

DOŚWIADCZALNA ANALIZA DRGAŃ WŁASNYCH RUSZTÓW CYLINDRYCZNYCH

EDWARD MACIĄG (KRAKÓW)

1. Wstęp

W niniejszej pracy omówione będą doświadczalne badania częstości i postaci drgań własnych modeli rusztu cylindrycznego. Jak wiadomo, ruszty przestrzenne typu cylindrycznego lub też innego mogą występować w postaci przekryć hal przemysłowych, hangarów, a także mogą tworzyć konstrukcję nośną hal sportowych, targowych itp. W szeregu przypadków, dla oceny tego rodzaju budowli pod względem dynamicznym wystarczy zbadać ich podstawowe charakterystyki dynamiczne, tj. częstości i postaci drgań własnych. Czasem wystarczy ograniczyć się tylko do tzw. obliczania budowli na rezonans, tj. porównanie drgań własnych z wymuszonymi, gdyż może to już wystarczyć do stwierdzenia nieprzydatności konstrukcji nawet bez szczegółowego wyliczenia amplitud przemieszczeń i naprężeń. Teoretyczne badania wspomnianych wyżej charakterystyk dynamicznych rusztów cylindrycznych były przedmiotem pracy [9]. Obliczenia dynamiczne tego rodzaju złożonych układów prętowych najczęściej prowadzi się w sposób przybliżony. Między innymi przyjmuje się następujące założenia upraszczające: masy pochodzące od ciężaru własnego i użytkowego skupione są w węzłach krzyżujących się prętów; krzyżujące się pręty połączone są przegubowo; pręty zakrzywione (np. koliste) zastępuje się odcinkami prostych. Mimo przyjmowania wymienionych upraszczających założeń obliczenia są złożone oraz pracochłonne i nastroczają duże trudności rachunkowe.

W związku z wyżej podanymi uwagami celowe jest prowadzenie badań modelowych, służących do weryfikacji lub uzupełnienia obliczeń teoretycznych. Niekiedy wystarczy przeprowadzić badania modelowe zamiast obliczeń i z kolei opierając się na prawach podobieństwa, znając częstości rezonansowe modelu, można podać częstości drgań własnych obiektu rzeczywistego. Obliczanie rusztów walcowych od obciążeń statycznych podane jest w [1], a zagadnienia stateczności tego typu konstrukcji omówione są w [2]. Problem obliczania statycznego oraz stateczności tzw. siatkowych powłok cylindrycznych (rombowa siatka prętów, w szczególnym przypadku przechodząca w ortogonalną) omówiono w [11].

2. Ustalenie praw modelowych

Zanim przejdziemy do badań rusztów, należy ustalić warunki, jakie powinien spełniać model obiektu rzeczywistego, którego własności chcielibyśmy poznać na podstawie badań modelu. Wiadomo, że technika modelowania opiera się na fizycznym podobieństwie, oznacza to przede wszystkim, że model (M) powinien być geometrycznie podobny do obiektu rzeczywistego (O) i że jednakowe fizyczne procesy w modelu i obiekcie powinny być opisywane tymi samymi matematycznymi równaniami. Nie zajmujemy się tu metodą analogii, która nie wymaga fizycznego podobieństwa modelu i obiektu i opiera się na dwójakim zastosowaniu tych samych matematycznych funkcji, opisujących badany proces w naturze na podobnym jej modelu. Mówimy, że stany obiektu naturalnego i modelu oraz zachodzące w nich procesy są fizycznie podobne w tym przypadku, kiedy w naturze i modelu przyczyny o tym samym charakterze wywołują odpowiednio równe skutki. Przy tym geometryczne podobieństwo obiektu i modelu będące koniecznym warunkiem podobieństwa powinno być zachowane także wtedy, kiedy stany obiektu i modelu są funkcjami czasu. Spełnienie tych warunków umożliwia przenoszenie wyników pomiarów z modelu na obiekt przy uwzględnieniu tzw. skal wynikających z praw podobieństwa [5].

Prawa podobieństwa wyrażają zależności między podstawowymi wielkościami określającymi przebieg procesów w rzeczywistym obiekcie i modelu. Prawa podobieństwa można otrzymać na podstawie analizy wymiarowej [3, 5, 10].

Rozważania ograniczamy do przypadku ścisłego podobieństwa geometrycznego modelu do obiektu rzeczywistego. Takie założenie przyjmuje się zwykle, gdy przechodzi się do konkretnych rozwiązań. Zakładamy, że materiał, z którego wykonujemy model i konstrukcję jest jednorodny, izotropowy i liniowo sprężysty. Z interpretacji fizycznej wynika, że częstość drgań własnych rusztu zależy od L , E , G i m , gdzie L określa wszystkie wymiary geometryczne układu, E i G stałe materiałowe, a m jest masą skupioną. Powyższe zapiszemy w postaci funkcji

$$(2.1) \quad \omega = \Phi(L, E, m, G).$$

L , E , G i m wyrazimy w układzie jednostek kG, cm, sek, czyli:

$$[L] = [\text{kG}^0 \text{cm}^1 \text{sek}^0], \quad [E] = [\text{kG}^1 \text{cm}^{-2} \text{sek}^0], \quad [m] = [\text{kG}^1 \text{cm}^{-1} \text{sek}^2], \\ [G] = [\text{kG}^1 \text{cm}^{-2} \text{sek}^0], \quad [\omega] = [\text{kG}^0 \text{cm}^0 \text{sek}^{-1}].$$

Wszystkie wielkości, od których zależy ω , można wyrazić za pomocą trzech jednostek kG, cm, sek; mogą zatem wystąpić najwyżej trzy wielkości wymiarowo niezależne. Przyjęto, że są nimi L , E , m . Tworzymy wyznacznik z wykładników przy wymiarach wielkości przyjętych za wymiarowo niezależne (w układzie kG, cm, sek)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Utworzony wyznacznik z wykładników przy wymiarach tych jednostek jest różny od zera. więc spełniony jest warunek wymiarowej niezależności. Pozostała wielkość, tj. G jest od nich wymiarowo zależna. Z twierdzenia π stosowanego w analizie wymiarowej wynika,

że jeśli w wymiarowo niezmienniczej i jednorodnej funkcji $\Phi(E, L, m, G)$ argumenty E, L i m są wymiarowo niezależne, a argument G wymiarowo zależny, tzn. wyraża się w sposób następujący

$$(2.2) \quad G = \pi_1 E^{e_1} L^{e_2} m^{e_3},$$

gdzie π_1 jest wielkością bezwymiarową (liczbą), a wykładniki e_1, e_2 i e_3 są liczbami rzeczywistymi, to funkcja Φ musi mieć postać

$$\Phi(E, L, m; G) = \varphi(\pi_1) E^{e_1} L^{e_2} m^{e_3},$$

gdzie $\varphi(\pi_1)$ jest zwykłą funkcją liczbową argumentu bezwymiarowego π_1 i nie zależy od E, L i m , a wykładniki e_1, e_2 i e_3 (rzeczywiste) nie zależą od π_1 ani od E, L, m . Wyrażamy wymiary pozostałej wielkości, tj. G za pomocą wymiarów $[E], [L], [m]$

$$[\text{kG}^1 \text{cm}^{-2} \text{sek}^0] = [\text{kG}^{e_1} \text{cm}^{-2e_1} \text{cm}^{e_2} \text{kG}^{e_3} \text{cm}^{-e_3} \text{sek}^{2e_3}].$$

Z porównania stronami wykładników potęgowych przy jednakowych wymiarach otrzymujemy układ równań, którego rozwiązaniem jest

$$(2.3) \quad e_1 = 1, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0; \quad [G] = [E].$$

Z definicji wymiaru wynika, że

$$(2.4) \quad \pi_1 = \frac{G}{E}.$$

Wielkość bezwymiarowa π_1 bywa nazywana niezmiennikiem podobieństwa. Stosując twierdzenie π mamy

$$(2.5) \quad \omega = \varphi\left(\frac{G}{E}\right) E^{e'_1} L^{e'_2} m^{e'_3}.$$

