

PRZYKŁADY MODELOWANIA ELEKTRYCZNEGO WARUNKÓW BRZEGOWYCH
I POCZĄTKOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH WYSTĘPUJĄCYCH
W ZAGADNIENIACH MECHANIKI

ALEKSANDER LISOWSKI (KRAKÓW)

W pracy [4] podał autor podstawy modelowania w sieci elektrycznej równań różniczkowych liniowych zwyczajnych i cząstkowych o współczynnikach stałych i pochodnych rzędu parzystego. Obecnie rozważonych będzie kilka typów równań występujących często w zagadnieniach technicznych: równanie Laplace'a, równania Lamégo oraz równanie falowe i równanie drgań swobodnych. Podane będą przykłady elektrycznego modelowania równań z uwzględnieniem warunków brzegowych i początkowych.

1. Przykłady zastosowań równań różniczkowych do zagadnień mechaniki

1.1. Równanie drgań swobodnych nietłumionych. Rozpatrzmy równanie różniczkowe drugiego rzędu o postaci

$$(1.1) \quad m \frac{d^2 \eta}{dt^2} + k \eta = 0,$$

gdzie m — masa drgającego ciała o jednym stopniu swobody, η — wychylenie od położenia równowagi, k — wartość siły powodującej jednostkowe ugięcie. Równanie (1.1) napisane dla punktu i w zapisie różnicowym przyjmie postać

$$(1.2) \quad \frac{m}{\Delta t^2} \eta_{i-1} - \left(\frac{2m}{\Delta t^2} - k \right) \eta_i + \frac{m}{\Delta t^2} \eta_{i+1} = 0.$$

Pisząc równania dla kolejnych momentów o odstępnie czasu Δt otrzymamy

$$(1.2a) \quad \begin{aligned} \text{dla } t_0 = 0 \quad & \frac{m}{\Delta t^2} \eta_1 - \left(\frac{2m}{\Delta t^2} - k \right) \eta_0 + \frac{m}{\Delta t^2} \eta_1 = 0, \\ \text{dla } t_1 = 1\Delta t \quad & \frac{m}{\Delta t^2} \eta_0 - \left(\frac{2m}{\Delta t^2} - k \right) \eta_1 + \frac{m}{\Delta t^2} \eta_2 = 0, \\ \text{dla } t_2 = 2\Delta t \quad & \frac{m}{\Delta t^2} \eta_1 - \left(\frac{2m}{\Delta t^2} - k \right) \eta_2 + \frac{m}{\Delta t^2} \eta_3 = 0 \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Przyjmując warunki początkowe dla $t = 0$, mianowicie

$$(1.2b) \quad \eta_{(0)} = \eta_0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\Delta\eta_0}{\Delta t} = \frac{\eta_1 - \eta_{1'}}{2\Delta t} = C,$$

otrzymamy z równania pierwszego (1.2a) wartość wychylenia η_1 (w czasie t_1), następnie z równania drugiego (1.2a) — wychylenie η_2 , z równania trzeciego (1.2a) — wychylenie η_3 itd. Niżej podamy przykład konkretny.

Przykład 1.1. Zmodelować w sieci równania drgań swobodnych (1.2) oraz obliczyć kolejne wychylenia masy, przyjmując dane układu ($m = P/g$, gdzie g przyspieszenie ziemskie 981 cm/sek^2)

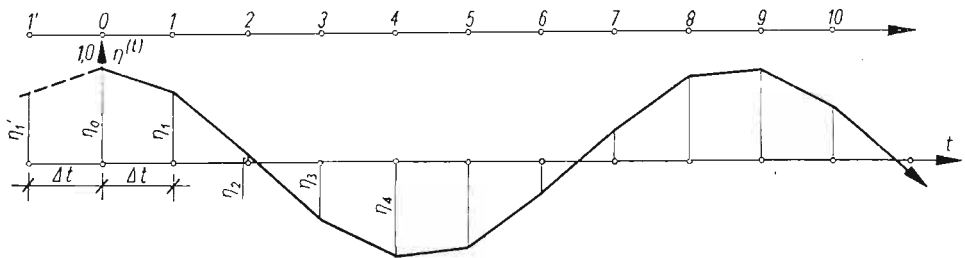
$$(1.2c) \quad \frac{m}{\Delta t^2} = 1 \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}} \cdot \frac{\text{sek}^2}{\text{sek}^2} \right] \quad \text{i} \quad k = 0,5 \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}} \right]$$

oraz warunki początkowe

$$(1.2d) \quad \eta_0 = 1 [\text{cm}] \quad \text{i} \quad \eta'_0 = 0.$$

Uwzględniając (1.2c) w równaniu (1.2) otrzymamy

$$1\eta_{i-1} - 1,5\eta_i + 1\eta_{i+1} = 0.$$



Rys. 1. Wykres drgań swobodnych masy do przykładu 1.1

Z drugiego warunku (1.2b)

$$\frac{\eta_1 - \eta_{1'}}{2\Delta t} = 0;$$

z uwzględnieniem (1.2d) otrzymamy związek określający wychylenie w pomocniczym punkcie I' (patrz rys. 1)

$$(1.2e) \quad \eta_{1'} = \eta_1.$$

Uwzględniając (1.2d) i (1.2e) w równaniach (1.2a) otrzymamy wychylenie masy w kolejnych odstępach czasu, mianowicie

$$\begin{aligned} \eta_0 &= 1 \text{ cm}, & \eta_1 &= 0,75 \text{ cm}, & \eta_2 &= 0,125 \text{ cm}, & \eta_3 &= -0,5625 \text{ cm}, & \eta_4 &= -0,96875 \text{ cm}, \\ \eta_5 &= -0,89062 \text{ cm}, & \eta_6 &= -0,36719 \text{ cm}, & \eta_7 &= 0,33984 \text{ cm}, & \eta_8 &= 0,87695 \text{ cm}, \\ & & & & & & \eta_9 &= 0,97559 \text{ cm} \text{ itd.} \end{aligned}$$

Wykres podany na rys. 1 przedstawia wychylenie masy. Jak wiadomo, rozwiązanie równania (1.1) przedstawia zależność sinusoidalną, co wyraźnie jest uwidocznione w otrzymanym przebiegu (jest to przypadek drgań niegasnących o stałej amplitudzie).

Przejdźmy do modelowania równań (1.2a) w sieci z uwzględnieniem warunków początkowych.

