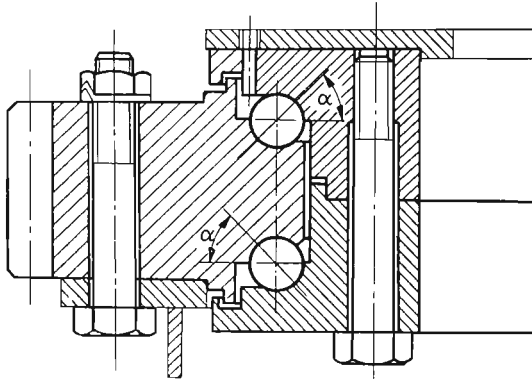


RÓWNANIA STATYKI DWURZĘDOWEGO KULKOWEGO ŁOŻYSKA WIĘNCOWEGO

TERESA GIB CZYŃSKA, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Konstrukcja łożysk wieńcowych znacznie różni się od konstrukcji katalogowych łożysk tocznych, powszechnie stosowanych w budowie maszyn. Charakterystyczną cechą dwurzędowych łożysk wieńcowych są duże wymiary średnic, wynoszące od około 0,5 m do około 3,5 m [23], przy czym jeden z pierścieni łożyska — wewnętrzny lub zewnętrzny — posiada wieńiec zębaty (rys. 1). Łożyska te dzięki swej konstrukcji przenoszą siły osiowe,



Rys. 1

promieniowe (kąt działania $0 < \alpha < 90^\circ$) i momenty oraz zapewniają dużą dokładność i pewność przenoszonego ruchu. W stosunku do tradycyjnych rozwiązań z czopem centrującym, posiadają zwartą budowę i są lżejsze. Wymagają jednak znacznie sztywniejszych konstrukcji wsporczych oraz nie mogą być obciążone bezpośrednio siłami skupionymi. Zatem uogólnione siły, przenoszone przez łożysko, są wypadkowymi wszystkich obciążeń zewnętrznych, działających na część obrotową maszyny, związaną z łożyskiem.

Analizą rozkładu sił na poszczególne kulki w łożysku wieńcowym oraz określeniem ich maksymalnych wartości zajmowali się GOLDSZTEIN [7], OHNRICH [15], KAZANSKIJ [10], MATTHIAS [11], oraz SZUCKI [21]. Przy czym GOLDSZTEIN, MATTHIAS i SZUCKI podali metodę obliczania łożysk o kącie działania $\alpha = 90^\circ$ (wzdłużnych dwukierun-

kowych) obciążonych siłą osiową i momentem. Natomiast KAZANSKIJ i OHNRICH uwzględnili działanie siły promieniowej na łożysko, lecz obliczanie maksymalnych nacisków na kulki oparli na zasadzie superpozycji sił. Stosowanie w tym przypadku zasady superpozycji jest niewłaściwe, gdyż na podstawie wzorów Hertza [9] dla styku punktowego w zakresie odkształceń sprężystych mamy nieliniową zależność między odkształceniem a siłą nacisku

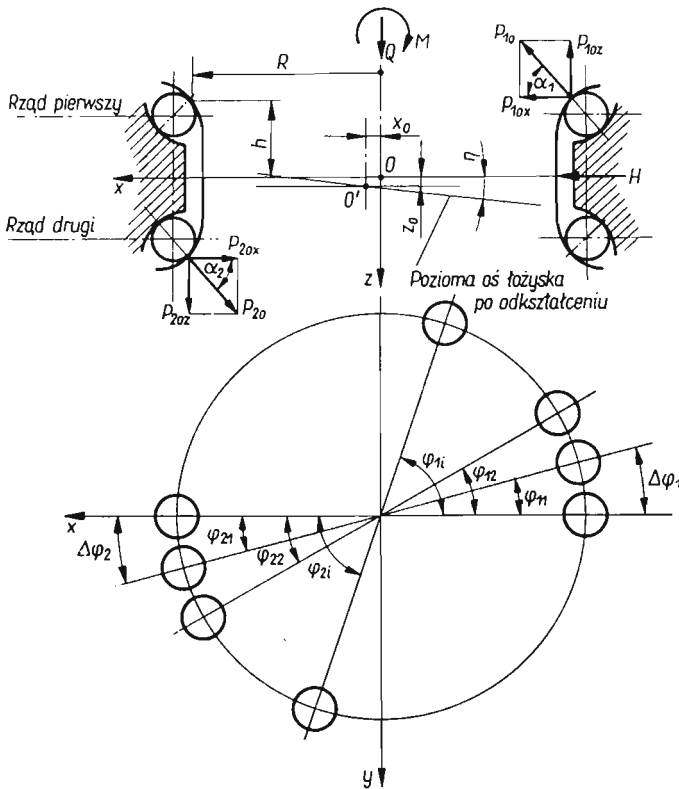
$$(1.1) \quad f = CP^{2/3};$$

C jest stałą zależną od geometrii i od materiału stykających się elementów.

Jak z powyższego wynika, do tej pory brak jest dostatecznie dokładnych metod pozwalających na określenie sztywności łożyska i sił działających na poszczególne kulki. Nie został również wyjaśniony wpływ kąta działania $\alpha < 90^\circ$ na pracę łożyska.

2. Założenia

Opierając obliczenia na teorii Hertza [9] oraz na metodzie Stribeck [20] przyjmujemy następujące założenia:



Rys. 2

1. Naprężenia zastępcze nie przekraczają granicy proporcjonalności.
2. Powierzchnie stykających się ciał są idealnie gładkie (nie występuje tarcie) oraz posiadają idealne kształty geometryczne.

3. Odształcenie występuje tylko w miejscach styku kulek z bieżniami. Powierzchnia styku jest płaska, a jej wymiary są małe w porównaniu z promieniami krzywizn stykających się elementów.

4. Pierścienie łożyska są sztywne. Pierścień zewnętrzny nie przemieszcza się, natomiast pierścień wewnętrzny przemieszcza się jako ciało sztywne.

5. Obciążenie działa w jednej płaszczyźnie.

Oprócz powyższych założeń przyjęto dodatkowo: mały stosunek h/R (rys. 2), co pozwala na pominięcie poziomych składowych przemieszczenia kulek związanych z obrotem pierścienia; luz łożyskowy — równy zeru.

3. Określenie podstawowych wielkości

W pracy zajmować się będziemy łożyskiem obciążonym uogólnionymi siłami Q , H i M , leżącymi w jednej płaszczyźnie. Siły te są wypadkowymi wszystkich obciążeń zewnętrznych działających na część obrotową maszyny związaną z łożyskiem.

Za wielkości dodatnie uogólnionych obciążeń będziemy uważali ten moment M i te siły Q , H , których zwroty są zgodne ze zwrotami uogólnionych sił, przedstawionych na rys. 2. Rozkład nacisków na kulki w łożysku zależy od wartości i znaków (zwrotów) poszczególnych sił zewnętrznych.

Dla ujęcia całości zagadnienia rozkładu sił wystarczy rozpatrzyć dwa układy obciążeń zewnętrznych, mianowicie jeden układ taki, jak na rys. 2, oraz drugi różniący się od pierwszego jedynie znakiem siły H .

