MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 5 (1967)

# O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH

ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA)

## Wstęp

W wykładach wytrzymałości materiałów rozpatruje się kilka elementarnych przykładów obrazujących występowanie naprężeń, powstających wskutek działania temperatury. Do takich przypadków należy liniowe wydłużenie się lub skrócenie pręta spowodowane zmianą temperatury; o ile pręt taki może wydłużać się swobodnie, naprężenia nie powstaną, gdy natomiast jest on pozbawiony możliwości swobodnego wydłużenia się (lub skrócenia) powstaną na ogół znaczne naprężenia ściskające (rozciągające). Zagadnienia te posiadają duże znaczenie praktyczne i muszą być uwzględnione przy projektowaniu sieci przewodów, zwłaszcza przewodów do przesyłania pary lub wody gorącej, ale również przy projektowaniu rurociągów naftowych. Podobnie w przypadku torów kolejowych i tramwajowych, gdzie mogą powstać siły ściskające, powodujące wyboczenie. Następnym zagadnieniem, w którym uwzględnia się wpływ temperatury, jest zagadnienie obliczania cięgien. Tutaj obniżenie temperatury powoduje zwiększenie sił w cięgnach, związane ze zmniejszeniem zwisu. Kolejnym zagadnieniem są naprężenia w bandażach nasadzanych w podwyższonej temperaturze na koła wagonowe i następnie pracujących wspólnie. Podobne zagadnienia spotykane są w technice często. Naprężenia termiczne powstaną w elementach złożonych z materiałów o różnych współczynnikach liniowej rozszerzalności cieplnej i pracujących w jednej konstrukcji. Już z tych kilku wymienionych powyżej przykładów widać, że w zależności od rodzaju konstrukcji przyrost temperatury może spowodować wzrost naprężeń, ich zmniejszenie lub nie wywoła naprężeń. Dlatego wydaje się celowe rozpatrzenie bardziej skomplikowanych przypadków dwu- i trójwymiarowych z punktu widzenia własności naprężeń, jakie wywołuje zmiana temperatury. Omówione tu przypadki będą dotyczyć zagadnień liniowej teorii sprężystości. Zmiany temperatury są tego rodzaju, że nie spowodują istotnych zmian stałych materiałowych ani innych efektów jak na przykład pełzania czy relaksacji.

## 2. Twierdzenie Muscheliszwilego

W przypadku dwuwymiarowego stanu odkształcenia we współrzędnych kartezjańskich otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych termosprężystości:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0, \tag{2.1}$$

$$\sigma_x=-\beta T+\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y=-\beta T+\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{2.2}$$

gdzie jak zwykle $\mu$, $\lambda$ są stałymi Lamégo, $\theta$ oznacza dylatację, $\beta$ jest pewną stałą zależną od materiału ośrodka, $u$ i $v$ są składowymi wektora przemieszczeń. Przy ustalonym strumieniu ciepła temperatura będzie funkcją harmoniczną zmiennych $x$ i $y$:

$$\nabla^2 T = 0.$$

Jeżeli teraz przyjmiemy, że

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{\partial v^*}{\partial y} = T, \quad \frac{\partial u^*}{\partial y} = -\frac{\partial v^*}{\partial x} \tag{2.3}$$

oraz że

$$u = u' + \frac{\beta u^*}{2(\lambda+\mu)}, \quad v = v' + \frac{\beta v^*}{2(\lambda+\mu)}, \tag{2.4}$$

gdzie $u'$ i $v'$ są nowymi funkcjami, a następnie podstawimy do równań (2.1) i (2.2), to otrzymamy równania identyczne jak w dwuwymiarowym przypadku teorii sprężystości, gdy ośrodek jest ogrzany równomiernie (np. $T = 0$), z tą różnicą, że wystąpią tu wielkości $u'$, $v'$ zamiast przemieszczeń $u$ i $v$. Jeżeli rozpatrywany obszar jest jednospójny, a warunki brzegowe zakładają brak naprężeń na brzegu, to naprężenia normalne i styczne znikają w całym obszarze, a naprężenia w kierunku prostopadłym wyrażą się wzorem

$$\sigma_z = -\frac{\beta\mu}{\lambda+\mu} T(x, y), \tag{2.5}$$

natomiast wzory na składowe przemieszczenia przyjmą postać

$$u = \frac{\beta u^*}{2(\lambda+\mu)}, \quad v = \frac{\beta v^*}{2(\lambda+\mu)}. \tag{2.6}$$

Powyższe twierdzenie jest znane jako twierdzenie Muscheliszwilego [1]. Sformułowanie powyższe należy uzupełnić dwiema uwagami, mianowicie: 1) w przypadku obszaru wielospójnego zmiany temperatury na ogół spowodują powstanie naprężeń $\sigma_x$ i $\sigma_y$, 2) twierdzenie to odnosi się tylko do dwuwymiarowego stanu odkształcenia, w przypadku dwuwymiarowego stanu naprężenia przyjęcie dwuwymiarowego równania przewodnictwa cieplnego prowadziłoby do zbyt dużych błędów.