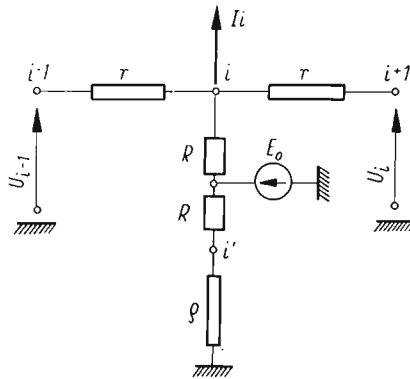
Przyjmijmy następujące współczynniki przeniesienia modelowego m_r i m_u ,

$$(1.2f) \quad r = \frac{\Delta t^2}{m} m_r, \quad \varrho = \frac{1}{k} m_r, \quad U_i = \eta_i m_u;$$

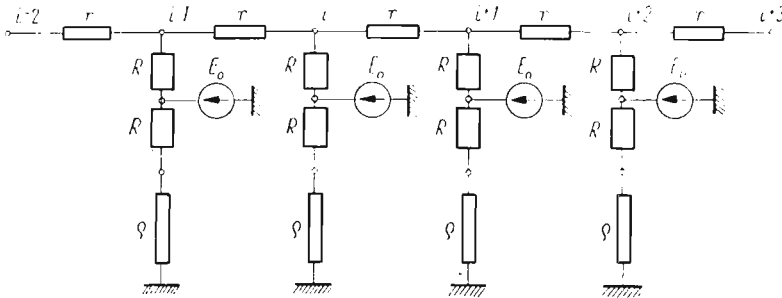
wówczas równanie (1.2) można zapisać w postaci

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{r} + \frac{U_i}{\varrho} = 0.$$

Układ sieci spełniający powyższe równanie podany jest na rys. 2.



Rys. 2. Elektryczny model równania różnicowego drgań swobodnych nietłumionych



Rys. 3. Elektryczny model układu różnicowego drgań przy założonym odstępzie Δt

Wstawiona siła elektromotoryczna E_0 ma za zadanie wyrównanie potencjałów i oraz i' . Dołączony do węzła prąd I_i modeluje obciążenie zewnętrzne [np. siłę wymuszającą w równaniu $m \frac{d^2\eta}{dt^2} + k\eta = P(t)$]. Dla przedstawienia układu równań (1.2a) należy odpowiednie schematy modelujące poszczególne równania odpowiednio połączyć ze sobą (patrz rys. 3).

Przejdźmy do modelowania warunków początkowych. Jako warunki początkowe zadania przyjmujemy, że w chwili $t = 0$ znane jest wychylenie η_0 oraz prędkość η'_0 . Uwzględniając (1.2e) oraz (1.2f) otrzymamy wartości napięć modelujące wychylenia masy

$$(1.2g) \quad U_0 = \eta_0 m_u \text{ oraz } U_{1'} = U_1 = \eta_1 m_u.$$

Do dalszych rozważań przyjmujemy wartości współczynników przeniesienia

$$(1.2h) \quad m_r = 100 \left[\frac{\text{cm}}{\text{kG}} \cdot \Omega \right] \text{ oraz } m_u = 1 \left[\frac{\text{V}}{\text{cm}} \right].$$

Ze znanej zależności $m_u = m_i m_r$ obliczymy współczynnik przeniesienia prądowego

$$(1.2i) \quad m_i = 0,01 \left[\frac{\text{kG} \cdot \text{A}}{\text{cm}^2} \right].$$

Obecnie określić możemy wielkości wchodzące w obwód sieci. Podstawiając do (1.2f) otrzymamy

$$(1.2j) \quad r = \frac{\Delta t^2}{m} m_r = 1 \left[\frac{\text{cm}}{\text{kG}} \right] \cdot 100 \left[\frac{\text{cm}}{\text{kG}} \cdot \Omega \right] = 100 \Omega, \quad \varrho = \frac{1}{k} m_r = 200 \Omega,$$

$$(1.2k) \quad U_0 = \eta_0 m_u = 1 [\text{cm}] \cdot 1 \left[\frac{\text{V}}{\text{cm}} \right] = 1 \text{ V};$$

dotatkowo zakładamy $R = 1000 \Omega$.

Modelując równanie różnicowe drgań poczynając od punktu 0 należy do tego węzła przyłożyć napięcie U_0 (w rozpatrywanym przypadku — 1 V) modelujące wychylenie początkowe. Drugi warunek uzyskamy rozpisując pierwsze równanie (1.2a), które z uwzględnieniem przyjętych wielkości (1.2f) i (1.2c) — przyjmie postać

$$1 U_{1'} - (2 - 0,5) U_0 + 1 U_1 = 0.$$

Uwzględniając ponadto warunki początkowe ($U_{1'} = U_1$ oraz $U_0 = 1 \text{ V}$) otrzymamy

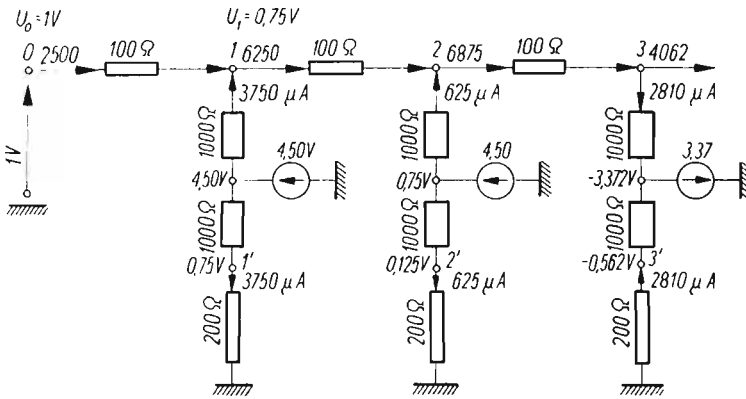
$$(1.2l) \quad U_1 = \frac{1,5 U_0}{2} = 0,75 \text{ V}.$$

Układ sieci poczynając od punktu 0 podany został na rys. 4. Po zasileniu układu napięciem równym 1 V tak manipulujemy siłą elektromotoryczną E_0 należącą do węzła 1, aby uzyskać w węźle siatki dolnej 1' napięcie równe 0,75 V. Następnie przechodzimy do węzła 2 i tak regulujemy napięciem E_0 (należącym do tego węzła), aby potencjały po obu stronach oporów R węzłów 1 i 1' zrównały się ze sobą. Dokonujemy pomiaru w węźle 2 i na to zmierzone napięcie ustalamy (ponownie regulując siłą elektromotoryczną E_0) potencjał węzła 2'. Przechodzimy następnie do siły elektromotorycznej E_0 należącej do węzła 3, którą ustalamy z warunku zrównania potencjałów w węzłach 2 i 2' i opisaną poprzednio czynność powtarzamy. W opisany sposób otrzymuje się rozkład prądów w sieci, przy czym napięcia w węzłach górnej (lub dolnej) siatki z uwzględnieniem współczynników (1.2h) określają wartość wychylenia masy w kolejnych odstępach czasu (1.2g).