Wykładniki potęgowe e'_1, e'_2, e'_3 nie zależą od π_1 ani od E, L, m . Wykładniki te wyznaczymy z warunku

$$(2.6) \quad [\omega] = [E^{e'_1} L^{e'_2} m^{e'_3}],$$

w ten sposób, że podstawimy za wymiary $[E], [L], [m], [\omega]$ ich wyrażenia w układzie jednostek $\text{kG}, \text{cm}, \text{sek}$

$$[\text{kG}^0 \text{cm}^0 \text{sek}^{-1}] = [\text{kG}^{e'_1} \text{cm}^{-2e'_1} \text{cm}^{e'_2} \text{kG}^{e'_3} \text{cm}^{-e'_3} \text{sek}^{2e'_3}].$$

Porównując wykładniki przy $\text{kG}, \text{cm}, \text{sek}$ i rozwiązując otrzymany układ równań dostajemy

$$(2.7) \quad e'_1 = \frac{1}{2}, \quad e'_2 = \frac{1}{2}, \quad e'_3 = -\frac{1}{2},$$

zatem

$$(2.8) \quad \omega = \varphi\left(\frac{G}{E}\right) \sqrt{\frac{EL}{m}}.$$

Modelowanie zjawiska opisywanego za pomocą funkcji Φ polega na tym, że wartości E_0, L_0, m_0, G_0 mnożymy przez pewne liczby $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i ε_1 tzn., że

$$(2.9) \quad E_M = \lambda_1 E_0, \quad L_M = \lambda_2 L_0, \quad m_M = \lambda_3 m_0, \quad G_M = \varepsilon_1 G_0,$$

gdzie λ_1 , λ_2 , λ_3 i ε_1 są tzw. skalami modelu [3]. Poszukujemy stosunku ω_M/ω_O . Z warunku jednorodności wymiarowej ω_M/ω_O jest liczbą. Na podstawie twierdzenia π napiszemy, że skoro zachodzi (2.8) to

$$(2.10) \quad \omega_O = \varphi(\pi_{1,O}) E_O^{1/2} L_O^{1/2} m_O^{-1/2}, \quad \pi_{1,O} = \frac{G_O}{E_O},$$

$$(2.11) \quad \omega_M = \varphi(\pi_{1,M}) E_M^{1/2} L_M^{1/2} m_M^{-1/2}, \quad \pi_{1,M} = \frac{G_M}{E_M} = \frac{\varepsilon_1 G_O}{\lambda_1 E_O} = \pi_{1,O} \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}.$$

Wobec tego na podstawie (2.9), (2.10), (2.11) będzie

$$(2.12) \quad \frac{\omega_M}{\omega_O} = \frac{\varphi_M(\pi_{1,M})}{\varphi_O(\pi_{1,O})} \lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2} \lambda_3^{-1/2}.$$

Z uwagi na to, że z analizy wymiarowej nie da się wyznaczyć $\varphi(\pi_1)$, na skale λ_1 , λ_2 , λ_3 i ε_1 nakładamy dodatkowy warunek wynikający z twierdzenia, że zjawiska opisane za pomocą tej samej funkcji nazywamy podobnymi, jeśli ich niezmienniki podobieństwa są równe [3]

$$(2.13) \quad \pi_{1,O} = \pi_{1,M}.$$

Na cztery skale λ_1 , λ_2 , λ_3 i ε_1 nakładamy jeden warunek, pozostałe tj. tyle, ile jest wielkości wymiarowo niezależnych wybieramy dowolnie. Warunek (2.13) nazywamy kryterium podobieństwa. Z (2.12) przy uwzględnieniu (2.13) otrzymamy

$$(2.14) \quad \Theta = \frac{\omega_M}{\omega_O} = \lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2} \lambda_3^{-1/2},$$

gdzie Θ jest skalą częstości drgań własnych. Jeśli zakładamy, że materiał obiektu i modelu jest ten sam, to masy zmieniamy w tej samej skali co objętości, czyli $\lambda_3 = \lambda_2^3$ oraz $\lambda_1 = 1$, zatem

$$(2.15) \quad \Theta = \frac{1}{\lambda_2}.$$

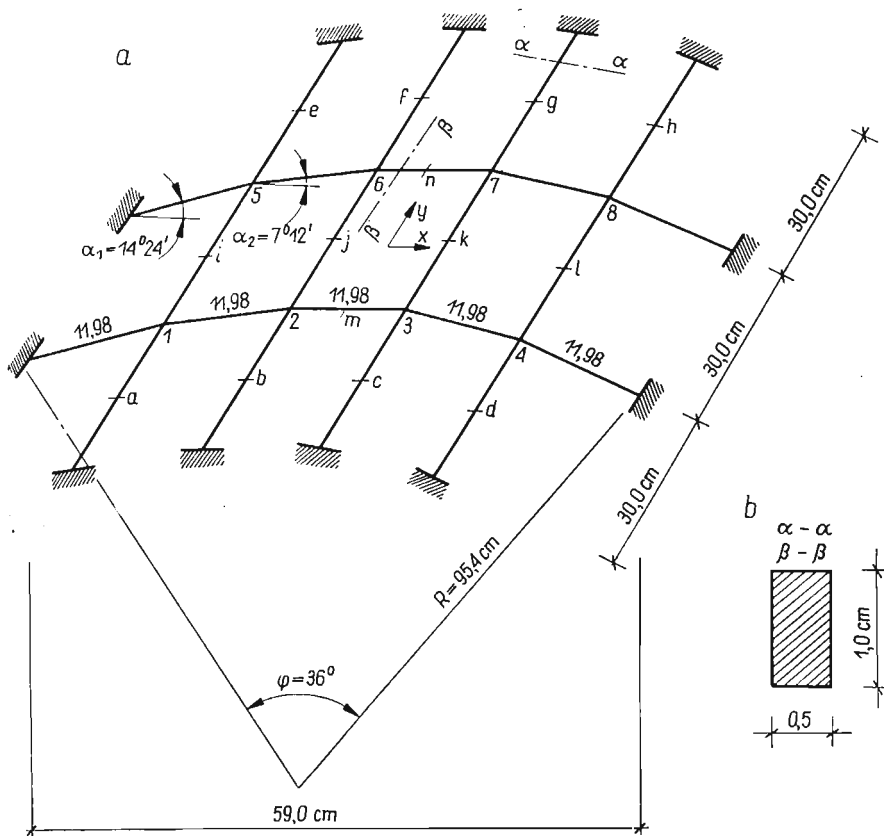
Na przykład dla modelu rusztu 100 razy mniejszego od obiektu naturalnego, $\lambda_2 = 1/100$ i na podstawie (2.15) $\Theta = 100$, zatem z (2.14) wynika, że częstości drgań własnych obiektu naturalnego będą sto razy mniejsze od częstości drgań własnych modelu $\left(\omega_O = \frac{\omega_M}{100}\right)$.

Bardziej szczegółowe omówienie niektórych innych zagadnień modelowania można znaleźć w literaturze, np. w [5, 10].

3. Opis modelu

Dla przeprowadzenia pomiarów częstości i postaci drgań własnych rusztu cylindrycznego wykonano stalowy model. Wymiary modelu są podane na rys. 1. Rzut z góry tworzy prostokąt $90,0 \times 59,0$ cm o ortogonalnej siatce prętów. Łuki w liczbie dwóch wykonane są z odcinków prętów prostych (po pięć cięciw w każdym łuku). Osiowa długość cięciw teoretycznie wynosi 11,98 cm (długość łuku odpowiadająca wymienionej długości cięciwy wynosi 12,0 cm). Odcinki proste załamane go pręta poprzecznego tworzą cięciwy odcinka koła

