids and turbulent Newtonian fluids*, Quart. Appl. Math., **15** (1957), 212–215.
36. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *Steady extension of incompressible simple fluids*, Phys. Fluids, **5** (1962), 840–843.
37. R. S. RIVLIN, J. E. ERICKSEN, *Stress-deformation relations for isotropic materials*, J. Rational Mech. Anal., **4** (1955), 323–425.
38. A. J. M. SPENCER, R. S. RIVLIN, *The theory of matrix polynomials and application to the mechanics of isotropic continua*, Arch. Rational Mech. Anal., **2** (1959), 309–336.
39. A. J. M. SPENCER, R. S. RIVLIN, *Finite integrity bases for five or fewer symmetric  $3 \times 3$  matrices*, Arch. Rational Mech. Anal., **2** (1959), 435–446.
40. Z. MOSSAKOWSKA, A. WESOŁOWSKI, S. ZAHORSKI, *Niezmienniczość w mechanice kontinuum materialnego*, Metody Geometryczne w Fizyce i Technice, Warszawa 1968, 241–261.
41. K. WALTERS, *The solution of flow problems in the case of materials with memory*, I, J. Mécanique, **1** (1962), 469.
42. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *The mechanics of non-linear materials with memory*, Arch. Rational. Mech. Anal., **1** (1957), 1–21.
43. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *Foundations of linear viscoelasticity*, Rev. Modern Phys., **33** (1961), 239–249.
44. R. S. RIVLIN, *Viscoelastic fluids*, Brown University Report, Div. Appl. Math., 1963.
45. C. TRUESDELL, *The natural time of a visco-elastic fluid: its significance and measurement*, Phys. Fluids, **7** (1964), 1134–1142.
46. B. D. COLEMAN, R. J. DUFFIN, V. J. MIZEL, *Instability, uniqueness, and non-existence theorems for the equation  $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$  on a strip*, Arch. Rational Mech. Anal., **19** (1965), 100–116.

47. C. TRUESDELL, *Fluids of the second grade regarded as fluids of convected elasticity*, Phys. Fluids, **8** (1965), 1936-1938.
48. F. J. LOCKETT, S. ZAHORSKI, *On fluids with convected elasticity*, The National Physical Laboratory Report, Ma. 71. April 1968.
49. S. ZAHORSKI, *Instability depending on elastic properties of fluids in plane steady shearing flows*, Arch. Mech. Stos., **21** (1969).
50. J. L. LUMLEY, *The Toms phenomenon: anomalous effects in turbulent flow of dilute solutions of high molecular weight linear polymers*, Appl. Mech. Rev., **20** (1967), 1139-1149.
51. A. B. METZNER, M. G. PARK, *Turbulent flow characteristics of viscoelastic fluids*, J. Fluid Mech., **20** (1964), 291-303.
52. P. S. VIRK, E. W. MERRIL, H. S. MICKLEY, K. A. SMITH, E. L. MOLLO-CHRISTENSEN, *The Toms phenomenon: turbulent flow of dilute polymer solutions*, J. Fluid Mech., **30** (1967), 305, 328.
53. B. D. COLEMAN, M. E. GURTIN, *On the stability against shear waves of steady flows in non-linear viscoelastic fluids*, J. Fluid Mech., **33** (1968), 165-181.
54. S. ZAHORSKI, *Role of elasticity stratification in two-layer flows down an inclined plane*, Arch. Mech. Stos., **21** (1969) (w druku).
55. C. F. CHAN MAN FONG, K. WALTERS, *The solution of flow problems in the case of materials with memory. II. The stability of plane Poiseuille flow of slightly viscoelastic liquids*, J. Mécanique, **4** (1965), 439-553.
56. C. S. YIH, *Stability of a non-newtonian liquid film flowing down an inclined plane*, Phys. Fluids, **8** (1965), 1257-1262.
57. A. S. GUPTA, *Stability of a viscoelastic liquid film flowing down an inclined plane*, J. Fluid Mech., **28** (1967), 17-28.
58. D. H. CHUN, W. H. SCHWARZ, *Stability of a plane Poiseuille flow a second order fluid*, Phys. Fluids, **11** (1968), 5-9.
59. A. T. ЛИСТРОВ, *Об устойчивости параллельных течений неньютоновских сред*, ДАН СССР, **164** (1965), 1001-1004.
60. F. J. LOCKETT, *On the Squire's theorem*, Proc. Int. Congr. Rheol., Kyoto (1968), w druku.
61. C. S. YIH, *Stability of liquid flow down an inclined plane*, Phys. Fluids, **6** (1963), 321-334.
62. A. D. D. CRAIK, *A note on the static stability of an elasticoviscous fluid*, J. Fluid Mech., **33** (1968), 33-38.
63. T. W. KAO, *Stability of two-layer viscous stratified flow down an inclined plane*, Phys. Fluids, **8** (1965), 812-820.
64. C. S. YIH, *Instability due to viscosity stratification*, J. Fluid Mech., **27** (1968), 337-352.
65. T. W. KAO, *Role of viscosity stratification in the stability of two layer flow down an incline*, J. Fluid Mech., **33** (1968), 561-572.
66. T. B. BENJAMIN, *Effects of surface contamination on wave formation in falling liquid films*, Arch. Mech. Stos., **16** (1964), 615-626.
67. B. A. TOMS, *Detection of a wall effect in laminar flow of solutions of linear polymers*, J. Colloid Sci., **4** (1949), 511-521.
68. J. J. BENBOW, R. V. CHARLEY, P. LAMB, *Unstable flow of molten polymers*, Nature, **192** (1961), 223-225.