Rozkład napięć i wartości prądów dla kilku pierwszych punktów rozważanego przykładu podany został na rys. 4.

Przykład 1.2. Zmodelować układ według danych przykładu poprzedniego, przyjmując warunki początkowe

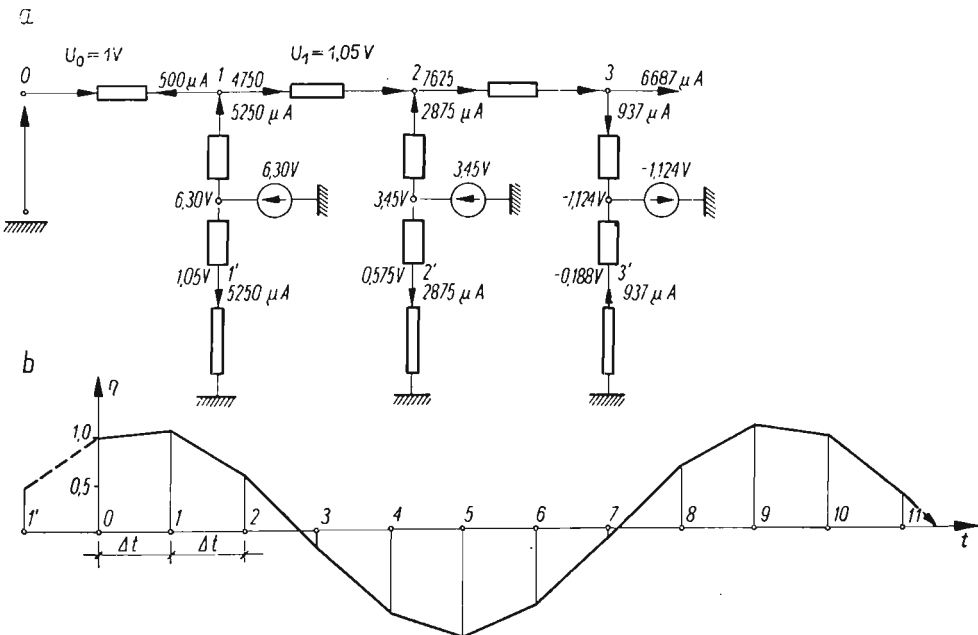
$$(1.2f) \quad \eta_0 = 1 \text{ cm}, \quad \eta'_0 = \frac{0,3}{\Delta t} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{sek}}.$$



Rys. 4. Elektryczny model układu równania drgań według danych przykładu 1.1

Z ostatniego warunku otrzymamy $\eta_1 = \eta_0 - 0,6$. Piszemy równanie różnicowe (1.2) dla punktu początkowego

$$\frac{m}{\Delta t^2} \eta_1 - \left(\frac{2m}{\Delta t^2} - k \right) \eta_0 - \frac{m}{\Delta t^2} \eta_1 = 0.$$



Rys. 5. Elektryczny model równania drgań oraz wykres drgań swobodnych masy do przykładu 1.2

Uwzględniając dane zadania (1.2c) oraz warunki początkowe (1.2f) w równaniu $\eta_1 - 1,5\eta_0 + \eta_1 = 0$ otrzymamy $\eta_1 = 1,05$ cm.

Przyjmując współczynniki przeniesienia takie jak w zadaniu poprzednim (1.2f) otrzymano wielkości napięć dla punktów początkowych $U_0 = 1$ V i $U_1 = 1,05$ V, a wielkości napięć z pomiarów na analogu

$$U_2 = 0,575 \text{ V}, \quad U_3 = -0,188 \text{ V}, \quad U_4 = -0,856 \text{ V}, \quad U_5 = -1,097 \text{ V}, \\ U_6 = -0,789 \text{ V}, \quad U_7 = -0,087 \text{ V}, \quad U_8 = 0,659 \text{ V}, \quad U_9 = 1,075 \text{ V itd.}$$

Układ sieci, warunki początkowe oraz wartości napięć i rozdział prądów podany został dla kilku początkowych punktów sieci na rys. 5a. Wykres drgań podano na rys. 5b. Z wykresu widać, że w chwili początkowej zachodzi ruch masy w kierunku dodatnich wychyleń i po osiągnięciu wartości $\eta_{\max} \cong 1,1$ cm nastąpi ruch w kierunku przeciwnym.

W odróżnieniu do wykresu podanego na rys. 1, fazy ruchu są przesunięte oraz ruch następuje przy większej amplitudzie, natomiast częstotliwość drgań, która nie zależy od warunków początkowych, została ta sama.

1.2. Równanie drgań struny. Rozpatrzmy równanie falowe

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \eta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

jako zagadnienie jednowymiarowe (odpowiadać to będzie drganiom poprzecznym struny)

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0.$$

W zapisie różnicowym

$$(1.4) \quad \frac{\Delta^2 \eta}{\Delta x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\Delta^2 \eta}{\Delta t^2} = 0.$$

Równanie powyższe rozpisane dla punktu i, j (patrz rys. 6a) przyjmie postać

$$(1.5) \quad \frac{1}{\Delta x^2} (\eta_{i-1,j} - 2\eta_{i,j} + \eta_{i+1,j}) - \frac{1}{c^2 \Delta t^2} (\eta_{i,j-1} - 2\eta_{i,j} + \eta_{i,j+1}) = 0.$$