Dla innych możliwych wariantów obciążeń zewnętrznych rozkład sił na kulki będzie symetryczny lub antymetryczny w stosunku do rozkładu sił wewnętrznych, wynikającego z wyżej wymienionych dwóch układów.

Na skutek działania obciążeń zewnętrznych pierścień wewnętrzny wraz z kulkami przemieści się w kierunku osi x i z odpowiednio o x_0 i z_0 , a ponadto obróci się jako bryła sztywna dookoła osi y o kąt η (rys. 2).

W łożysku nieobciążonym, środek każdej kulki leży na prostej łączącej punkty styku kulki z poszczególnymi pierścieniami i przechodzącej przez środki krzywizn dwu bieżni w płaszczyźnie południkowej. Kąt działania zawarty między tą prostą a osią x (rys. 2) jest stały dla wszystkich kulek znajdujących się w jednym rzędzie i dla rzędu pierwszego wynosi α_1 , a dla drugiego α_2 . W praktyce najczęściej stosuje się łożyska, w których kąty działania w obu rzędach są sobie równe

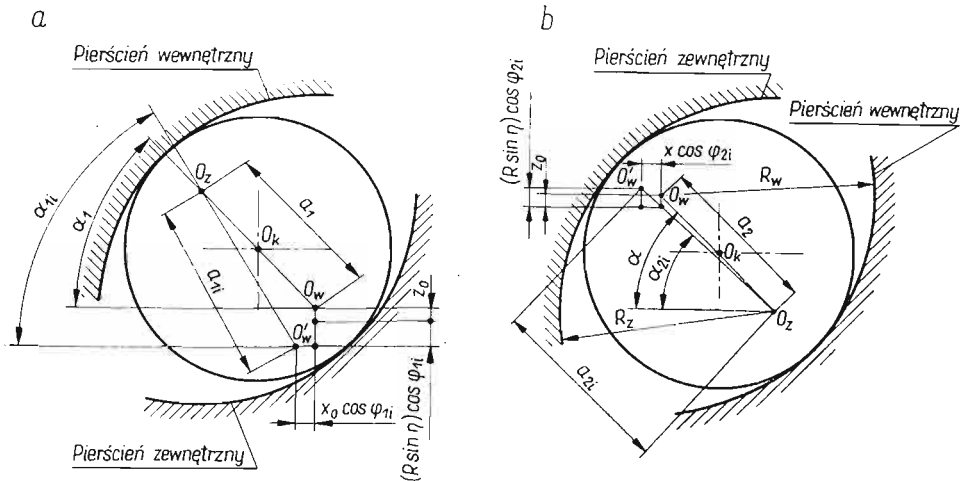
$$(3.1) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha.$$

Gdy pierścień wewnętrzny wraz z kulkami przemieści się pod wpływem obciążenia, wówczas kąt działania każdej kulki ulegnie zmianie i będzie funkcją kąta φ (rys. 2), określającego położenie kulki. Kąt ten oznaczamy będziemy przez α_{1i} — dla i -tej kulki rzędu pierwszego i α_{2i} — dla i -tej kulki rzędu drugiego (rys. 3). Jeżeli założymy, że krzywizna bieżni w płaszczyźnie południkowej jest równa zeru [14,16], kąt działania mimo odształcania się kulek i bieżni nie ulegnie zmianie i w dalszym ciągu będzie obowiązywała zależność (3.1).

Zbliżenie dwu pierścieni mierzone wzdłuż prostej łączącej punkty styku kulek z bieżniami (rys. 3) wynosi

$$(3.2) \quad \bar{f}_{mi} = a_{mi} - a_m; \quad m = 1, 2,$$

gdzie a_m jest odległością między środkami krzywizn w płaszczyźnie południkowej bieżni zewnętrznej i wewnętrznej rzędu pierwszego lub drugiego przed odkształceniem, zaś a_{mi} jest odległością między środkami krzywizn w płaszczyźnie południkowej bieżni zewnętrznej i wewnętrznej dla i -tej kulki rzędu pierwszego lub drugiego po odkształceniu.



Rys. 3

Jeżeli $a_{mi} > a_m$, wówczas pierścienie w punktach styku z i -tą kulką oraz kulka ulegają odkształceniu sprężystemu, które odpowiada zbliżeniu tych pierścieni $f_{mi} = \bar{f}_{mi}$; $m = 1, 2$.

Gdy $a_{mi} \leq a_m$, przyjmujemy, że odkształcenie i -tej kulki i pierścieni jest równe zero $f_{mi} = 0$.

Odległość a_{mi} możemy wyznaczyć jako funkcję uogólnionych przemieszczeń x_0 , z_0 i η , z zależności geometrycznych przedstawionych na rys. 3.

Zbliżenie \bar{f}_{mi} wyrazimy zależnością

$$(3.3) \quad \bar{f}_{mi} = [(a_m \sin \alpha_m \pm z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_{mi})^2 + (a_m \cos \alpha_m \mp x_0 \cos \varphi_{mi})^2]^{1/2} - a_m; \quad m = 1, 2.$$

Znaki górne obowiązują dla rzędu pierwszego, znaki dolne dla rzędu drugiego.

W przypadku, gdy $a_m = \infty$, tzn. gdy krzywizna co najmniej jednej bieżni w płaszczyźnie południkowej jest równa zero, zbliżenie określimy wzorem prostszym

$$(3.4) \quad \bar{f}_{mi} = \pm z_0 \sin \alpha_m \mp x_0 \cos \alpha_m \cos \varphi_{mi} + R \sin \eta \sin \alpha_m \cos \varphi_{mi}.$$

Gdy $\bar{f}_{mi} \leq 0$, przyjmujemy $f_{mi} = 0$.

Stosując wzór Hertza [9] wiążący odkształcenie f_{mi} z siłą P_{mi} działającą na i -tą kulkę, wyrazimy P_{mi} w funkcji uogólnionych przemieszczeń pierścienia wewnętrznego x_0, z_0, η , mianowicie

$$(3.5) \quad P_{mi} = Cf_{mi}^{3/2}.$$

4. Statyka łożyska

Związki między obciążeniami zewnętrznymi a uogólnionymi przemieszczeniami x_0, z_0 i η znajdziemy z warunków równowagi pierścienia wewnętrznego, które dla układu sił przedstawionego na rys. 2 są następujące:

$$(4.1) \quad \sum_{i=1}^n P_{1iz} - \sum_{i=1}^n P_{2iz} - Q = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{1ix} - \sum_{i=1}^n P_{2ix} + H = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n P_{1iz} R \cos \varphi_{1i} + \sum_{i=1}^n P_{2iz} R \cos \varphi_{2i} + \sum_{i=1}^n P_{1ix} h + \sum_{i=1}^n P_{2ix} h - M = 0,$$

gdzie: $P_{1iz} = P_{1i} \sin \alpha_{1i}$ jest rzutem siły działającej na i -tą kulkę¹ rzędu pierwszego, na oś z (rys. 2); $P_{1ix} = P_{1i} \cos \alpha_{1i} \cos \varphi_{1i}$ jest rzutem siły, działającej na i -tą kulkę rzędu pierwszego, na oś x ; $P_{2iz} = P_{2i} \sin \alpha_{2i}$ jest rzutem siły, działającej na i -tą kulkę rzędu drugiego, na oś z ; $P_{2ix} = P_{2i} \cos \alpha_{2i} \cos \varphi_{2i}$ jest rzutem siły, działającej na i -tą kulkę rzędu drugiego, na oś x ; n oznacza liczbę kulek w jednym rzędzie.