## Резюме

## НЕНЬЮТОНОВСКИЕ ЖИДКОСТИ В СВЕТЕ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Возрастающий интерес к неньютоновским жидкостям, механические свойства которых значительно отличаются от свойств классических жидкостей, тесно связан с научными и промышленными нуждами. В настоящей работе дается обзор наиболее существенных теоретических и экспериментальных результатов, полученных на основе механики сплошных сред. Многочисленные вопросы как напр. структурные методы, термодинамика и теплопередача, диффузия, возмущенное течение и др. не вошли в обзор наравне с вопросами инфинитезимальной вязкоупругости.

В начале работы представлены ограничения классической теории Навье-Стокса, которая справедлива лишь для ньютоновских жидкостей. Затем представлена более подробно теория несжимаемых простых жидкостей в применении к вискометрическим течениям. Обсуждаются также другие виды течений для упрощенных моделей жидкостей. В одном из дальнейших разделов представлена общая классификация жидкостей непосредственно, или косвенно, связанных с простыми жидкостями. Кратко рассмотрены т. наз. жидкости второго порядка и жидкости с конвективной упругостью. Наконец обсуждены некоторые вопросы устойчивости, особенно для случая плоских установившихся течений со сдвигом.

### Summary

#### NON-NEWTONIAN LIQUIDS IN THE LIGHT OF CONTINUUM MECHANICS

The growing interest in non-Newtonian liquids, the mechanical behaviour of which considerably differs from that of classical liquids, remains in close connection with scientific and industrial purposes. The present paper gives a general survey of the most important results achieved so far on the basis of continuum mechanics. Many problems of more specialized validity, e.g. structural methods, thermodynamics and heat transfer, diffusion, turbulent flows etc., are not included into the survey as well as the problems of infinitesimal linear viscoelasticity.

The paper begins with presentation of some limitations of the classical theory of Navier-Stokes valid only to Newtonian liquids. Next, the theory of incompressible simple fluids as applied to the class of viscometri flows is developed in greater detail. Some other types of flows for simplified models are also discussed. A general classification of liquids directly or indirectly related to incompressible simple fluids is presented in one of further sections. So called fluids of the second grade and fluids with convected elasticity are briefly outlined. At the end of the paper some problems of stability are discussed, especially for the case of plane steady shearing flows.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN  
WARSZAWA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1969 r.*

---