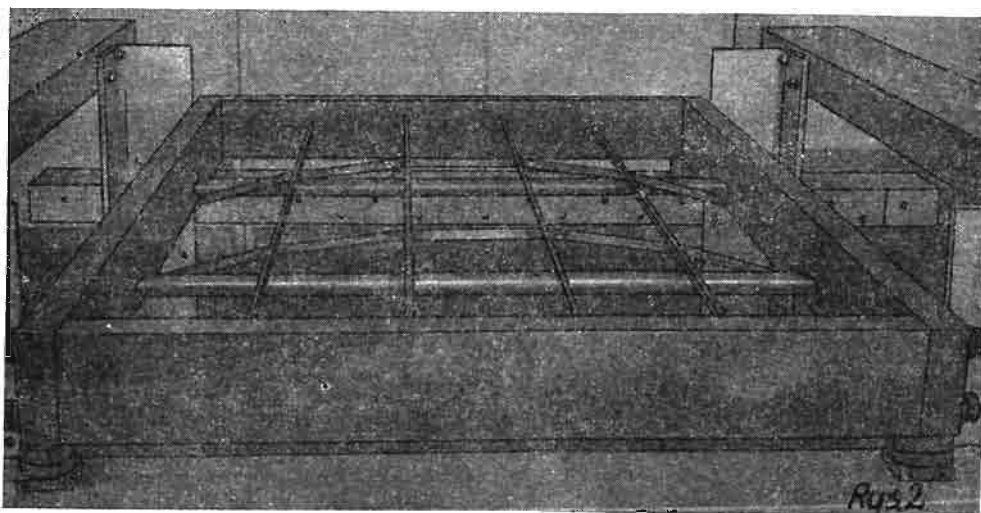
o promieniu $R = 95,4$ cm; kąt środkowy odpowiadający odcinkowi koła tworzącemu łuk kolisty wynosi $\varphi = 36^\circ$, zatem kąt φ_0 odpowiadający jednej cięciwie równa się $7^\circ 12'$. Stosunek strzałki łuku do rozpiętości f/l wynosi 0,08. Cztery poziome pręty podłużne o długości 90,0 cm w odstępach co 30,0 cm połączone są z prętami poprzecznymi. Przekroje prętów siatki rusztu są stałe na całej długości i jednakowe dla wszystkich prętów; wynoszą one 5×10 mm (porównaj rys. 1b). Węzły krzyżujących się prętów połączone są sztywno.



Rys. 1

Końce prętów zamocowane są zupełnie. Dla zapewnienia sztywnych połączeń pręty w węzłach zespawano. Spawania dokonano metodą elektryczną, jako elektrody użyto stali. Wpływy termiczne były niewielkie; spawanie prowadzono bardzo powoli. Końce prętów wpuszczone są w otwory obudowy i zaspawane jak wyżej. Obudowę stanowi sztywna stalowa rama zamknięta o wymiarach osiowych 61×92 cm, wykonana z płaskownika o przekroju poprzecznym 20×80 mm. Ramę w narożach połączone sztywno za pomocą kołków stalowych (spawanie mogłoby spowodować deformację ramy z powodu dużych wymiarów przekroju). W celu uniemożliwienia przemieszczeń poziomych, wywołanych rozporem, w podłużne pręty obudowy wmontowano dwa sztywne pręty stalowe o średnicy 20 mm symetrycznie rozmieszczone w odległości 3 cm od punktów zamocowania prętów poprzecznych. Pręty te wmontowano w taki sposób, aby uniemożliwiały odkształcenia

w osi poprzecznej obudowy na zewnątrz i do wewnątrz. Cały model jest wsparty na badawczym stendzie wykonanym z kątowników i ceowników, tworzącym sztywną ramę przestrzenną. Omawiany wyżej model wykonano w Zakładzie Aparatury Naukowej AGH. Rysunek 2 przedstawia model rusztu wraz ze stendem.



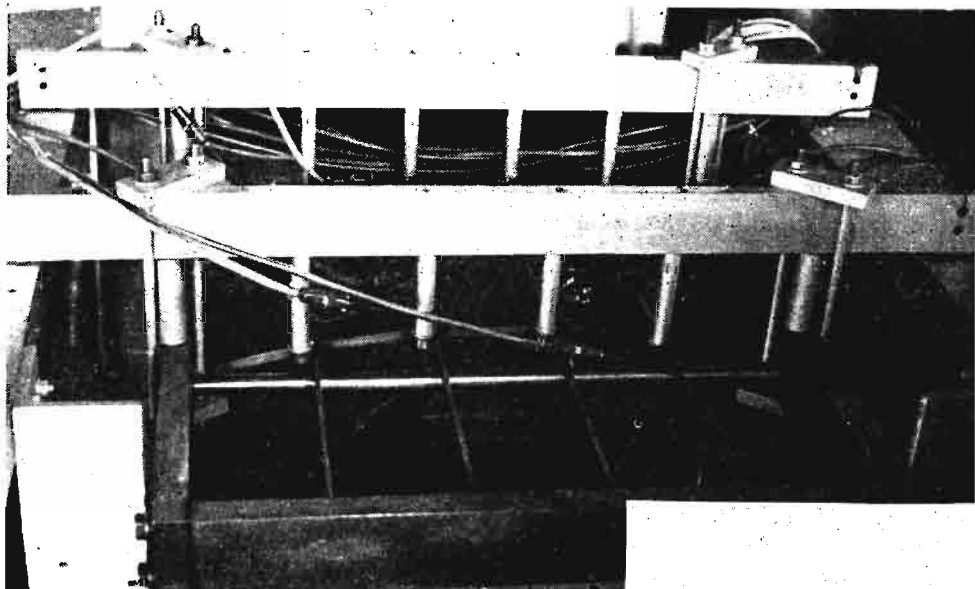
Rys. 2

4. Pomiary dynamiczne

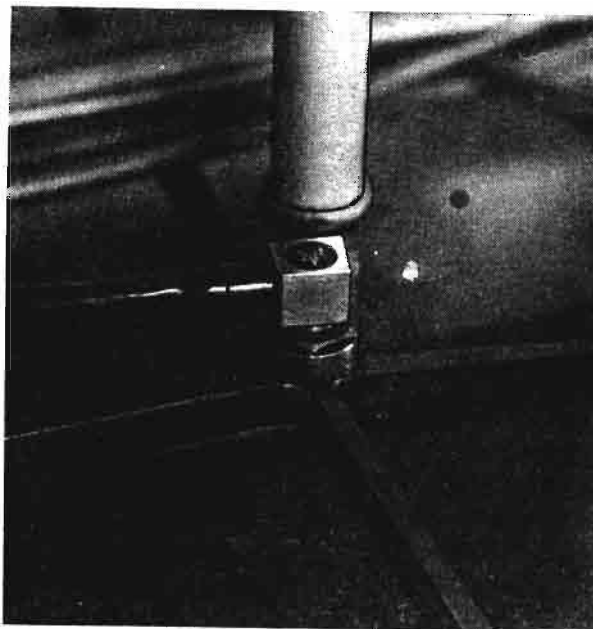
4.1. Zastosowana aparatura. Badania dynamiczne przeprowadzono w oparciu o aparaturę pomiarową będącą w dyspozycji Pracowni Badań Dynamicznych i Modelowych Katedry Dynamiki Budowli Politechniki Krakowskiej. Stosowana aparatura pomiarowa składa się z trzech zasadniczych części:

- 1) czujnika, czyli urządzenia do zmiany wielkości mechanicznej na elektryczną,
- 2) wzmacniacza lampowego do wiernego powiększania amplitud w celu uzyskania większej czułości,
- 3) urządzenia wskaźnikowego (oscyloskop elektronowy lub rejestrator).

Do pomiarów częstości i postaci drgań własnych modelu rusztu zastosowano bezdotykowe indukcyjne czujniki przemieszczenia typu OT18, produkcji Zakładu Produkcji Doświadczalnej Instytutu Lotnictwa z 1966 r. Czujniki OT18 przeznaczone są do pomiaru przemieszczeń lub drgań elementów maszyn w zakresie $\pm 0,15$ mm. Czujniki te można łatwo ustawiać nad badanym punktem. Zaletą omawianych tu czujników jest fakt braku dotyku do przedmiotu; czujnik nie obciąża konstrukcji, co jest szczególnie ważne w pracy na modelach. Czujniki te mogą pracować w dużym pasmie częstości. Dla umocowania czujników nad węzłami wykonano specjalne wsporcze urządzenie. Najczęściej urządzenie takie przymocowuje się do stendu, na którym spoczywa model. W tym przypadku konstrukcję wsporczą dla czujników połączono sztywno z ramą obudowy modelu rusztu, co wyeliminowało możliwość zakłóceń pomiarów na skutek ewentualnych ruchów modelu w stosunku do stendu spowodowanych np. odkształceniami stropu, na którym stoi stend. Rysunek