Układ sieci spełniający powyższe równanie podany jest na rys. 6b. Napięcie modelować będzie (jak poprzednio) wychylenie, a oporności — parametry równania według wzorów

$$(1.5a) \quad U_{i,j} = \eta_{i,j} m_u,$$

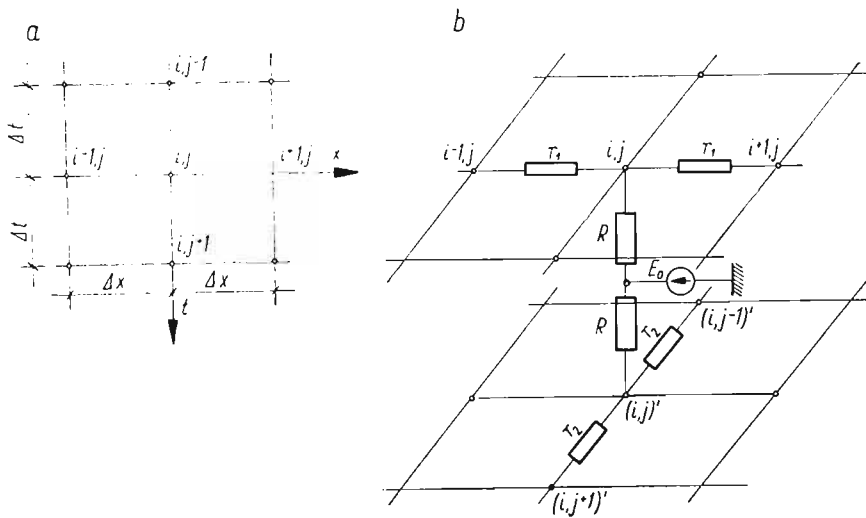
$$(1.5b) \quad r_1 = \frac{\Delta x^2}{l} m_r, \quad r_2 = \frac{c^2 \Delta t^2}{l} m_r.$$

Układ sieci modelującej równanie (1.4) omówimy na przykładzie konkretnym.

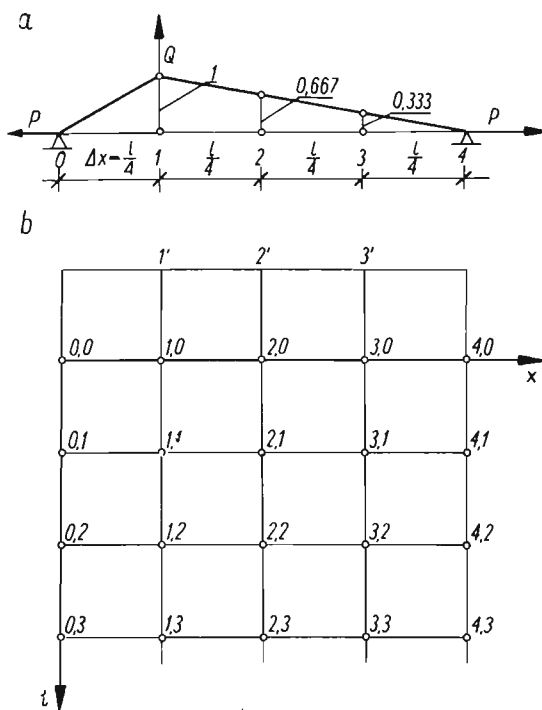
P r z y k ł a d 1.3. Określić wychylenia punktów węzłowych struny stosując podział na 4 równe części, przyjmując stan początkowy przy obciążeniu struny siłą w punkcie 1 według rys. 7a.

Jako dane zadania przyjęto

$$(1.5c) \quad \frac{1}{\Delta x^2} = 1 \frac{1}{\text{cm}^2}, \quad \frac{1}{c^2 \Delta t^2} = 1,5 \frac{1}{\text{cm}^2}.$$



Rys. 6. Oznaczenia punktów oraz model elektryczny równania drgań struny



Rys. 7. Warunki początkowe drgań struny oraz oznaczenia punktów do przykładu 1.3

Równanie (1.5) przyjmie zatem postać

$$(1.5d) \quad \eta_{i-1,j} + \eta_{i,j} + \eta_{i+1,j} - 1,5\eta_{i,j-1} - 1,5\eta_{i,j+1} = 0.$$

Zgodnie z rys. 7a przyjmujemy wychylenia początkowe (dla $t = 0$)

$$(1.5e) \quad \eta_{1,0} = 1 \text{ cm}, \quad \eta_{2,0} = 0,667 \text{ cm}, \quad \eta_{3,0} = 0,333 \text{ cm}.$$

Warunki brzegowe określają w dowolnej chwili zerowe wychylenia struny na podporach

$$(1.5f) \quad \eta_{0,t} = 0, \quad \eta_{4,t} = 0.$$

Jako dodatkowe warunki początkowe przyjęto zerowe prędkości punktów 1, 2, 3 w chwili, od której będziemy mierzyć czas, czyli dla $t = 0$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \frac{\partial \eta_2}{\partial t} = \frac{\partial \eta_3}{\partial t} = 0.$$

Z zależności ostatnich wynika

$$(1.5g) \quad \eta_{1'} = \eta_{1,1}, \quad \eta_{2'} = \eta_{2,1}, \quad \eta_{3'} = \eta_{3,1},$$

gdzie $\eta_{i'}$ oznacza teoretyczne wychylenie punktu i dla $t = -\Delta t$. Napiżemy równania (1.5d) dla punktów 1, 2 i 3 dla chwili $t = 0$

$$(1.5h) \quad \begin{aligned} \text{dla punktu 1} & \quad 0 + 1 + 0,667 - 1,5\eta_{1'} - 1,5\eta_{1,1} = 0, \\ \text{dla punktu 2} & \quad 1 + 0,667 + 0,333 - 1,5\eta_{2'} - 1,5\eta_{2,1} = 0, \\ \text{dla punktu 3} & \quad 0,667 + 0,333 + 0 - 1,5\eta_{3'} - 1,5\eta_{3,1} = 0, \end{aligned}$$

gdzie np. $\eta_{1'}$ oznacza wychylenie punktu 1 w chwili $t = -\Delta t$ oraz $\eta_{1,1}$ — dla chwili $t = \Delta t$.

Uwzględniając zależności (1.5g) wynikłe z założonych warunków początkowych z równań (1.5h) obliczymy

$$(1.5i) \quad \eta_{1,1} = 0,555, \quad \eta_{2,1} = 0,667, \quad \eta_{3,1} = 0,333.$$

Oznaczając wychylenia poszczególnych punktów układu w czasie zgodnie z rys. 7b otrzymano wartości dalszych wychyleń

$$\begin{aligned} \eta_{1,2} &= -0,185, & \eta_{2,2} &= 0,370, & \eta_{3,2} &= 0,333, \\ \eta_{1,3} &= -0,431, & \eta_{2,3} &= -0,320, & \eta_{3,3} &= 0,135, \\ \eta_{1,4} &= -0,316, & \eta_{2,4} &= -0,782, & \eta_{3,4} &= -0,457, \text{ itd.} \end{aligned}$$