Sumowanie obejmuje wszystkie kulki (praktycznie — kulki obciążone), zaś R, h i φ oznaczają wymiary łożyska oznaczone na rys. 2.

Kąt działania α_{mi} jest funkcją kąta φ_{mi} i obowiązują dla niego zależności:

$$(4.2) \quad \sin \alpha_{mi} = \frac{a_m \sin \alpha_m \pm z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_{mi}}{\sqrt{(a_m \sin \alpha_m \pm z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_{mi})^2 + (a_m \cos \alpha_m \mp x_0 \cos \varphi_{mi})^2}},$$

$$\cos \alpha_{mi} = \frac{a_m \cos \alpha_m \mp x_0 \cos \varphi_{mi}}{\sqrt{(a_m \sin \alpha_m \pm z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_{mi})^2 + (a_m \cos \alpha_m \mp x_0 \cos \varphi_{mi})^2}},$$

$m = 1, 2$.

Znak górny dotyczy rzędu pierwszego, a znak dolny — rzędu drugiego.

Jeżeli $a_m = \infty$, wówczas $\alpha_{1i} = \alpha_1, \alpha_{2i} = \alpha_2$, dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n$.

Przy dużej ilości kulek zamiast sił skupionych, działających na kulki, możemy wprowadzić równoważne obciążenie ciągłe na obwodzie bieżni, zastępując sumowanie wielkości P_{mi} przez całkowanie funkcji

$$\frac{P_{mi}(\varphi)}{\Delta \varphi_m} d\varphi_m,$$

gdzie $\Delta \varphi_m = \frac{2\pi}{n_m}$, $m = 1, 2$, zaś n_m oznacza liczbę kulek w jednym rzędzie.

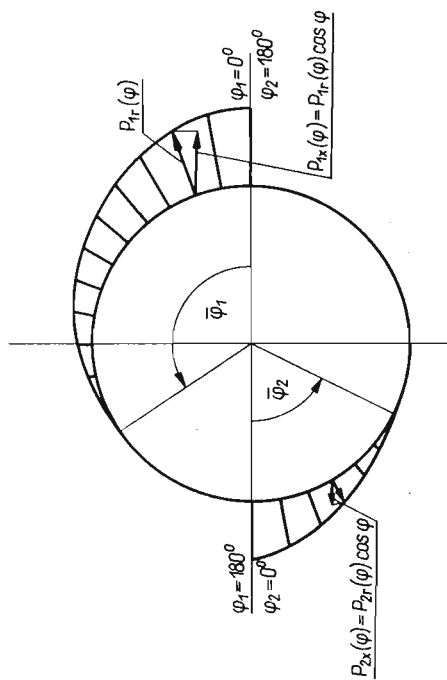
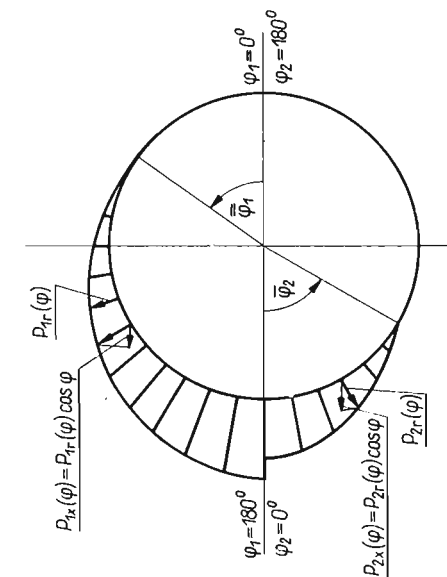
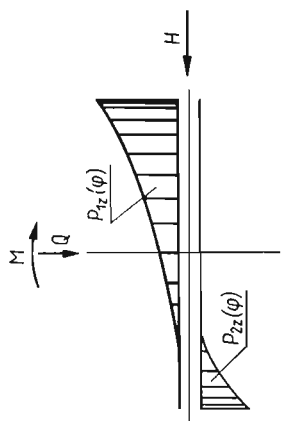
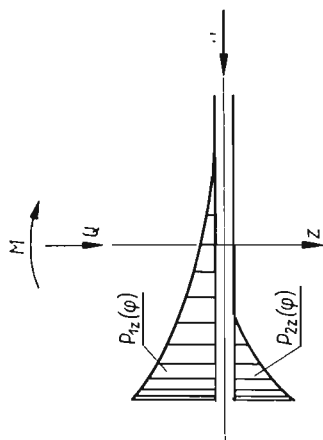
W przypadku $n_1 = n_2 = n$, mamy $\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_2 = \Delta \varphi$ oraz $\varphi_{1i} = \varphi_{2i} = \varphi_i$.

Wstawiając do równań (4.1) wyrażenia określone wzorami (3.3) i (4.2) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi Q}{cn} &= \int_0^{\bar{\varphi}_1} \frac{[\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2} - a_1]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2}} \times (a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1) d\varphi_1 + \\
 &- \int_0^{\bar{\varphi}_2} \frac{[\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2} - a_2]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2}} \times (a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2) d\varphi_2, \\
 \frac{\pi H}{cn} &= - \int_0^{\bar{\varphi}_1} \frac{[\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2} - a_1]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2}} \times (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1) \cos \varphi_1 d\varphi_1 + \\
 &+ \int_0^{\bar{\varphi}_2} \frac{[\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2} - a_2]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2}} \times (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2) \cos \varphi_2 d\varphi_2, \\
 (4.3) \quad \frac{\pi M}{cn} &= R \int_0^{\bar{\varphi}_1} \frac{[\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2} - a_1]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2}} \times (a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1) \cos \varphi_1 d\varphi_1 + \\
 &+ R \int_0^{\bar{\varphi}_2} \frac{[\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2} - a_2]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2}} \times (a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2) \cos \varphi_2 d\varphi_2 + \\
 &+ h \int_0^{\bar{\varphi}_1} \frac{[\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2} - a_1]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2}} \times (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1) \cos \varphi_1 d\varphi_1 + \\
 &+ h \int_0^{\bar{\varphi}_2} \frac{[\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2} - a_2]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2}} \times (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2) \cos \varphi_2 d\varphi_2.
 \end{aligned}$$

Granice całkowania $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$ wyznaczmy z warunku $f_{m1} = 0$ (rys. 4).