### 3. Półprzestrzeń i warstwa sprężysta ogrzana na części powierzchni ograniczającej

Zagadnienie naprężeń cieplnych w warstwie i półprzestrzeni rozpatrywało wielu autorów. Warstwę sprężystą omawia ŁURIE [2] dochodząc do wniosku, że dla ustalonego przepływu ciepła nie wystąpią naprężenia normalne do powierzchni ograniczającej ani naprężenia styczne w płaszczyznach równoległych do warstwy środkowej. Pozostałe składowe naprężenia wyrażają się jako pochodne jednej funkcji naprężeń.

W. NOWACKI [3] oblicza wielkości naprężeń występujących w półprzestrzeni, gdy na pewnym kole powierzchni ograniczającej półprzestrzeń znany jest gradient temperatury lub temperatura, a na zewnątrz tego koła powierzchnia jest idealnie izolowana lub utrzymywana w temperaturze zerowej. W pracy tej udowodniono, że we wszystkich tych trzech przypadkach znikają składowe naprężenia $\sigma_z$ i $\tau_{rz}$ (zagadnienie jest osiowo-symetryczne). Sprawę tę również poruszyli w swojej pracy STERNBERG i MCDOWELL [4].

Weźmy pod uwagę zagadnienie ogólniejsze, gdy warstwa sprężysta jest ogrzana na dowolnej części powierzchni brzegu. Dowód przeprowadzimy posługując się metodą transformacji całkowych. Jak wiadomo, zagadnienie opisują przemieszczeniowe równania teorii naprężeń cieplnych i równanie przewodnictwa cieplnego:

$$(1+2\nu)\nabla^2\mathbf{u}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = 2(1+\nu)\alpha\operatorname{grad}T, \tag{3.1}$$

$$\nabla^2 T = 0, \tag{3.2}$$

gdzie $\nu$ oznacza liczbę Poissona, $\alpha$ jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej rozpatrywanego ciała. Do powyższych równań zastosujemy dwustronną transformację całkową Fouriera

$$\begin{aligned} \bar{f}(\xi,\eta) &= \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp[i(\xi x+\eta y)]\,dx\,dy, \\ f(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi,\eta)\exp[-i(\xi x+\eta y)]\,d\xi\,d\eta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

W ten sposób układ równań różniczkowych cząstkowych (3.1) i (3.2) został sprowadzony do układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned} &[(1-2\nu)(D^2-\eta^2)-2(1-\nu)\xi^2]\bar{u}-\xi\eta\bar{v}-i\xi D\bar{w} = -2(1+\nu)\alpha i\xi\bar{T}, \\ &-\xi\eta\bar{u}+[(1-2\nu)(D^2-\xi^2)-2(1-\nu)\eta^2]\bar{v}-i\eta D\bar{w} = -2(1+\nu)\alpha i\eta\bar{T}, \\ &-i\xi D\bar{u}-i\eta D\bar{v}+[2(1-\nu)D^2-(1-2\nu)(\xi^2+\eta^2)]\bar{w} = 2(1+\nu)\alpha D\bar{T}, \\ &(D^2-\xi^2-\eta^2)\bar{T} = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

gdzie $D \equiv d/dz$.

Jeżeli założymy, że składowe wektora przemieszczeń $\mathbf{u}$ i temperatura znikają w nieskończoności, to rozwiązanie powyższego układu równań przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= (A_1+z\sqrt{\xi^2+\eta^2}B_1)\exp(-z\sqrt{\xi^2+\eta^2}), \\ \bar{v} &= (A_3+z\sqrt{\xi^2+\eta^2}B_3)\exp(-z\sqrt{\xi^2+\eta^2}), \\ \bar{w} &= (A_2+z\sqrt{\xi^2+\eta^2}B_2)\exp(-z\sqrt{\xi^2+\eta^2}), \\ \bar{T} &= A\exp(-z\sqrt{\xi^2+\eta^2}), \end{aligned} \tag{3.5}$$

przy czym zachodzą następujące związki:

$$\begin{aligned} &\xi B_1+\eta B_3 = i\sqrt{\xi^2+\eta^2}B_2, \qquad \eta B_1 = \xi B_3 \\ &\sqrt{\xi^2+\eta^2}[2(1-\nu)B_2-A_2] = (1+\nu)\alpha A. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Z warunku, że na płaszczyźnie $z = 0$ znikają naprężenia styczne, otrzymujemy

$$\eta A_1 = \xi A_3, \qquad i\sqrt{\xi^2+\eta^2}(B_2-A_2) = \eta A_3+\xi A_1. \tag{3.7}$$