Rys. 3a



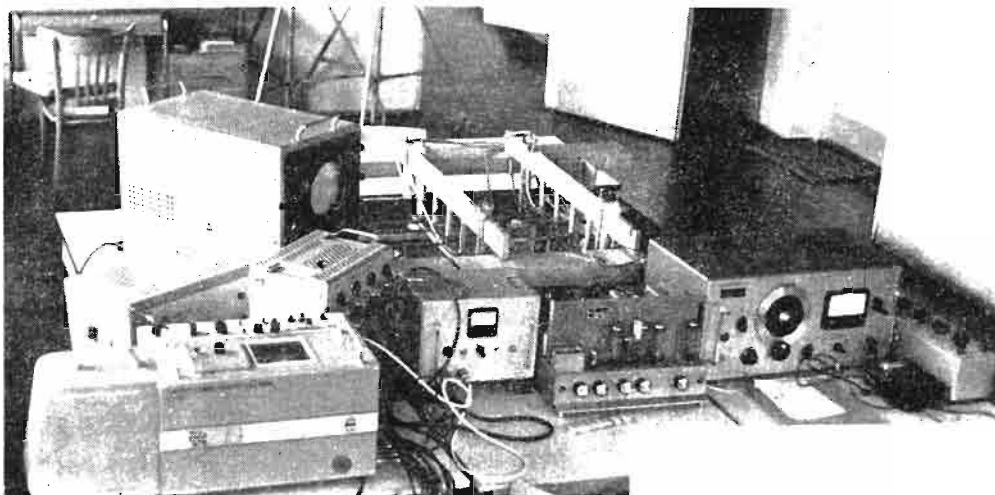
Rys. 3b

3a, b przedstawia sposób połączenia urządzenia wsporcze do obudowy wraz z zamocowanymi czujnikami i podłączonymi kablami.

Jako wzmacniacza lampowego użyto 8-kanalowego elektronicznego miernika wielkości mechanicznych typu RF-01-A, B, również produkcji ZPD Inst. Lotn. Miernik ten może

być stosowany do pomiaru przemieszczeń drgań, przyspieszeń i ciśnień przy użyciu odpowiednich do tych wielkości przetworników. Aparatura daje możliwości rejestracji mierzonych wielkości przy użyciu oscylografu pętlicowego lub katodowego. Aparatura RF-01-A, B może pracować w granicach 0–500 Hz, a z większym błędem przy 700 Hz. Dość wysoki zakres częstości jest potrzebny zwłaszcza przy wyższych harmonicznym postaciach drgań modeli wykonywanych z metalu, a właśnie stalowy model rusztu jest przedmiotem badań. Czujniki OT18 współpracują z aparaturą typu RF01.

W toku pomiarów stosowano dwustrumieniowy oscylo-synchroskop, typ Ok7-2s. Jest to przyrząd wysokiej klasy, przeznaczony do badań i pomiarów jednorazowych i okresowych przebiegów elektrycznych. Dla trwałego zapisu przebiegów drgań stosowano 12-kanalowy rejestrujący oscylograf pętlicowy 12LS-1, typ — Nr 462110, produkcji RFT

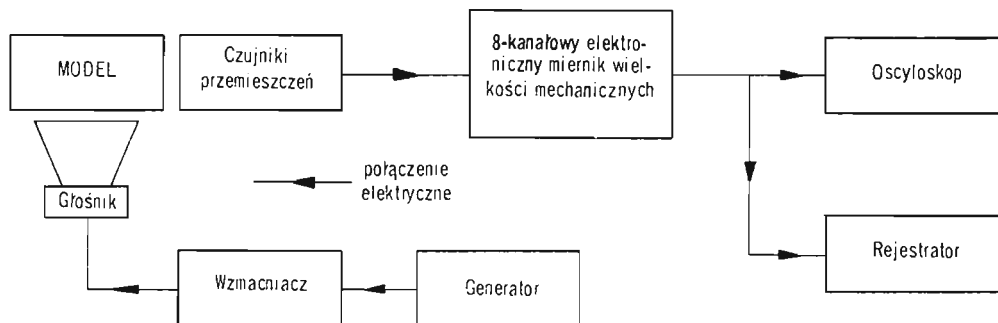


Rys. 4

(NRD). Zaletą wymienionego rejestratora jest możliwość zapisu z różnymi posuwami taśmy od 0,16 m/sek, do 1,6 m/sek. Szczególnie ważna przy wysokich częstościach drgań jest górna granica. «Rozciągnięty» zapis łatwiej pozwala przy wysokich częstościach określić fazowość rejestrowanych przebiegów. Rysunek 4 przedstawia komplet aparatury.

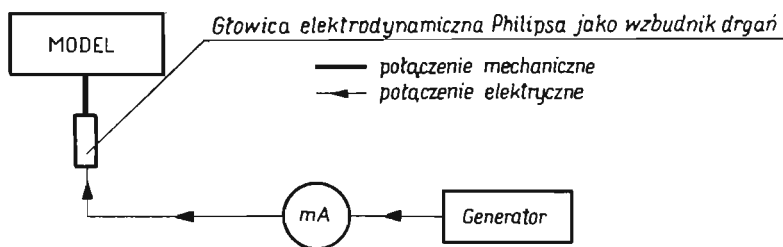
Przed kilku latami autor badał drgania własne identycznego modelu stalowego rusztu w b. Pracowni Modelowego Badania Powłok ZMOC IPPT. Model rusztu wykonany był również przez Zakład Ap. Nauk. AGH. Wyposażenie aparaturowe było tam dużo uboższe. Do pomiarów drgań zastosowano wówczas czujniki pojemnościowe (tylko dwa) specjalnie skonstruowane do badań dynamicznych modeli powłok. W pracach [6, 7, 8] podane są szczegółowe zasady, na których oparte jest działanie omawianych czujników. Zarówno obecnie, jak i poprzednio, jako czynnika pobudzającego do drgań używano w pierwszym rzędzie głośnika akustycznego. W toku obecnych pomiarów stosowano głośnik GD36/25 o mocy 25 W. W poprzednich badaniach był to głośnik o mocy 40 W. Całe urządzenie wymuszające składało się z generatora napięcia zmiennego (generator RC, typ PO10, zakres częstości 1–20 kHz, produkcja ZO PAN, Warszawa) oraz wzmacniacza (WR75/62,

produkcja Państw. Zakł. Teletransm., Warszawa) zasilającego głośnik akustyczny ustawiony pod modelem. Na rys. 5 podano blokowy schemat aparatury pomiarowo-rejestrującej oraz pobudzającej drgania. Oprócz głośnika, jako źródła drgań używano głowicę elektrodynamiczną PR9261 z zestawu Philipsa stosowaną najczęściej do pomiaru drgań względnych. Zakres działania $0 \div 1000$ Hz. Nacisk wywierany końcówką czujnika jest stosunkowo mały, jednak o ile zostanie osiągnięta częstość rezonansowa modelu, amplitudy drgań mogą być duże. Końcówka czujnika wywołuje nacisk 3,08 g na mA. Przy maksymal-



Rys. 5

nym natężeniu prądu amplituda siły wynosi 77 g. Stała siła sprężyny przyciskającej głowicę do przedmiotu wynosi 850 g. Wadą głowicy stosowanej jako źródła drgań jest wywieranie nacisku na przedmiot. Dla modeli metalowych, będących sztywnymi konstrukcjami (stąd wysokie częstości drgań własnych), nie jest to nacisk wielki i może dawać minimalny błąd w pomiarach. W skład urządzenia wymuszającego oprócz głowicy Philipsa wchodzi jeszcze generator napięcia (jak wyżej) oraz miliamperomierz (tutaj EAW). Na



Rys. 6

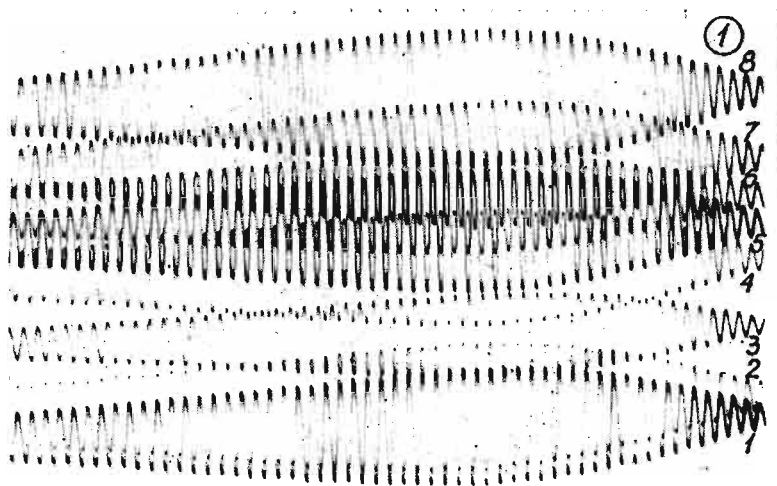
rys. 6 podano schemat blokowy urządzenia pobudzającego drgania w przypadku stosowania głowicy Philipsa jako źródła drgań. Przy badaniach wykonywanych w b. Pracowni Modelowego Badania Powłok jako czynnika pobudzającego do drgań, oprócz głośnika akustycznego, użyto elektromagnesu (wraz z generatorem i wzmacniaczem). Stosowanie elektromagnesu jest możliwe, ponieważ model wykonany był ze stali.