Równania (4.3) obowiązują dla układu sił przedstawionych na rys. 2 z tym, że siła H powinna być tak niewielka, aby maksymalna siła działająca na kulkę rzędu pierwszego wystąpiła przy $\varphi_1 = 0$. Jeżeli siła H jest bardzo duża, wówczas obciążenie rzędu pierwszego ulegnie zmianie (rys. 5) i maksymalna siła działająca na kulkę wystąpi przy $\varphi_1 = 180^\circ$. Równania (4.3.) będą jednak w dalszym ciągu obowiązywały z tym tylko, że w całkach odnoszących się do rzędu pierwszego należy zmienić dolną i górną granicę całkowania. Granica dolna będzie równa $\bar{\varphi}_1$, a górna π . Jeżeli siła H ma zwrot przeciwny ($-H$) równania będą obowiązywały tak długo, jak długo $f_2(0^\circ) \geq 0$. Rozwiązując układ (4.3.) i od-



Rys. 5

Rys. 4

wracając go wyznaczylibyśmy uogólnione przemieszczenia x_0, z_0, η — a tym samym rozkład nacisków na kulki w łożysku — w funkcji uogólnionych sił zewnętrznych

$$(4.4) \quad x_0 = F_1(Q, H, M), \quad z_0 = F_2(Q, H, M), \quad \eta = F_3(Q, H, M).$$

Równania (4.3) nie nadają się jednak do dalszej analizy, zarówno z uwagi na trudności całkowania, jak i konieczność późniejszego rozwiązywania układu równań przestępnych ze złożonymi funkcjami nieelementarnymi. Można je rozwiązać metodą przybliżoną przedstawiając wyrażenia niewymierne w postaci potrójnych szeregów potęgowych. Na przykład:

$$f_1 \left(\varphi_1, \alpha_1; z_0, x_0, \eta, \frac{1}{a_1} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{ijk}(\varphi_1, \alpha_1; z_0) x_0^i \sin \eta^j a_1^{-k}.$$

Rozwiązanie równań (4.3) za pomocą szeregów będzie przedmiotem oddzielnej pracy, natomiast obecnie zajmiemy się rozwiązaniem ścisłym tych równań zakładając $a_m = \infty$ (pominiemy zmianę kąta działania, co byłoby ściśle w przypadku co najmniej jednej bieżni stożkowej, natomiast dla bieżni toroidalnych stanowi dogodne przybliżenie), wówczas prawa strona powyższej zależności będzie równa wyrażeniu (3.4) i układ równań (4.3) przyjmie znacznie prostszą postać:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \frac{\pi Q}{cn \sin \alpha} &= \int_0^{\bar{\varphi}_1} (z_0 \sin \alpha - x_0 \cos \alpha \cos \varphi + R \sin \eta \sin \alpha \cos \varphi)^{3/2} d\varphi + \\ &\quad - \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-z_0 \sin \alpha + x_0 \cos \alpha \cos \varphi + R \sin \eta \sin \alpha \cos \varphi)^{3/2} d\varphi, \\ \frac{\pi H}{cn \cos \alpha} &= - \int_0^{\bar{\varphi}_1} (z_0 \sin \alpha - x_0 \cos \alpha \cos \varphi + R \sin \eta \sin \alpha \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi + \\ &\quad + \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-z_0 \sin \alpha + x_0 \cos \alpha \cos \varphi + R \sin \eta \sin \alpha \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi, \\ \frac{\pi M}{cn(R + h \operatorname{ctg} \alpha) \sin \alpha} &= \int_0^{\bar{\varphi}_1} (z_0 \sin \alpha - x_0 \cos \alpha \cos \varphi + R \sin \eta \sin \alpha \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi + \\ &\quad + \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-z_0 \sin \alpha + x_0 \cos \alpha \cos \varphi + R \sin \eta \sin \alpha \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

W równaniach tych przyjęto $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, a ponadto obie zmienne φ_1 i φ_2 oznaczono krótko przez φ .

Granice całkowania (rys. 4) wyznaczmy z warunku $f_{mi} = 0$; $m = 1, 2$, a więc

$$(4.6) \quad \bar{\varphi}_1 = \arccos \frac{z_0}{x_0 \operatorname{ctg} \alpha - R \sin \eta},$$

$$(4.7) \quad \bar{\varphi}_2 = \arccos \frac{z_0}{x_0 \operatorname{ctg} \alpha + R \sin \eta}.$$

W przypadku

$$(4.8) \quad \frac{z_0}{x_0 \operatorname{ctg} \alpha - R \sin \eta} \leq -1,$$

mamy $\bar{\varphi}_1 = \pi$.

Układ ten jest mniej skomplikowany niż (4.3) i w związku z tym prawe strony równań można będzie scałkować. Rozwiązanie prowadzi do równań przestępnych zawierających całki eliptyczne.

Odwrócenie tych równań i przedstawienie uogólnionych przemieszczeń w postaci (4.4) jest jednak w dalszym ciągu niemożliwe. Przemieszczenia możemy wyznaczyć jedynie na drodze numerycznej (rozwiązywanie równań przestępnych) lub metodą przybliżoną np. metodą szeregów potęgowych, którą stosowano w pracy [6] do rozwiązania tego układu równań, dla pewnego zakresu obciążeń zewnętrznych (duży moment, małe siły — osiowa i promieniowa).

W przypadku działania na łożysko tylko jednej uogólnionej siły układ równań sprowadzi się do jednego równania, mianowicie:

1. W przypadku działania siły osiowej Q

$$\frac{\pi Q}{cn} = z_0^{3/2} \sin^{5/2} \alpha \int_0^{\pi} d\varphi;$$

stąd

$$(4.9) \quad z_0 = \left(\frac{Q}{cn \sin^{5/2} \alpha} \right)^{2/3}.$$

2. W przypadku działania momentu M

$$\frac{\pi M}{cn} = 2 \sin^{3/2} \alpha (R \sin \eta)^{3/2} \left(R \sin \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \varphi d\varphi + h \cos \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \varphi d\varphi \right);$$

stąd

$$(4.10) \quad R \sin \eta = \left[\frac{\pi M}{1,4378 cn (R + h \operatorname{ctg} \alpha) \sin^{5/2} \alpha} \right]^{2/3}.$$

3. W przypadku działania siły poziomej H

$$\frac{\pi H}{cn} = 2x_0^{3/2} \cos^{5/2} \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \varphi d\varphi;$$

stąd

$$(4.11) \quad x_0 \operatorname{ctg} \alpha = \left(\frac{\pi H}{1,4378 cn \sin^{3/2} \alpha \cos \alpha} \right)^{2/3}.$$

Powyższe trzy przypadki są znane w literaturze [14,17]; zależności (4.9)–(4.11) przytoczyliśmy ze względu na to, że będziemy z nich korzystać w dalszej części pracy.