Przejdźmy do modelowania układu w sieci elektrycznej. Przyjmujemy następujące współczynniki przeniesienia

$$m_r = 150 \Omega/\text{cm}^2, \quad m_u = 1 \text{ V/cm},$$

wówczas

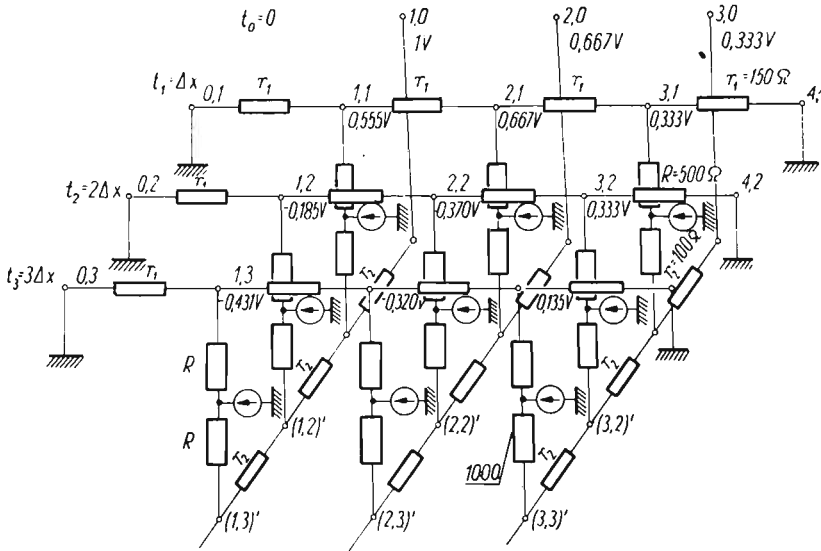
$$r_1 = \frac{\Delta x^2}{1} m_r = 150 \Omega, \quad r_2 = \frac{c^2 \Delta t^2}{1} m_r = 100 \Omega.$$

Dodatkowo zakładamy $R = 500 \Omega$.

Układ sieci dla kilku początkowych chwil (w odstępach czasu Δt) podany jest na rys. 8.

Rozwiązując układ na drodze eksperymentalnej najpierw modelujemy warunki początkowe przykładając do punktów 1, 0; 2, 0 i 3, 0 napięcia odpowiednio $U_{1,0} = 1 \text{ V}$, $U_{2,0} =$

$= 0,667 \text{ V}$, $U_{3,0} = 0,333 \text{ V}$, zgodnie z przyjętymi wychyleniami początkowymi (1.5e). Wychylenia końców struny w dowolnym czasie są równe zero, co uzyskujemy podłączając do masy węzły 0,1; 0,2; 0,3 itd. oraz 4,1; 4,2; 4,3 itd.



Rys. 8. Elektryczny model układu równania różnicowego drgań struny według danych przykładu 1.3

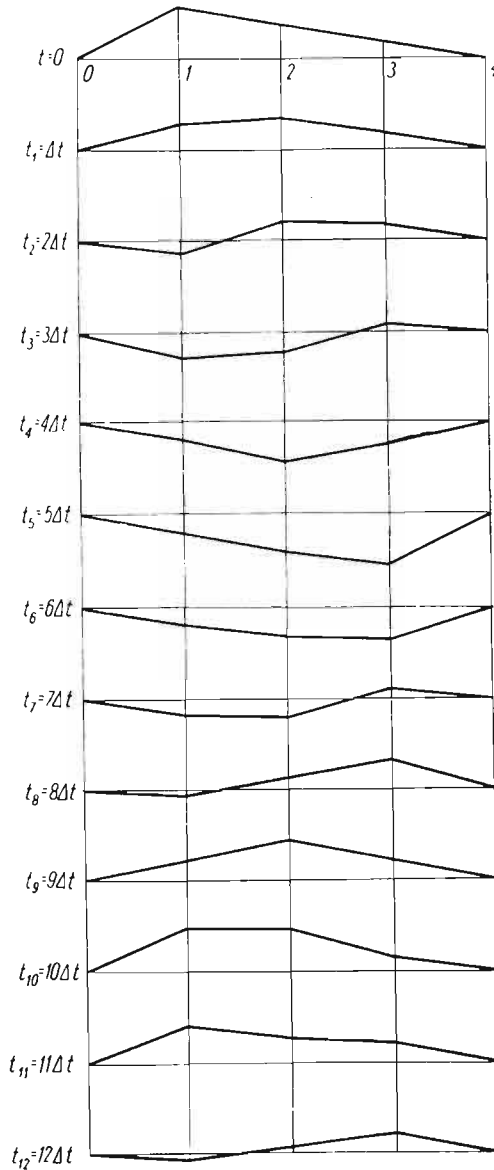
Warunek początkowych prędkości ujęty jest w zależności (1.5i). Modelowanie tych wartości w elektrycznym analogu uzyskujemy w ten sposób, że tak regulujemy wartościami sił elektromotorycznych E_0 należących do węzłów 1,1, 2,1 i 3,1, aby uzyskać w tych węzłach wymagane napięcia w stosunku do masy równe

$$U_{1,1} = 0,555 \text{ V}, \quad U_{2,1} = 0,667 \text{ V} \quad \text{oraz} \quad U_{3,1} = 0,333 \text{ V}.$$

Po ustaleniu wyjściowych napięć w węzłach górnych dla chwil t_0 oraz t_1 (patrz rys. 8) przechodzimy do zasilania węzłów (włączania sił elektromotorycznych E_0) dla chwili t_2 poczynając np. od węzła 1,2. Tak regulujemy zmienną siłą E_0 należącą do węzła 1,2, aby wyrównać różnicę napięć pomiędzy węzłami 1,1 i (1,1)' górnej i dolnej siatki. Dalej przechodzimy do siły E_0 węzła 2,2, której wartość ustalamy z warunku wyrównania potencjałów 2,1 i (2,2)'. Opisaną czynność powtarzamy dla węzła 3,2. Po skontrolowaniu, czy warunki równowartości potencjałów odpowiednich węzłów górnej i dolnej siatki są spełnione dla chwili t_1 , przechodzimy do ustalenia sił elektromotorycznych E_0 dla węzłów chwili t_3 z warunku wyrównania potencjałów górnych i dolnych węzłów chwili t_2 . Opisaną czynność powtarzamy dla dalszych następujących chwil.

Wynik przykładu dla dwunastu chwil podany jest na rys. 9. Z przebiegu kolejnych wykresów widać ciekawy przebieg odkształceń, gdy od chwili początkowej t_0 punkt 1 o największym wychyleniu uzyskuje największy przyrost prędkości powodując wygięcie struny w stronę przeciwną, podczas gdy pozostałe punkty mają jeszcze wychylenie dodatnie (dla $t = 2\Delta t$). Dalej następuje ruch w dalszym ciągu do dołu z tym, że dla $t = 5\Delta t$ uzyskujemy

niemal antysymetryczną postać podkształcenia w stosunku do schematu wyjściowego. Dalej cykl powtarza się powodując ruch poszczególnych punktów w górę.