4.2. Opis i wyniki pomiarów. Pomiary drgań¹⁾ prowadzono w ośmiu węzłach krzyżujących się prętów. Nad każdym węzłem umieszczony był bezdotykowy czujnik OT18. Drgania

¹⁾ W przeprowadzaniu pomiarów obok autora brali udział pracownicy Pracowni Badań Dynamicznych i Modelowych: mgr inż. Mieczysław Pieronek i technicy: Antoni Abratański i Zbigniew Nasiński.

wzbudzano ze zmienną częstością i w ten sposób poszukiwano stref rezonansowych. Dla wstępnej wizualnej oceny częstości rezonansowych przebiegi obserwowano na oscyloskopie. Na oscyloskopie można było jednocześnie obserwować dwa przebiegi (dwa punkty pomiarowe). Dla określenia wzajemnego położenia ośmiu badanych punktów, w toku drgań, przyjmowano jeden przebieg jako porównawczy (odpowiedni czujnik stale połączony z oscyloskopem), a pozostałe czujniki kolejno podłączano do oscyloskopu. W toku obserwacji stwierdzono, że dla każdej wzbudzonej częstości, mierzone częstości drgań wszystkich badanych punktów były jednakowe. Obserwując przebiegi na oscyloskopie stwierdzono, że mamy do czynienia z falą stojącą. W następnej kolejności podłączono rejestrator dla trwałego zapisu wszystkich ośmiu przebiegów. Na podstawie wibrogramów oceniono strefy rezonansowe i porównywano je z wynikami otrzymanymi na oscyloskopie. Otrzymywano te same rezonansowe częstości drgań.

Dla wykrycia częstości rezonansowych, odpowiadających częstości drgań własnych układu, wzbudzając drgania głowicą elektrodynamiczną wielokrotnie zmieniano jej usytuowanie. I tak przykładając głowicę w punktach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 oraz w punktach *a, b, c, d, e, f, g* i *h* (bądź w pobliżu tych punktów — porównaj rys. 1) otrzymano dwie najniższe częstości drgań własnych $n_1 = 207$ Hz i $n_2 = 263$ Hz. Dla n_1 postać odkształcenia



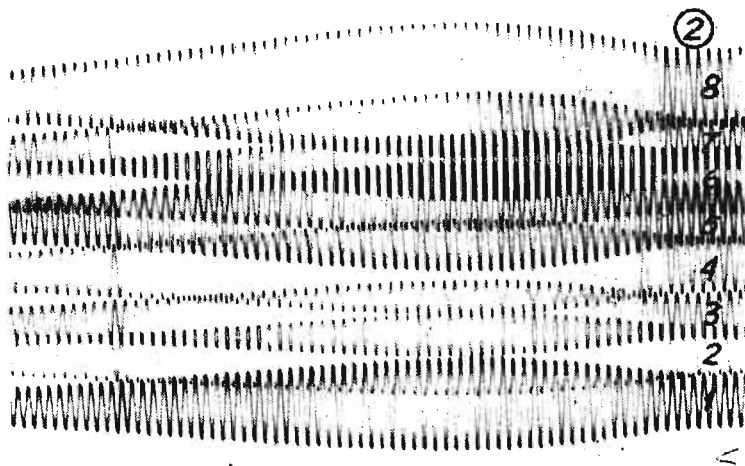
Rys. 7

rusztu jest symetryczna względem osi x i antysymetryczna względem osi y . Dla n_2 postać odkształcenia rusztu jest antysymetryczna względem osi x i y .

Wzajemne usytuowanie węzłów krzyżujących się prętów dla n_1 przedstawia wibrogram²⁾ pokazany na rys. 7, a dla n_2 wibrogram pokazany na rys. 8. Widoczne jest gwałtowne narastanie amplitud przy zbliżaniu się do częstości rezonansowej i również szybkie ich zmniejszanie się przy oddaleniu się od rezonansu. Numeracja przebiegów na wibrogramach odpowiada oznaczeniom węzłów rusztu (porównaj rys. 1). Wzbudzając głowicą drgania

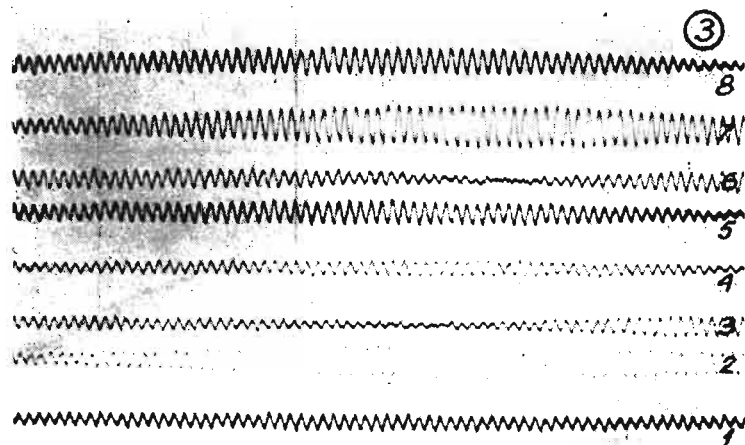
²⁾ Znacznik czasu na wszystkich wibrogramach oznacza 0,01 sek.³

w punkcie j lub k (rys. 1) znajdowano tylko n_1 , bowiem dla n_2 przez punkty i, j, k, l przechodzi oś węzłów o zerowej amplitudzie. Te same dwie pierwsze rezonansowe częstotliwości drgań otrzymano przy wzbudzeniu drgań głośnikiem akustycznym. O ile autorowi wiadomo, dotychczas głośnika akustycznego jako wzbudnika drgań używano dla modeli konstrukcji



Rys. 8

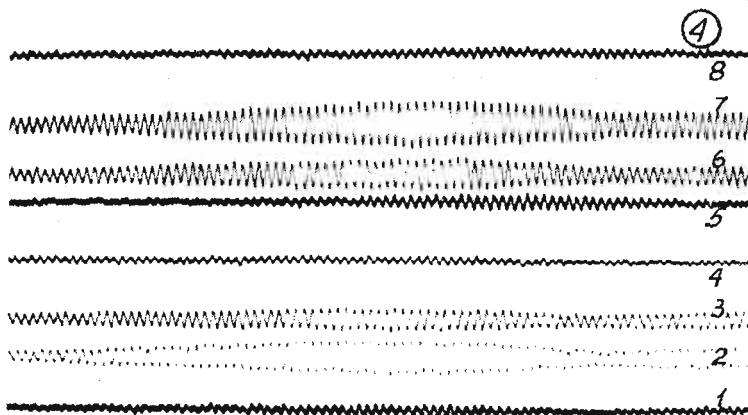
powierzchniowych (np. dla powłok w [6]). Okazało się jednak, że może on z powodzeniem być stosowany do wzbudzania drgań modeli układów prętowych. Amplitudy drgań wymuszone głośnikiem są jednak znacznie mniejsze, niż w przypadku posługiwania się głowicą