5. Rozwiązanie ściśle równań w przypadku $a_m = \infty$

Przystępując do rozwiązania układu równań (4.5) założymy $z_0 \neq 0$ i wyciągniemy $(z_0 \sin \alpha)^{3/2}$ przed znak całki oraz zastosujemy następujące podstawienia:

$$(5.1) \quad u = -\frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha}{z_0} + \frac{R \sin \eta}{z_0},$$

$$(5.2) \quad v = \frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha}{z_0} + \frac{R \sin \eta}{z_0},$$

$$(5.3) \quad q_Q = \left(\frac{Q}{cn \sin^{5/2} \alpha} \right)^{2/3},$$

$$q_M = \left[\frac{\pi M}{1,4378 cn (R + h \operatorname{ctg} \alpha) \sin^{5/2} \alpha} \right]^{2/3},$$

$$q_H = \left(\frac{\pi H}{1,4378 cn \cos \alpha \sin^{3/2} \alpha} \right)^{2/3},$$

gdzie u i v noszą charakter bezwymiarowych uogólnionych przemieszczeń pierścienia wewnętrznego, q — zredukowanych obciążeń [o wymiarze długości wg zależności (4.9)–(4.11)].

Odształcenia i -tej kulki i pierścienia wewnętrznego (3.4) wyrażone za pomocą parametrów u i v przyjmą postać: w rzędzie pierwszym

$$(5.4) \quad f_1(\varphi) = z_0(1 + u \cos \varphi) \sin \alpha,$$

w rzędzie drugim

$$(5.5) \quad f_2(\varphi) = z_0(-1 + v \cos \varphi) \sin \alpha;$$

skąd przy $z_0 \neq 0$

$$\bar{\varphi}_1 = \arccos \left(-\frac{1}{u} \right), \quad \bar{\varphi}_2 = \arccos \left(\frac{1}{v} \right).$$

Równania (4.5) po uwzględnieniu zależności (5.1)–(5.3) zapiszemy następująco:

$$(5.6) \quad q_Q^{3/2} = \frac{z_0^{3/2}}{\pi} \left[\int_0^{\bar{\varphi}_1} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} d\varphi - \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-1 + v \cos \varphi)^{3/2} d\varphi \right],$$

$$q_H^{3/2} = \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left[- \int_0^{\bar{\varphi}_1} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-1 + v \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi \right],$$

$$q_M^{3/2} = \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left[\int_0^{\bar{\varphi}_1} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-1 + v \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi \right].$$

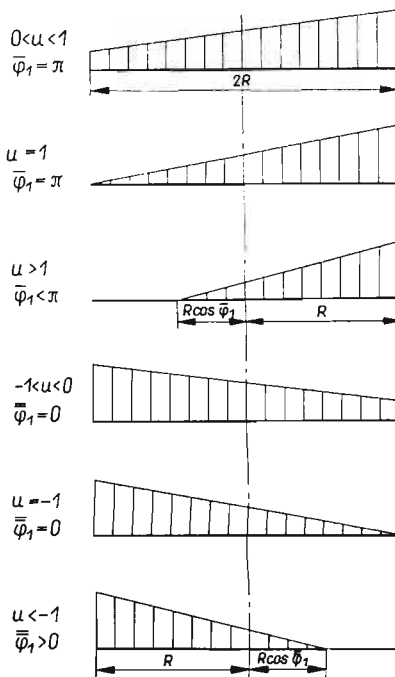
Z analizy funkcji podcałkowych wynika, że parametr u dla przyjętego układu obciążeń zewnętrznych może przyjmować dowolne wartości, natomiast parametr v winien spełniać warunek $v \geq 1$.

Wartości parametru u wskazują na rodzaj obciążenia rzędu górnego. Szczególnie interesujące są jego wartości graniczne, odpowiadające takiemu obciążeniu, przy jakim $f_1(0^\circ) = 0$ albo $f_1(180^\circ) = 0$.

Rozpatrzmy przypadek pierwszy, tzn. gdy $f_1(0^\circ) = 0$. Wówczas korzystając z zależności (5.4), otrzymamy

$$-\frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha}{z_0} + \frac{R \sin \eta}{z_1} = -1,$$
 a więc dla $f_1(0^\circ) = 0$, mamy $u = -1$. Podobnie dla $f_1(180^\circ) = 0$, mamy $u = 1$.

Analizując w dalszym ciągu wyrażenie podcałkowe (5.6) możemy stwierdzić, że dla $|u| \leq 1$ cały pierwszy rząd kulek będzie obciążony (górną granicą całkowania $\varphi_1 = \pi$), a dla $|u| > 1$ tylko część tego rzędu będzie przenosić obciążenie. Wartość bezwzględna parametru u wskazuje, która część rzędu pierwszego przenosi obciążenie. Na rys. 6 przedstawiono rzuty odkształceń na oś z w zależności od wartości parametru u .



Rys. 6

Dla dodatnich wartości parametru u maksymalne odkształcenie w rzędzie pierwszym wystąpi przy $\varphi_1 = 0^\circ$, a dla ujemnych przy $\varphi_1 = 180^\circ$ (duża siła H). Widzimy więc, że równania (5.6) będą obowiązywały tylko dla dodatnich wartości parametru u . Dla wartości ujemnych należy zmienić granicę całkowania we wszystkich całkach, zawierających ten parametr.

W odniesieniu do wartości parametru v , winien on spełniać warunek $v \geq 1$, co wynika z poprzednio przyjętego założenia $f_2(0^\circ) \geq 0$.

Równania dla ujemnych wartości parametru u zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned}
 q_{\underline{Q}}^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{\pi} \left[\int_{\bar{\varphi}_1}^{\pi} (1-u \cos \varphi)^{3/2} d\varphi - \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-1+v \cos \varphi)^{3/2} d\varphi \right], \\
 (5.7) \quad q_{\underline{H}}^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left[- \int_{\bar{\varphi}_1}^{\pi} (1-u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-1+v \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi \right], \\
 q_{\underline{M}}^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left[\int_{\bar{\varphi}_1}^{\pi} (1-u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-1+v \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi \right].
 \end{aligned}$$

Z uwagi na fakt, że w powyższych równaniach uwzględniono już znak ujemny parametru u , to w dalszym ciągu rozważań całki te będziemy rozwiązywać tylko dla wartości dodatnich tego parametru, przy czym w definicji (5.1) należy zmienić znaki po prawej stronie wyrażenia.

Dolna granica całkowania

$$\bar{\varphi}_1 = \arccos \frac{z_0}{x_0 \operatorname{ctg} \alpha - R \sin \eta} = \bar{\varphi}_1$$

w przypadku, gdy

$$\frac{z_0}{x_0 \operatorname{ctg} \alpha - R \sin \eta} \geq 1,$$

wynosi $\bar{\varphi}_1 = 0$.

Całki zawarte w równaniach (5.6) i (5.7) sprowadzimy do całek eliptycznych pierwszego i drugiego rodzaju.