Rys. 9. Postacie drgań stringi w kolejnych odstępach czasu Δt

1.3. Równanie zginania płyt cienkich. Ugięcia $w(x, y)$ powierzchni środkowej płyty spełniają równanie biharmoniczne

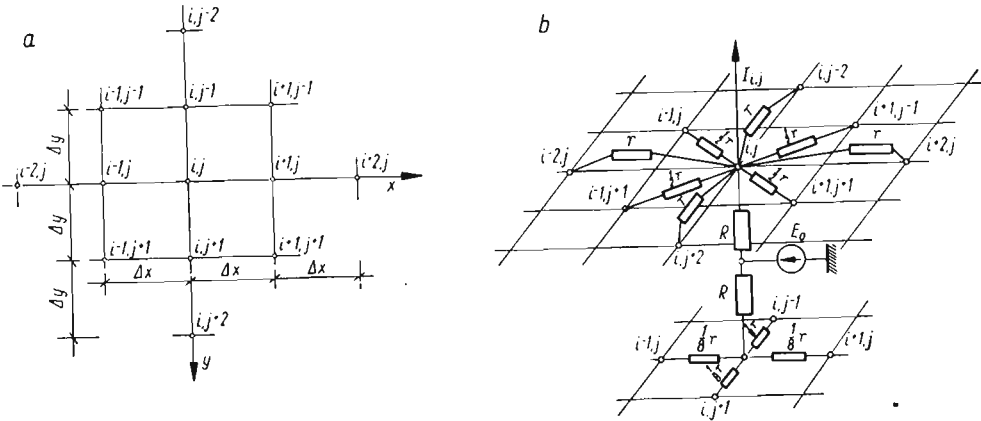
$$(1.6) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}.$$

W zapisie różnicowym

$$(1.7) \quad \frac{\Delta^4 w_{i,j}}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta^4 w_{i,j}}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w_{i,j}}{\Delta y^4} = \frac{Q_{i,j}}{D}$$

Rozpisując powyższe równanie dla punktu i, j (patrz rys. 10a) oraz przyjmując dodatkowe uproszczenie, że $\Delta x = \Delta y$, otrzymamy

$$(1.8) \quad 20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} + w_{i,j-1} + w_{i+1,j} + w_{i,j+1}) + 2(w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1}) + w_{i-2,j} + w_{i,j-2} + w_{i+2,j} + w_{i,j+2} = \frac{q_{i,j} \Delta x^4}{D}$$



Rys. 10. Elektryczny model równania różnicowego płyty i oznaczenia punktów siatki

Widzimy, że współczynniki występujące przy ugięciach punktów sąsiednich tworzą układ symetryczny względem punktu centralnego i, j . Elektryczny model równania płyty podany został na rys. 10b. Odpowiednie zależności, pozwalające modelować w sieci elektrycznej równanie płyty wynoszą

$$(1.9) \quad r = \frac{\Delta x^4}{D} m_r, \quad I_{i,j} = q_{i,j} m_i, \quad U_{i,j} = w_{i,j} m_u$$

Między współczynnikami przeniesienia istnieje znana zależność

$$(1.10) \quad m_u = m_i m_r$$

Przejdźmy do modelowania warunków brzegowych.

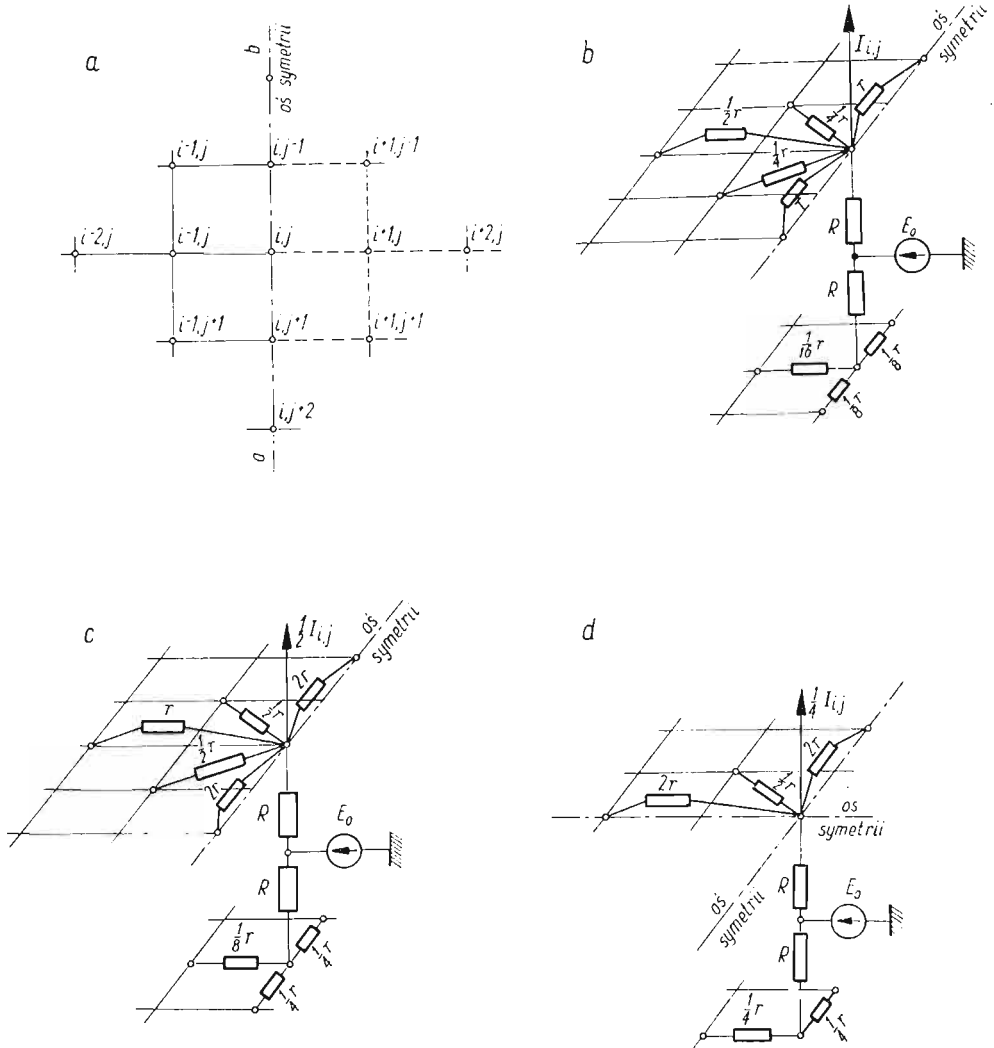
1.3.1. *Powierzchnia odkształcenia płyty posiada oś symetrii a-b* (rys. 11a). Wówczas z warunku symetrii można przyjąć

$$(a) \quad w_{i+1,j-1} = w_{i-1,j}, \quad w_{i+1,j} = w_{i-1,j}, \quad w_{i+2,j} = w_{i-2,j}, \quad w_{i+1,j+1} = w_{i-1,j+1}$$