Rys. 9

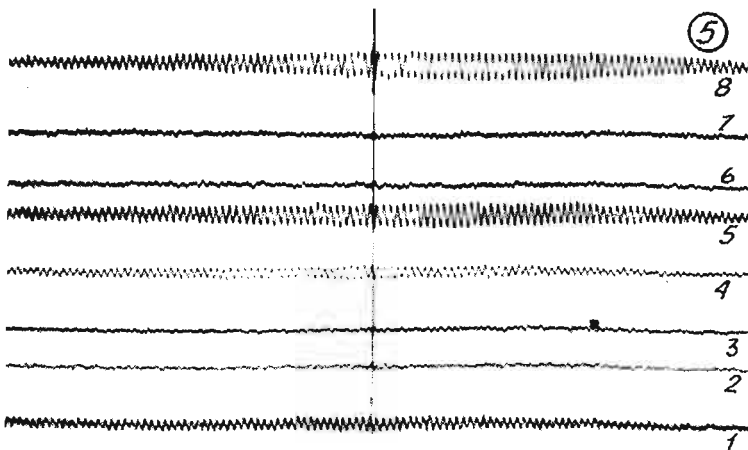
elektrodynamiczną. Warto nadmienić, że gdy w pracy [9] posługiwano się głośnikiem 40-watowym, wówczas dla pierwszej częstotliwości drgań amplitudy były tak duże, że z łatwością wyczuwało się je palcami. Znacznie większe amplitudy drgań zarówno dla n_1 jak i n_2 uzys-

kano nawet przy pomocy głośnika 25-watowego, dzięki zastosowaniu prostego zabiegu. Dla n_1 z uwagi na antysymetrię odkształcenia względem osi y zasłonięto połowę głośnika (względem osi y), a dla n_2 z uwagi na antysymetrię względem obu osi zasłonięto 3/4 tuby głośnika. Wibrogram pokazany na rys. 9 przedstawia przebiegi drgań wzbudzone głośnikiem o częstotliwości 263 Hz.



Rys. 10

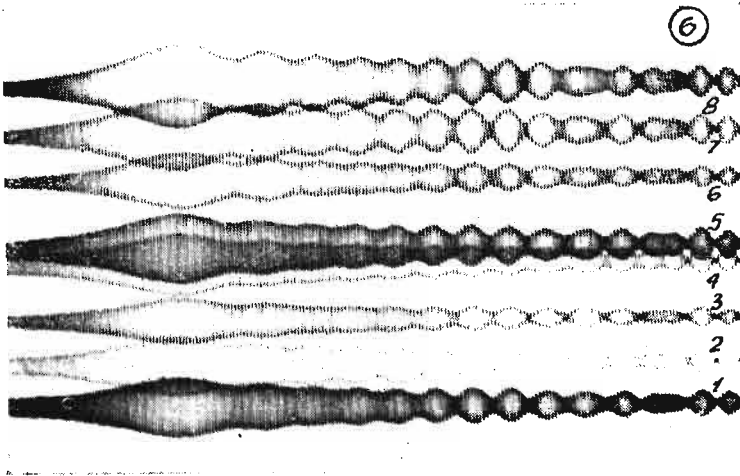
Wzbudzając drgania w punktach m i n otrzymano dwie dalsze częstotliwości drgań własnych $n_3 = 285$ Hz i $n_4 = 340$ Hz. Postacie odkształcenia układu, towarzyszące tym częstotnościom, są symetryczne względem osi y oraz dla n_3 symetryczne względem osi x i dla n_4 antysyme-



Rys. 11

tryczne względem tejże osi. Dla przykładu na rys. 10 zamieszczono wibrogram, odpowiadający n_4 (wzbudzenie drgań głośnikiem). Wzbudzając drgania w punktach m i n nie udaje się zmierzyć n_1 i n_2 ; przez wymienione punkty przechodzi wówczas linia węzłów o zero-

wej amplitudzie. Te same częstotliwości n_3 i n_4 uzyskano wzbudzając drgania głośnikiem. Dla zwiększania amplitud drgań przy n_4 zasłaniano pół głośnika (względem osi x). Wprawienie rusztu w drgania, odpowiadające wyższej postaci odkształcenia, jest coraz trudniejsze. Drgania mają mniejszą amplitudę oraz wymagają lepszego dostrojenia czynnika pobudzającego do drgań o częstotliwości rezonansowej rusztu. Mimo tego udało się wykryć zarówno przy pomocy głowicy jak i głośnika dalsze strefy rezonansowe przy częstotliwości $n = 430$ Hz, a nawet przy $n = 580$ Hz (tylko głowicą). Wibrogram na rys. 11 przedstawia przebiegi drgań wywołane głośnikiem dla $n = 430$ Hz. Postacie odkształcenia są symetryczne względem obu osi; charakterystyczne jest, że środkowe węzły krzyżujących się prętów osiągają w stosunku do bocznych bardzo małe amplitudy. Dla określenia postaci odkształceń przy wyższych częstotściach osiem punktów pomiarowych już nie wystarcza, bowiem zarówno w kierunku podłużnym (y), jak i przede wszystkim poprzecznym (x) tworzy się kilka półfal. Pomiar odkształcenia układu jest wówczas również możliwy. Jeden punkt przyjmuje się jako stały, a zmieniając w sposób ciągły położenie drugiego punktu badawczego i rzucając oba przebiegi na dwustrumieniowy oscyloskop można wizualnie ustalić postacie odkształ-



Rys. 12

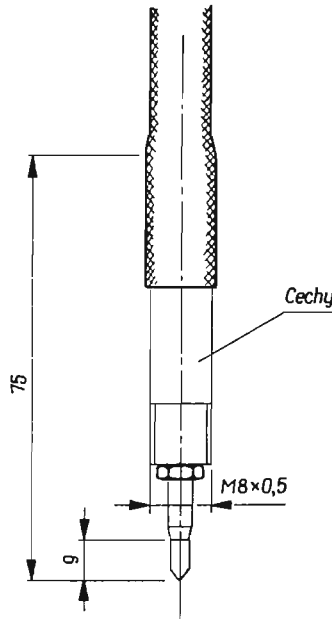
cenia. Jest to sposób bardzo żmudny i pracochłonny. Wiadomo, że jednak z punktu widzenia technicznego najważniejsza jest najniższa częstotliwość drgań własnych, jej też towarzyszą największe amplitudy drgań. W pracy [6] w oparciu o rozważania teoretyczne nad układami prętowymi i płytami oraz na podstawie pomiarów drgań na modelach powłok sformułowano założenie wiążące wyboczenie układu z jego postacią drgań. Według tego założenia pierwsza najniższa (podstawowa) postać drgań układu jest zgodna z postacią wyboczenia tego układu. Ponadto stwierdzono tam, że postać wyboczenia układu ma charakter podobny do odkształcenia tego układu pod działaniem siły skupionej. Miejsce zaczepienia siły skupionej jest zasadniczo dowolne. Zatem, jeśli się określi odkształcenia układu pod działaniem siły skupionej, to znana będzie zarazem podstawowa postać drgań układu. Na podstawie pomiarów na modelu rusztu, przy wzbudzaniu drgań głowicą elektrodynamiczną, która spełnia tu rolę siły skupionej, udało się określić postać odkształcenia nie tylko dla podstawowej, ale i dla wyższych częstotliwości drgań. Przy najwolniejszym

przesuwie taśmy rejestratora (0,16 m/sek) w trakcie szybkiego zmieniania wzbudzonych częstości głowicą w strefie n_1 i n_2 uzyskano odcinki przebiegów drgań odpowiadające tzw. efektowi Sommerfelda obserwowanemu w układzie drgającym o jednym stopniu swobody (z tłumieniem) przy zmiennym obciążeniu siłą bezwładności, pochodzącą od nierównoważonych mas silnika, pracującego ze zmiennymi częstościami w strefie rezonansu (porównaj np. [4, 12, 13]). Wibrogram na rys. 12 jest tego przykładem — niestabilny proces (dla strefy $n_2 = 262$ Hz) przejawia się silnymi dudnieniami.

Przy pomiarach przeprowadzonych w pracy [9] z uwagi na skromne ówczesne wyposażenie aparaturowe nie rejestrowano wyników pomiarów, a częstości drgań oceniano na podstawie generatora zmiennych częstości służącego do wymuszania drgań wzbudnikiem. Postacie odkształcenia oceniano przez obserwację dwu przebiegów na oscyloskopie; jeden przebieg przyjmowano jako porównawczy, drugi przebieg pochodzi od czujnika, którego położenie zmieniano. Na tej podstawie oceniono fazowość wszystkich badanych punktów i określono odpowiednie postacie odkształcenia. W toku pomiarów mierzono wówczas tylko dwie najniższe częstości. Otrzymano $n_1 = 220$ Hz i $n_2 = 248$ Hz. Postacie odkształcenia były takie same, jak w toku obecnych pomiarów.