Najpierw zajmiemy się rozwiązaniem pierwszej całki z układu równań (5.6), zawierającej parametr u . W tym celu zastosujemy podstawienie

$$(5.8) \quad \cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \gamma,$$

gdzie $\gamma = \frac{\varphi}{2}$. Całka ta przyjmie więc postać:

$$(5.9) \quad \int_0^{\bar{\varphi}_1} (1+u \cos \varphi)^{3/2} d\varphi = 2(1+u)^{3/2} \int_0^{\bar{\gamma}_1} (1+b_1^2 \sin^2 \gamma)^{3/2} d\gamma,$$

gdzie

$$(5.10) \quad b_1 = \sqrt{\frac{2u}{1+u}},$$

$$(5.11) \quad \bar{\gamma}_1 = \arcsin \sqrt{\frac{1+u}{2u}}.$$

Rozwiązanie całki znajdującej się po prawej stronie równości (5.9) zależy od wartości parametru b_1 [18], a tym samym od wartości parametru u . Ponieważ parametr u może przyjmować dowolne dodatnie wartości, całka ta będzie miała dwa rodzaje rozwiązań

w zależności od przedziału zmienności tego parametru. Przedziały te określimy nierównościami: 1) dla $0 < b_1 \leq 1$, co odpowiada $0 < u \leq 1$; 2) dla $b_1 \geq 1$, co odpowiada $u \geq 1$.

W przypadku, gdy $0 < u \leq 1$ ($\bar{\varphi}_1 = \pi$), całka (5.9) zgodnie z katalogiem całek [18] będzie miała rozwiązanie

$$\int_0^{\pi/2} (1 - b_1^2 \sin^2 \gamma)^{3/2} d\gamma = \frac{2}{3} (2 - b_1^2) \mathbf{E}(b_1) - \frac{1 - b_1^2}{3} \mathbf{K}(b_1),$$

gdzie $\mathbf{K}(k)$ jest całką eliptyczną pełną pierwszego rodzaju, $\mathbf{E}(k)$ jest całką eliptyczną pełną drugiego rodzaju, a moduł $k = b_1$.

Podstawiając za b_1 wyrażenie (5.10) otrzymamy

$$(5.12) \quad \int_0^{\pi} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} d\varphi = \frac{2}{3} \sqrt{1+u} \left[4\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{2u}{1+u}} \right) - (1-u)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{2u}{1+u}} \right) \right].$$

Całkę (5.9) w przypadku $u \geq 1$ rozwiążemy [18]:

$$\int_0^{\gamma_1} (1 - b_1^2 \sin^2 \gamma)^{3/2} d\gamma = \left\{ \frac{2}{3} (2 - b_1^2) \left[b_1 E \left(\gamma_2, \frac{1}{b_1} \right) + \frac{1 - b_1^2}{b_1} F \left(\gamma_2, \frac{1}{b_1} \right) \right] + \right. \\ \left. - \frac{1 - b_1^2}{3b_1} F \left(\gamma_2, \frac{1}{b_1} \right) + \frac{b_1^2}{3} \sin \gamma \cos \gamma \sqrt{1 - b_1^2 \sin^2 \gamma} \right\} \Big|_0^{\gamma_1},$$

gdzie $F \left(\gamma_2, \frac{1}{b_1} \right)$ jest całką eliptyczną pierwszego rodzaju, $E \left(\gamma_2, \frac{1}{b_1} \right)$ — całką eliptyczną drugiego rodzaju, zaś

$$(5.13) \quad \gamma_2 = \arcsin(b_1 \sin \gamma).$$

Dla dolnej granicy całkowania wartość $\gamma_2 = 0$, a dla górnej $\gamma_2 = \pi/2$.

Ostatecznie całkę (5.9) dla $u \geq 1$ przedstawimy następująco

$$(5.14) \quad \int_0^{\bar{\varphi}_1} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} d\varphi = \frac{2}{3\sqrt{2u}} \left[(u^2 - 4u + 3)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{1+u}{2u}} \right) + 8u\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{1+u}{2u}} \right) \right].$$

Następną całkę $\int_0^{\bar{\varphi}_1} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi$ rozwiążemy, wykorzystując poprzednio stosowane podstawienia. Ponieważ sposób rozwiązania jest analogiczny, podamy tylko wzory końcowe. I tak dla $0 < u \leq 1$

$$(5.15) \quad \int_0^{\pi} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{5u} \sqrt{1+u} \left[(3u^2 + 1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{2u}{u+1}} \right) + \right. \\ \left. - (1-u)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{2u}{1+u}} \right) \right],$$

a dla $u \geq 1$

$$(5.16) \quad \int_0^{\bar{\varphi}_1} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{5\sqrt{2u}} \left[2(3u^2 + 1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{1+u}{2u}} \right) + \right. \\ \left. - (u-1)(3u-1)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{1+u}{2u}} \right) \right].$$

Następnie przystąpimy do rozwiązania całek układu równań (5.7) zawierających parametr u . W tym przypadku zamiast podstawienia (5.8) korzystniejsze jest podstawienie $\cos \varphi = 2\cos^2 \gamma - 1$, gdzie $\gamma = \varphi/2$; a zatem

$$(5.17) \quad \int_{\varphi_1}^{\pi} (1-u \cos \varphi)^{3/2} d\varphi = 2(1+u)^{3/2} \int_{\gamma_1}^{\pi/2} (1-b_1^2 \cos^2 \gamma)^{3/2} d\gamma.$$

Dla $0 < u \leq 1$, $\varphi_1 = 0$, całka zgodnie z katalogiem całek [18] będzie miała rozwiązanie

$$\int_0^{\pi/2} (1-b_1 \cos^2 \gamma)^{3/2} d\gamma = \left\{ \frac{2}{3} (2-b_1^2) \left[E(\gamma_3, b_1) - \frac{b_1 \sin \gamma \cos \gamma}{\sqrt{1-b_1^2 \cos^2 \gamma}} \right] + \right. \\ \left. - \frac{1-b_1^2}{3} F(\gamma_3, b_1) + \frac{b_1}{3} \sin \gamma \cos \gamma \sqrt{1-b_1^2 \sin^2 \gamma} \right\} \Big|_0^{\pi/2},$$

gdzie $\gamma_3 = \arcsin \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1-b_1^2 \cos^2 \gamma}}$.

Dla dolnej granicy całkowania $\gamma_3 = 0$, dla górnej $\gamma_3 = \pi/2$. Wobec tego po wstawieniu granic całkowania otrzymamy

$$(5.18) \quad \int_0^{\pi} (1-u \cos \varphi)^{3/2} d\varphi = \frac{2}{3} \sqrt{1+|u|} \left[4\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) - (1-|u|) \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) \right].$$

Z uwagi na to, że znak minus parametru u został już uwzględniony w wyrażeniach podcałkowych układu równań (5.7), do rozwiązania (5.18) wprowadzono jego wartość bezwzględną. Wartość całki (5.18) jest równa wartości wyrażenia (5.12) i podobnie dla $u \geq 1$ całka (5.17) będzie równa całce (5.14). Ponadto można sprawdzić, że dla wszystkich wartości parametru u będzie obowiązywała równość

$$(5.19) \quad - \int_{\varphi_1}^{\pi} (1-u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\varphi_1} (1+u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi.$$