Uwzględniając powyższe zależności w (1.8) otrzymamy równanie

$$(1.11) \quad \frac{D}{\Delta x^4} [20w_{i,j} - 8(2w_{i-1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + 2(2w_{i-1,j} + 2w_{i-1,j+1}) + 2w_{i-2,j} + w_{i,j-2} + w_{i,j+2}] = q_{i,j}$$

którego model, zgodnie z oznaczeniami (1.9), podany został na rys. 11b. Biorąc pod uwagę powiązanie punktów położonych na osi symetrii z punktami wewnętrznymi (punkt i, j łączy się z punktami $i-2, j; i-1, j; i-1, j+1$ oraz węzłami dolnej siatki $i-1, j$) należy dążyć do tego, aby były równocześnie spełnione równania (1.8) i (1.9), czyli punkty te



Rys. 11. Modelowanie punktów położonych na osi symetrii

wynny łączyć się za pośrednictwem tych samych oporów. Możemy to uzyskać dzieląc wszystkie wyrazy równania (1.9) przez dwa — wówczas analogiem dla punktu położonego na osi symetrii będzie układ podany na rys. 11c.

Porównując schemat sieci podanej na rys. 10b oraz 11c widać, że przy modelowaniu siatki płyty przyjmować będziemy dla punktów wewnętrznych układy według schematu podanego na rys. 10b, a dopiero dla punktów położonych na osi symetrii odkształconej powierzchni płyty — układy wedle schematu podanego na rys. 11c.

W przypadku podwójnej symetrii względem osi x oraz y wynikają zależności

$$(b) \quad \begin{aligned} w_{i+2,j} &= w_{i-2,j}, & w_{i,j+2} &= w_{i,j-2}, \\ w_{i+1,j-1} &= w_{i+1,j+1} = w_{i-1,j+1} = w_{i-1,j}, & w_{i,j+1} &= w_{i,j-1}, & w_{i+1,j} &= w_{i-1,j}. \end{aligned}$$

Uwzględniając (b) w (1.11) otrzymamy równanie

$$(1.12) \quad 20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} \cdot 2 + w_{i,j-1} \cdot 2) + 2(w_{i-1,j} \cdot 4) + w_{i-2,j} \cdot 2 + w_{i,j-2} \cdot 2 = \frac{q_{i,j} \Delta x^4}{D},$$

w którym podzielimy wszystkie wyrazy przez cztery. Układ sieci modelującej równanie rozpisane dla punktu centralnego (przez który przechodzą obie osie symetrii) podano na rys. 11d.

Przejdźmy następnie do modelowania warunków brzegowych. Rozpatrzmy dwa najczęściej występujące przypadki — krawędź płyty oparta w sposób przegubowy oraz całkowicie utwierdzona.

1.3.2. *Krawędź swobodnie oparta na podporze.* Z warunku oparcia płyty wzdłuż jej krawędzi przyjmuje się, że ugięcia wzdłuż tej krawędzi są równe zeru. Dla przykładu rozpatrzmy krawędź $a-b$ płyty (patrz rys. 12a). Z warunku przylegania płyty do podpory można zapisać

$$(c) \quad w_a = w_{i+1,j-1} = w_{i+1,j} = w_{i+1,j+1} = w_b = 0.$$

Drugim warunkiem określającym przegubowy sposób podparcia jest zerowa wartość momentu zginającego w danym przypadku względem osi y .

$$(1.13) \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

W zapisie różnicowym dla węzła $i+1, j$ leżącego na krawędzi otrzymamy

$$(1.14) \quad M_{(i+1,j)y} = -D \left(\frac{w_{i,j} - 2w_{i+1,j} + w_{i+2,j}}{2\Delta x} + \nu \frac{w_{i+1,j-1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j+1}}{2\Delta y} \right) = 0.$$

Uwzględniając (c) otrzymamy

$$(d) \quad w_{i+2,j} = -w_{i,j}.$$

Równanie powierzchni odkształconej płyty (1.8) rozpisane dla punktu $i+1, j$ oddalonego o Δx od krawędzi opartej w sposób przegubowy z uwzględnieniem (c) i (d) przyjmie postać

$$\begin{aligned} 20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} + w_{i+1,j}) + 2(w_{i-1,j} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}) + \\ + w_{i-2,j} + w_{i,j-2} + w_{i,j+2} + w_{i+2,j} = \frac{q_{i,j} \Delta x^4}{D}. \end{aligned}$$

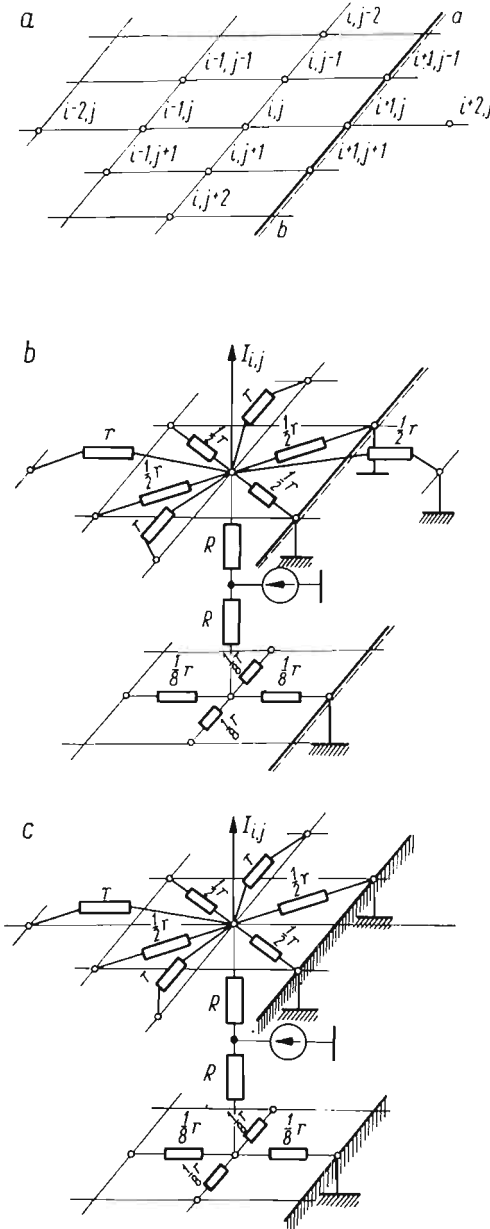
Uwzględnienie warunku zerowych ugięć na krawędzi podparcia prowadzi w modelu elektrycznym do zapewnienia tym węzłom zerowych potencjałów. Uzyskuje się to przez połączenie punktów $i+1, j-1$; $i+1, j+1$ i $i+1, j$ przewodem *bezoporowym* z masą (patrz rys. 12b).