5. Pomiary statyczne

Traktując ruszt jako schemat ustroju z ośmioma masami skupionymi w węzłach krzyżujących się prętów otrzymujemy układ o ośmiu stopniach swobody. Powyższe przyjęcie

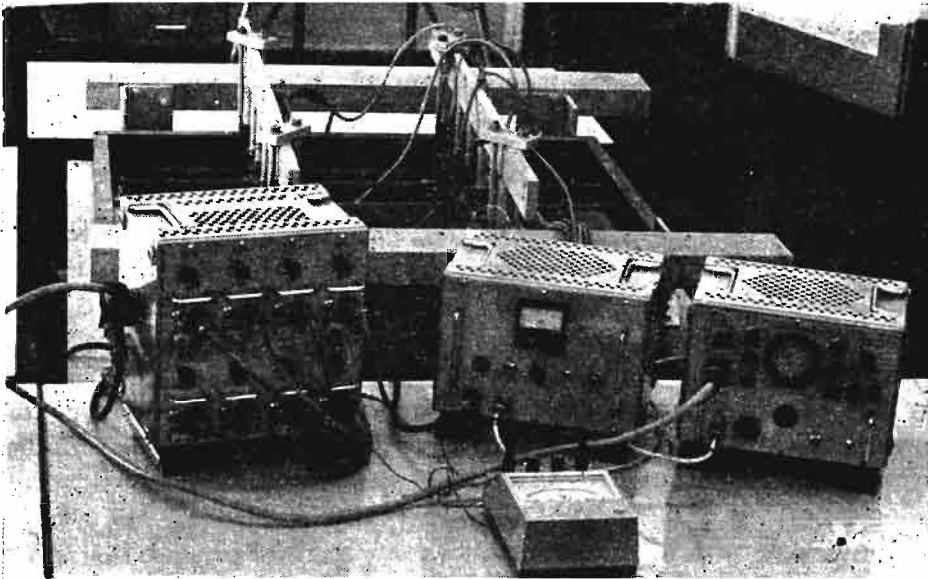


Rys. 13

w omawianym przypadku jest możliwe, ponieważ ruszt ma małą wyniosłość ($f/l = 0,08$) i składowe poziome siły bezwładności można wówczas pominąć (założenie stosowane dla powłok o małej wyniosłości). Dla przyjętego wyżej modelu układu z masami skupionymi

możliwe jest wyznaczenie częstości i postaci drgań własnych, jeśli znane są jednostkowe przemieszczenia punktów przyłożenia mas. Dla otrzymania tych wielkości przeprowadzono badania pozwalające wyznaczyć pionowe ugięcia węzłów krzyżujących się prętów.

5.1. Stosowana aparatura. Pomiary ugięć węzłów wykonano dwukrotnie przy pomocy dwu różnych zestawów aparatury. Pierwszy zestaw obejmował aparaturę elektryczną. Do pomiaru ugięć badanych punktów zastosowano indukcyjne czujniki przemieszczeń liniowych typu OT12 o zakresie ± 1 mm (4 sztuki) i typu OT14 o zakresie ± 5 mm (4 sztuki) produkcji ZPD Inst. Lotn. (1966 r.). Przy pomocy tych czujników mierzono przemieszczenia rzędu ułamka mikrometra. Czujniki te przymocowywano do omówionej już w p. 4.1 konstrukcji wsporczej przeznaczonej dla czujników bezdotykowych OT18. Czujniki te współpracują z aparaturą RF01. Czujniki te wywierają minimalny nacisk na przedmiot. Szkic czujnika OT12 podaje rys. 13, czujnik OT14 ma podobny wygląd. Do «wyzerowania» czujników stosowano cały zestaw 8-kanalowego miernika RF-01,A,B o którym była już mowa w p. 4.1.



Rys. 14

Rys. 14 przedstawia komplet aparatury elektrycznej wraz z modelem. Drugi zestaw aparatury składa się ze zwykłych czujników zegarowych o dokładności 0,001 mm. Konstrukcja wsporcza posłużyła do umocowania podstaw czujników.

5.2. Opis i wyniki pomiarów. Pomiar przemieszczeń przeprowadzono przy obciążeniu węzłów krzyżujących się prętów siłami 2,0, 3,0, 5,0 i 7,0 kG. Węzły obciążano kolejno 1 ÷ 8. Pomiary powtarzano kilkakrotnie dla obu zestawów aparatury. Zamieszczone poniżej wielkości ugięć otrzymano z pomiarów przy pomocy czujników OT12 i OT14. Wyniki otrzymane z pomiarów czujnikami zegarowymi były bardzo bliskie lub równe otrzymanym aparaturą elektryczną. Stwierdzono zupełną liniową zależność ugięć od obciążenia oraz

spełnienie prawa o wzajemności przemieszczeń. I tak np. dla pomiarów czujnikami zegarowymi było

$$\delta_{22} = 14,6 \mu\text{m}, \quad \delta_{33} = 14,0 \mu\text{m}, \quad \delta_{66} = 14,7 \mu\text{m}, \quad \delta_{77} = 14,3 \mu\text{m}.$$

W związku z tym dla prostoty dalszych obliczeń wyznaczono średnie wielkości ugięć. Tabela współczynników δ_{ik} mm przy założeniu obciążenia siłą 1,0 kG

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \delta_{44} = \delta_{55} = \delta_{88} = 0,0112, \quad \delta_{22} = \delta_{33} = \delta_{66} = \delta_{77} = 0,0141, \\ \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{34} = \delta_{43} = \delta_{56} = \delta_{65} = \delta_{78} = \delta_{87} = 0,0049, \\ \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{24} = \delta_{42} = \delta_{57} = \delta_{75} = \delta_{68} = \delta_{86} = -0,0056, \\ \delta_{14} = \delta_{41} = \delta_{58} = \delta_{85} = -0,0053, \quad \delta_{15} = \delta_{51} = \delta_{48} = \delta_{84} = 0,0014, \\ \delta_{16} = \delta_{61} = \delta_{25} = \delta_{52} = \delta_{38} = \delta_{83} = \delta_{74} = \delta_{47} = 0,0011, \\ \delta_{17} = \delta_{71} = \delta_{35} = \delta_{53} = \delta_{46} = \delta_{64} = \delta_{28} = \delta_{82} = -0,0007, \\ \delta_{18} = \delta_{81} = \delta_{54} = \delta_{45} = -0,0009, \quad \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{67} = \delta_{76} = 0,0012, \\ \delta_{26} = \delta_{62} = \delta_{37} = \delta_{73} = 0,0017, \quad \delta_{27} = \delta_{72} = \delta_{36} = \delta_{63} = 0,0001. \end{aligned}$$

Podstawiając $z = \frac{1000}{m\omega^2}$, gdzie m jest masą skupioną w węzle, a ω częstością kołową drgań własnych otrzymamy układ równań dla metody sił pozwalający obliczyć częstości drgań własnych i postacie odkształcenia im odpowiadające.

$$\begin{aligned} (1,12-z)C_1 + 0,49C_2 - 0,56C_3 - 0,53C_4 + 0,14C_5 + 0,11C_6 - 0,07C_7 - 0,09C_8 = 0 \\ 0,49C_1 + (1,41-z)C_2 + 0,12C_3 - 0,56C_4 + 0,11C_5 + 0,17C_6 + 0,01C_7 - 0,07C_8 = 0 \\ \dots \\ -0,09C_1 - 0,07C_2 + 0,11C_3 + 0,14C_4 - 0,53C_5 - 0,56C_6 + 0,49C_7 + (1,12-z)C_8 = 0. \end{aligned}$$

Uwzględniając krzyżową symetrię układu ośmiu równań dochodzi się do znacznych uproszczeń w obliczeniach. Dla symetrii $C_1 = C_8$, $C_2 = C_7$, $C_3 = C_6$, $C_4 = C_5$ otrzymujemy dwa układy po cztery równania. Uwzględniając w dalszym ciągu symetrię krzyżową każdy układ rozłożymy na dwa dalsze układy (po dwa równania) symetryczny i antysymetryczny. Przyjmując $C_1 = C_4$, $C_2 = C_3$ mamy

$$\begin{aligned} (0,64-z)C_1 - 0,03C_2 = 0 \\ -0,03C_1 + (1,71-z)C_2 = 0. \end{aligned}$$

Z przyrównania wyznacznika do zera mamy $z_1 = 1,712$, $z_2 = 0,638$.