Następnie przystąpimy do obliczenia całek zawierających parametr v . Całki te będą miały jeden rodzaj rozwiązania, ponieważ $v \geq 1$. Tok postępowania przy rozwiązaniu tych całek jest analogiczny do sposobu rozwiązywania całek zawierających parametr u i dlatego też ograniczymy się tylko do podania wzorów końcowych. A więc

$$(5.20) \quad \int_0^{\varphi_2} (-1+v \cos \varphi)^{3/2} d\varphi = \frac{2}{3\sqrt{2v}} \left[(v+1)(v+3) \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) - 8v \mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right],$$

$$(5.21) \quad \int_0^{\varphi_2} (-1+v \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1) \mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \\ \left. - (v+1)(3v+1) \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right].$$

Wstawiając rozwiązania całek do układów równań (5.6) i (5.7) otrzymamy dwa rodzaje rozwiązań:

dla $0 < |u| \leq 1$

$$\begin{aligned}
 q_Q^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{\pi} \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{1+|u|} \left[4\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) - (1-|u|)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3\sqrt{2v}} \left[(v+1)(v+3)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) - 8v\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}, \\
 q_H^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left\{ \frac{-2\operatorname{sgn}u}{5|u|} \sqrt{1+|u|} \left[(3u^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (1-|u|)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) \right] + \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \right. \\
 (5.22) \quad &\quad \left. \left. - (v+1)(3v+1)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}, \\
 q_M^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left\{ \frac{2\operatorname{sgn}u}{5|u|} \sqrt{1+|u|} \left[(3u^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (1-|u|)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) \right] + \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (v+1)(3v+1)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\};
 \end{aligned}$$

dla $|u| \geq 1$

$$\begin{aligned}
 q_Q^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{\pi} \left\{ \frac{2}{3\sqrt{|2u|}} \left[(|u|-1)(|u|-3)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{1+|u|}{|2u|}} \right) + 8|u|\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{1+|u|}{|2u|}} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3\sqrt{2v}} \left[(v+1)(v+3)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) - 8v\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}, \\
 q_H^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left\{ \frac{-2\operatorname{sgn}u}{5\sqrt{|2u|}} \left[2(3u^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{1+|u|}{|2u|}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (|u|-1)(|3u|-1)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{1+|u|}{|2u|}} \right) \right] + \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \right. \\
 (5.23) \quad &\quad \left. \left. - (v+1)(3v+1)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}, \\
 q_M^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left\{ \frac{2\operatorname{sgn}u}{5\sqrt{|2u|}} \left[2(3u^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{1+|u|}{|2u|}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (|u|-1)(|3u|-1)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{1+|u|}{|2u|}} \right) \right] + \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (v+1)(3v+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

W przypadku granicznym $|u| = 1$, równania znacznie się uproszczą i możemy je przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 q_Q^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{\pi} \left\{ \frac{8}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3\sqrt{2v}} \left[(v+1)(v+3) \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) - 8v \mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}, \\
 q_H^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left\{ -\frac{8 \operatorname{sgn} u}{5} \sqrt{2} - \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1) \mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \right. \\
 (5.24) \quad &\quad \left. \left. -(v+1)(3v+1) \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}, \\
 q_M^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left\{ \frac{8 \operatorname{sgn} u}{5} \sqrt{2} + \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1) \mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. -(v+1)(3v+1) \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Każdy z układów równań (5.22) i (5.23), zawierający trzy niewiadome: z_0 , x_0 i η (poprzez u i v), da się sprowadzić do układu prostszego zawierającego tylko dwie niewiadome u i v . W tym celu równania (5.22) i (5.23) zapiszemy krótko następująco:

$$\begin{aligned}
 q_Q^{3/2} &= z_0^{3/2} \frac{F_1(u, v)}{\pi}, \\
 (5.25) \quad q_H^{3/2} &= z_0^{3/2} \frac{F_2(u, v)}{1,4378}, \\
 q_M^{3/2} &= z_0^{3/2} \frac{F_3(u, v)}{1,4378}.
 \end{aligned}$$

Następnie każde z powyższych równań podniesiemy do potęgi $2/3$ i dodamy stronami do siebie. W ten sposób wyznaczymy

$$(5.26) \quad \frac{z_0}{q} = \left\{ \left[\frac{F_1(u, v)}{\pi} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_2(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_3(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} \right\}^{-1}$$

gdzie $q = q_Q + q_H + q_M$.

Wstawiając (5.26) do (5.25) i podnosząc równania do potęgi $2/3$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (5.27) \quad \bar{q}_Q &= \left\{ \left[\frac{F_1(u, v)}{\pi} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_2(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_3(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} \right\}^{-1} \left[\frac{F_1(u, v)}{\pi} \right]^{2/3}, \\
 \bar{q}_H &= \left\{ \left[\frac{F_1(u, v)}{\pi} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_2(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_3(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} \right\}^{-1} \left[\frac{F_2(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3},
 \end{aligned}$$

przy czym wielkości $\bar{q}_Q = q_Q/q$, $\bar{q}_H = q_H/q$, $\bar{q}_M = 1 - \bar{q}_H - \bar{q}_Q$ uważamy za znane.

Stosując metody numeryczne z równań tych możemy wyznaczyć u i v , a następnie, korzystając z zależności (5.1) i (5.2), pozostałe uogólnione przemieszczenia pierścienia łożyska

$$\begin{aligned}
 (5.28) \quad \frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha}{q} &= \frac{v-u}{2} \left\{ \left[\frac{F_1(u, v)}{\pi} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_2(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_3(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} \right\}^{-1}, \\
 \frac{R \sin \eta}{q} &= \frac{v+u}{2} \left\{ \left[\frac{F_1(u, v)}{\pi} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_2(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_3(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} \right\}^{-1}.
 \end{aligned}$$

6. Zakończenie

W niniejszej pracy podaliśmy rozwiązanie ścisłe (5.22), (5.23) równań statyki łożyska w przypadku pominięcia zmiany kąta działania na skutek odkształcenia się kulek i bieźni (przyjęcie stałego kąta działania odpowiada stosowanej w wytrzymałości materiałów zasadzie zeszywnienia). Równań tych nie da się odwrócić — wykorzystać je jednak można, korzystając z wyrażen (5.26), (5.27) i (5.28) do przedstawienia graficznego lub tabelarycznego zależności

$$(5.29) \quad \frac{z_0}{q} = \Phi_1(\bar{q}_M, \bar{q}_H),$$

$$\frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha}{q} = \Phi_2(\bar{q}_M, \bar{q}_H), \quad \frac{R \sin \eta}{q} = \Phi_3(\bar{q}_M, \bar{q}_H),$$

tzn. do przedstawienia uogólnionych przemieszczeń w funkcji obciążeń zewnętrznych wyrażonych za pośrednictwem zmiennych \bar{q}_H i \bar{q}_M . Stosowanie wyrażen (5.29) jest szczególnie wygodne, gdyż zmienne \bar{q}_H i \bar{q}_M zmieniają się w granicach od zera do jedności.

Wyniki obecnej pracy znajdują przede wszystkim zastosowanie przy ocenie dokładności wzorów aproksymacyjnych, określających sztywność łożysk w sposób jawny; wyprowadzenie tych wzorów będzie tematem oddzielnego opracowania.