Warunek (d) łatwo jest spełnić w sieci łącząc węzeł i, j z masą za pośrednictwem oporu równego $r/2$.

Łatwo sprawdzić, że wartość prądu łączącego węzły i, j i $i+2, j$, zgodnie z założeniem (d), wynosi

$$I = \frac{U_{i,j} - U_{i+2,j}}{r} = \frac{2U_{i,j}}{r} = \frac{U_{i,j}}{r/2},$$

co spełnia warunek brzegowy podany na rys. 12b.



Rys. 12. Modelowanie warunków brzegowych oparcia płyty na podporze pozwalającej na swobodny obrót oraz całkowicie utwierdzającej

1.3.3. *Krawędź całkowicie utwierdzona.* Rozpatrzmy jak wyżej krawędź równoległą do osi y .

Z warunków podparcia otrzymujemy

$$(e) \quad w_{i+1,j-1} = w_{i+1,j} = w_{i+1,j+1} = 0$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{w_{i,j} - w_{i+2,j}}{2\Delta x} = 0,$$

co prowadzi do zależności

$$(f) \quad w_{i+2,j} = w_{i,j}.$$

Przy spełnieniu warunku (f) nie popłynie prąd przez opór r łączący węzły i, j i $i+2, j$. W sieci elektrycznej najwygodniej to spełnić nie dając połączenia między tymi węzłami. Układ sieci podany dla węzła i, j oddalonego od Δx od krawędzi utwierdzającej podany został na rys. 12c.

W zakończeniu podamy kilka uwag dotyczących celowości modelowania w sieci elektrycznej równań różnicowych.

Zasadniczym zakresem stosowalności analogowych maszyn uniwersalnych jest rozwiązywanie równań różniczkowych. Maszyny analogowe mają tu tę wyższość nad cyfrowymi, że oprócz czterech działań arytmetycznych potrafią jako jedną operację wykonywać całkowanie, a w ograniczonych zastosowaniach — różniczkowanie. Maszyny analogowe, przez użycie członów całkujących i sumujących, zezwalają na modelowanie poszczególnych członów równania różniczkowego oraz otrzymanie w postaci wykresów lub odczytów cyfrowych zarówno ostatecznego rozwiązania, jak i wszystkich kolejnych pochodnych funkcji do rzędu najwyższej pochodnej równania włącznie [3].

Przedstawiony w pracy niniejszej sposób modelowania w sieci równań różnicowych wymaga montażu sieci złożonej ze znacznej nieraz liczby węzłów (wymaganej dla otrzymania wystarczająco dokładnego rozwiązania). Zmontowanie układu dla równania drgań swobodnych (1.1) czy tłumionych na maszynie uniwersalnej jest stosunkowo proste (przykład 1.1 i 1.2) i ma tę ponadto zaletę, że rozwiązanie uzyskuje się w postaci ciągłej funkcji. Jest jednak szereg takich zjawisk opisanych równaniami różniczkowymi, w których modelowanie równania jest kłopotliwe na maszynie uniwersalnej, a więc przede wszystkim w równaniach cząstkowych, które można rozwiązać stosując metodę różnic skończonych; wymaga to jednak z kolei dużej liczby wzmacniaczy operacyjnych. W takich przypadkach przedstawiony sposób może być szczególnie użyteczny, choćby przy rozwiązywaniu równań falowych (przykład 1.3) czy równania biharmonicznego. Dodatkowym aspektem, który można podkreślić jest fakt, że montaż układu analogowego w sieci elektrycznej może być wykonany w niemal prymitywny sposób w każdym laboratorium przy użyciu elementarnego wyposażenia, a cena uniwersalnych maszyn analogowych jest nieporównanie wyższa.

Literatura cytowana w tekście

1. M. T. HUBER: *Teoria sprężystości*, t. I i II. Polska Akademia Umiejętności, Kraków 1948, 1950.
2. K. K. Керопян. П. М. Чеголин, *Электрическое моделирование в строительной механике*, Госстройиздат, Москва 1963.

3. A. LISOWSKI, *Analogowe maszyny matematyczne*, (skrypt) PWN, Kraków, Warszawa, Łódź 1967.
4. A. LISOWSKI, *Sposób elektrycznego modelowania równań różniczkowych liniowych zwyczajnych i cząstkowych o współczynnikach stałych i członach rzędu parzystego*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, PWN, Warszawa, 7 (1969), z. 4, 425-438.
5. *Математическое моделирование и теория электрических цепей*, Академия Наук Украинской ССР, Институт Кибернетики; выпуск III, Киев 1965, выпуск V, Киев 1967.
6. Г. Е. Пухов, В. В. Васильев, А. Е. Степанов, О. Н. Токарева, *Электрическое моделирование задач строительной механики*, Изд. А. Н. Украинской ССР., Киев 1963.

Резюме

ПРИМЕРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КРАЕВЫХ И НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВОПРОСОВ МЕХАНИКИ

Приводится ряд примеров моделирования в электрической сети таких явлений, как свободные недемпфированные колебания струны, изгиб тонкой упругой плиты с разными краевыми условиями (бигармоническое уравнение) и др. Представленный метод может быть особенно пригодным для ряда частных случаев, когда применение более универсальных аналоговых машин неэкономично.

Summary

EXAMPLES OF ELECTRICAL NETWORK MODELS SIMULATING THE INITIAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF APPLIED MECHANICS

Several examples of electrical network models are given for such problems as free undamped vibrations of a string, bending of a thin plate with various boundary conditions (biharmonic differential equation) etc. The method presented in the paper seems to be particularly suited in many cases when the application of more universal analogue computers proves inefficient.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 kwietnia 1969 r. — przeredagowana (po raz pierwszy wpłynęła dnia 15 lipca 1968 r.)