Tą drogą wyznaczono i pozostałe wartości własne. Uwzględniając dane materiałowe $\gamma = 0,00785 \text{ kG/cm}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$ oraz wymiary modelu znajdziemy $m = 0,00016804 \frac{\text{kG sek}^2}{\text{cm}}$. Z kolei jest

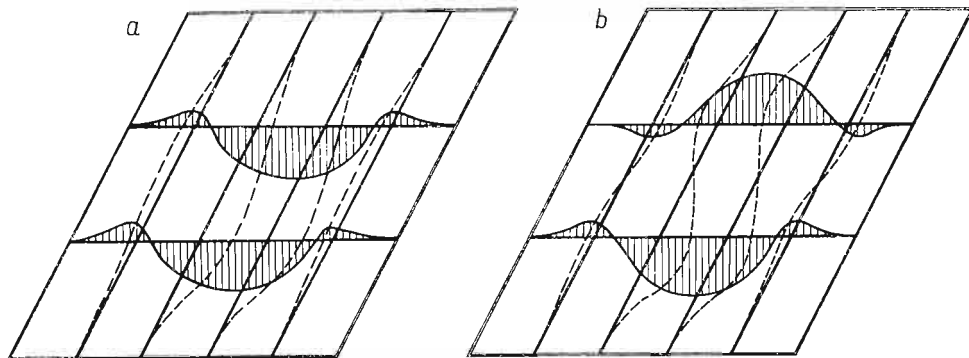
$$\omega_i^2 = \frac{1000}{mz_i}, \quad n_i = \frac{\omega_i}{2\pi}, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Niżej podano cztery pierwsze częstości, dalsze z uwagi na przyjęty model układu z masami skupionymi są obarczone dużymi błędami.

$$n_1 = 224 \text{ Hz}, \quad n_2 = 263 \text{ Hz}, \quad n_3 = 297 \text{ Hz}, \quad n_4 = 333 \text{ Hz}.$$

Obliczone z odpowiednich równań jednorodnych postacie odkształcenia są takie same, jak pomierzone w toku pomiarów dynamicznych.

Przykładowo na rys. 15 schematycznie zaznaczono postacie odkształcenia dla n_3 i n_4 wyznaczone na podstawie pomiarów statycznych. Porównując rys. 15b odpowiadający $n_4 = 333$ Hz z wibrogramem na rys. 10, odpowiadającym $n_4 = 340$ Hz stwierdzamy na tym ostatnim rysunku różnicę w fazie w jednym skrajnym węźle; punkt ten praktycznie



Rys. 15

nie podlega drganiom; stąd prawie zerowa jego amplituda, a poza tym trudno określić fazowość tego punktu z uwagi na jej niezupełnie ustalony charakter. Najniższa częstość drgań obliczona na podstawie przemieszczeń wyznaczonych czujnikami zegarowymi wyniosła 229 Hz.

6. Porównanie wyników pomiarów i obliczeń

Z porównania wyników badań dynamicznych i statycznych widzimy, że różnią się one w granicach nie przekraczających 10%. Jako szczególnie przydatne należy ocenić badania dynamiczne, które z powodzeniem można stosować i dla rusztów cylindrycznych o dużej wyniosłości.

W pracy [9] przeprowadzono dwoma sposobami obliczenia dwu pierwszych częstości drgań własnych i postaci odkształceń im odpowiadających omawianego tu modelu rusztu. Prowadząc obliczenia metodą sił z uwzględnieniem wpływu sił podłużnych (dla dwu pierwszych częstości mają one znikomy wpływ mimo małej wyniosłości układu), poziomych składowych sił bezwładności (ich wpływ jest również niewielki) i momentów skręcających (sztywne połączenia w węzłach) otrzymano $n_1 = 220$ Hz. Licząc w sposób przybliżony otrzymano $n_2 = 258$ Hz. Na podstawie badań przeprowadzonych dawniej w [9], jak wspomniano w p. 4.2, z pomiarów dynamicznych otrzymano $n_1 = 220$ Hz i $n_2 = 248$ Hz; z pomiarów statycznych (przeznaczonych tylko czujnikami zegarowymi o dokładności 0,01 mm) $n_1 = 235$ Hz i $n_2 = 258$ Hz. Wynik z pomiarów dynamicznych dla n_1 dokładnie zgadzał się z obliczeniowym, co, jak należy sądzić, było dziełem przypadku. Z kolei n_2 z pomiarów statycznych było zgodne z obliczeniowym. Obecnie, z uwagi na znacznie lepsze wyposażenie laboratorium w aparaturę pomiarową ponownie przeprowadzono

badania, lecz w nieporównanie większym zakresie, na nowym, identycznym modelu. Z obu badań otrzymano porównywalne wyniki, co pozwala sformułować wniosek o celowości i przydatności tego rodzaju badań na modelach. Okazuje się, że dynamiczny pomiar na modelach rusztów cylindrycznych pozwala określać nie tylko podstawową ale i kilka następnych częstości i postaci drgań własnych.

Literatura cytowana w tekście

1. F. BLEICH, E. MELAN, *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik*, Berlin-Wien 1927.
2. J. CZULAK, *Stateczność rusztu walcowego*, Arch. Mech. Stos., VI/1954
3. S. ДРОВОТ, *О анализе размеровой*, Zastosowania Matematyki, z. 4, 1954.
4. А. П. Филиппов, *Колебания упругих систем*, Киев 1956.
5. К. Финк, Х. Рорбах, *Измерение напряжений к деформаций*, Москва 1961 (tłumaczenie z niemieckiego)
6. A. LISOWSKI, *Stateczność i drgania powłok w oparciu o wyniki badań modelowych*, Rozpr. Inżyn. t. III, z. 89, 1957.
7. A. LISOWSKI, A. ORMICKI, B. MIĄSIK, *Czujnik pojemnościowy do pomiaru drgań*, Inż. i Budown., nr 8' 1956.
8. A. LISOWSKI, A. ORMICKI, B. MIĄSIK, *Pomiary drgań modeli powłok za pomocą aparatury elektroakustycznej*, Inż. i Budown. nr 8, 1957.
9. E. MACIĄG, *Analityczne i modelowe wyznaczanie częstości i postaci drgań własnych pewnych układów prętowych*, Rozpr. doktorska, Bibl. Gł. PK, 1963.
10. L. MÜLLER, *Teoria podobieństwa mechanicznego*, WNT, Warszawa 1961.
11. Г. И. Пшеничников, *Расчет сетчатых цилиндрических оболочек*, Москва 1961.
12. А. П. СУБАЧ, *Экспериментальное исследование влияния сил вязкого сопротивления на области неустойчивости колебательных с двигателем ограниченной мощности*, Вопросы динамики и прочности, Выпуск VIII.
13. А. П. СУБАЧ, *Экспериментальное исследование влияния сил сухого трения на области неустойчивости колебательных систем с двигателем ограниченной мощности*, Вопросы динамики и прочности, Выпуск VIII.

Резюме

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

На основе анализа размерностей определен закон модельного подобия для колебаний решеток. Опираясь на этот закон можно определять частоту колебаний действительной конструкции измеряя соответствующие частоты на модели. Приводятся результаты статических и динамических исследований стальной модели цилиндрической решетки. Описывается также сама модель и применяемая аппаратура. Экспериментальные данные сравниваются с результатами полученными теоретическим путем.

S u m m a r y

EXPERIMENTAL ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF CYLINDRICAL GRIDS

Using the dimensional analysis the law of model similarity for vibrations of grids is determined. Thus the frequencies of vibrations of the natural object may be calculated, if the frequencies of a model are measured. Presented are static and dynamic investigations of a steel model of a cylindrical grid. Described is the model and the measuring equipment. Experimental results are compared with those obtained from the theoretical analysis.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 lutego 1969 r.