Literatura cytowana w tekście

1. J. ВАТ, *Odkształcenia i naprężenia w łożyskach tocznych*, Przegląd Mechaniczny, nr 9, 1961.
2. Р. Д. БЕЙЗЕЛМАН, Б. Н. ЦЫПКИН, *Подшипники качения*, Москва 1959.
3. С. А. ХАРЛАМОВ, *О жесткости радиально-упорного шарикового подшипника с осевым натягом*, Изв. Акад. Наук СССР, Мех. и Машин., nr 5, 1962.
4. ESCHMAN, HASBARGEN, WEIGAND, *Die Wälzlagerpraxis*, Oldenburg-Verlag, München 1953.
5. T. GIBCYŃSKA, *Konstrukcja i zastosowanie łożysk tocznych o dużych średnicach*, Czasopismo Techniczne, nr 6 M, 1965.
6. T. GIBCYŃSKA, *Obliczanie łożysk wieńcowych obciążonych jednocześnie momentem i niewielką siłą o dowolnym kierunku*, Arch. Budowy Maszyn, nr 3, 1967.
7. В. М. ГОЛЬДШТЕЙН, *Вопросы и методика расчета опорно-поворотных кругов*, Стронт. и Дорожное Машин., nr 1, 1958.
8. H. FRETER, *Kugeldrehverbindungen Aufnahme von Kräften und Momenten*, Klepzig Fachberichte, nr 6, 1962 (cytowane za E. I. Detali Maszyn nr 39, 1962).
9. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, Cz. I. PWN, Warszawa 1954.
10. А. М. КАЗАНСКИЙ, *Методы расчета крупно-габаритных подшипников для опорно-поворотных устройств*, Вест. Машин., nr 7, 1961.
11. K. MATTHIAS, *Beitrag zur Berechnung von Kugeldrehverbindungen*, Hebezeuge und Fördermittel, N6, 1961.
12. K. MATTHIAS, *Sonderfälle bei der Berechnung von Kugeldrehverbindungen*, Hebezeuge und Fördermittel, N8, 1962.
13. K. MATTHIAS, *Berechnung von Kugeldrehverbindungen*, Hebezeuge und Fördermittel, N9, 1963.
14. Л. З. НОВИКОВ, *Статика радиально-упорного шарикового подшипника*, Изв. Акад. Наук СССР, Мех. и Машин., nr 5, 1963.
15. S. ÖHRNICH, *Berechnung der zweireihigen Kugeldrehverbindungen*, Veröffentlichung d. Instituts f. Fördertechnik, H2, Leipzig 1960 (tłumaczenie CBKUB nr 31).

16. A. PALMGREN, *Łożyska toczne*, PWT, Warszawa 1951.
17. A. PALMGREN, *Grundlagen der Wälzlageretechnik*, Franckhische Verlagshandlung, Stuttgart 1969.
18. И. М. РЫЖИК, И. С. ГРАДШТЕЙН, *Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений*, Москва 1962.
19. Н. А. СПИЦИН, М. З. НАРОДЕЦКИЙ, И. А. ЛЫСЕНКО, *Новое в теории расчета подшипников качения*, Труды Инст. ВНКТИПП, nr. 3 (35), 1963.
20. R. STRIBESK, *Kugellager für beliebige Belastung*, Z. VDI, Bd 45, 1961.
21. T. SZUCKI, *Obliczenie odkształceń łożysk stopowych żurawi budowlanych*, Zeszyty Naukowe Politechnik Warszawskiej, nr 109, 1965.
22. В. М. ШУСТОРОВИЧ, *Определение нагрузочной способности опорного подшипника качения при эксцентрическом приложении осевого усилия*, Вест. Машин., nr. 9, 1962.
23. *Łożyska kulkowe wieńcowe z wieńcem zębatym zewnętrznym*, ZN-65/MPC/10-CB-0012 (Norma Zakładowa CBKUB).

Р е з ю м е

УРАВНЕНИЯ СТАТИКИ ДЛЯ ДВУХРЯДНОГО ШАРИКОВОГО ПОДШИПНИКА

В работе даются точные решения уравнений равновесия двухрядного шарикового подшипника. Определение нагрузок основано на теории Герца, в связи с чем приняты предположения классической теории упругости, сверх того предполагается:

1. Постоянство угла действия подшипника (пренебрегается изменением этого угла связанным с деформацией подшипника),
2. Жесткие кольца подшипника,
3. Небольшое отношение h/R (рис. 2),
4. Зазор в подшипнике равен нулю.

Сначала определена упругая деформация i -того шарика, учитывая изменения угла действия вследствие деформации шариков и дорожки (3.3) а затем пренебрегая этим изменением. Определена сила действующая на i -тый шарик и построены условия равновесия для внутреннего кольца подшипника (4.1). С целью определения общего решения не зависящего от числа шариков суммирование заменяется интегрированием. Пределы интегрирования определены из условия $f_{mi} = 0$. Полученные уравнения (4.3) не пригодны для дальнейшего анализа, так из за затруднений при интегрировании, как и необходимости решения системы трансцендентных уравнений со сложными неэлементарными функциями. Для дальнейшего рассмотрения не учитывалось изменение угла действия; уравнения статики значительно упростились (4.5) и свелись к трансцендентным уравнениям (5.22) и (5.23) содержащим полные эллиптические интегралы первого и второго рода зависящие от параметров u и v определенных формулами (5.1) и (5.2).

Результаты настоящей работы найдут прежде всего применение для оценки точности приближенных формул определяющих явно жесткость подшипников; вывод этих формул будет темой отдельной работы.

S u m m a r y

EQUATIONS OF STATICS OF DOUBLE-ROW RADIAL-THRUST BALL BEARING

Paper gives an exact solution of the equilibrium equations of double-row radial-thrust ball bearing.

The determination of loading acting on individual balls is based on Hertz's theory, thus the classical assumptions of the theory of elasticity are accepted; further assumptions are as follows:

- 1) The pressure angle (rake angle) α is constant (the change of this angle due to elastic deformation of the balls is neglected),

- 2) The bearing rings are rigid,
- 3) The ratio h/R is small (Fig. 2),
- 4) The bearing clearance equals to zero.

The elastic deformation of the i -th ball is determined at first with the change of the pressure angle α being taken into account (3.3), and then with being neglected, (3.4).

The force acting on the i -th ball is then determined and the equations of equilibrium of the inner ring of the bearing are formulated, (4.1). To obtain a general solution independent on the number of balls the summation is replaced by the integration. The limit of integration is determined by the condition of no deformation of the ball, $f_{mi} = 0$. The obtained equations (4.3) are almost useless to the further analysis because of the difficulties of integration as well as the necessity of solution of the system of transcendental equations with involved non-elementary functions. Thus in the further analysis the change of the pressure angle α is neglected; the equations of statics take then considerably simplified form, (4.5), and may be reduced to transcendental equations (5.22) and (5.23) containing elliptic integrals of the first and of the second kind, depending on the parameters u and v , defined by the formulae (5.1) and (5.2).

The results of the present paper will be applied, above all, to the estimation of the accuracy of the approximative formulae determining the stiffness of the bearing in an explicit form; the derivation of such formulae will be given in a subsequent paper.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 marca 1969 r.