Szóstą stałą całkowania określimy z warunku brzegowego dla równania przewodnictwa cieplnego, a siódmą z warunku statyki.

Przypuśćmy, że parametr $A$ został znaleziony oraz że brzeg jest wolny od naprężeń, to znaczy, że dla $z = 0$, $\sigma_z = 0$.

Ponieważ

$$(3.8)\quad \bar{\sigma}_z = \frac{2\mu}{1-2\nu}[(1-\nu)D\bar{w}-i\nu(\xi\bar{u}+\eta\bar{v})-(1+\nu)\alpha\bar{T}] =$$

$$= -\frac{\mu}{1-\nu}\left[\sqrt{\xi^2+\eta^2}A_2+(1+\nu)\alpha A\right](1+\sqrt{\xi^2+\eta^2}z)\exp(-z\sqrt{\xi^2+\eta^2}),$$

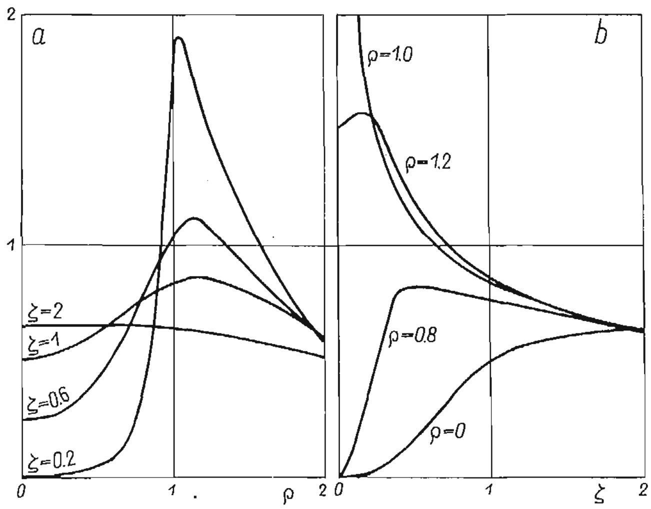
to z warunku znikania naprężeń normalnych na brzegu $z = 0$ wyniknie następujący związek:

$$(3.9)\quad \sqrt{\xi^2+\eta^2}A_2+(1+\nu)\alpha A = 0.$$

O ile spełniony jest związek (3.9), to naprężenia normalne $\sigma_z$ są równe zeru w całym obszarze półprzestrzeni. Wynika to z postaci wzoru na naprężenia. W podobny sposób znikną w całym obszarze wszystkie składowe naprężeń stycznych. Wynik ten jest również prawdziwy dla warstwy sprężystej, lecz obliczenia potrzebne do udowodnienia go są znacznie żmudniejsze z dwóch powodów: po pierwsze trzeba uwzględnić warunki brzegowe na dolnej powierzchni warstwy (mogą one być różnego rodzaju), po drugie w związku z wpływem dolnej powierzchni będziemy mieli dwukrotnie więcej parametrów do wyznaczenia z warunków brzegowych.

### 4. Zagadnienie szczeliny

Przypuśćmy, że w płaszczyźnie symetrii nieograniczonego obszaru sprężystego znajduje się szczelina rozwierana ciepłem przyłożonym do płaskich początkowo powierzchni




Rys. 1

szczeliny. W przypadku szczeliny osiowo-symetrycznej [5] naprężenia normalne $\sigma_z$ są proporcjonalne do pewnej funkcji

$$(4.1)\quad f(\varrho, \zeta) = \frac{1}{R}\cos\frac{1}{2}\varphi+\frac{\zeta}{R^3}\left(\zeta\cos\frac{3}{2}\varphi+\sin\frac{3}{2}\varphi\right),$$

gdzie

$$R^4 = (\varrho^2+\zeta^2-1)^2+4\zeta^2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\zeta}{\varrho^2+\zeta^2-1},$$

$$\varrho = \frac{r}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{a}, \quad a \text{ — promień szczeliny.}$$

Interesującym faktem, udowodnionym tamże [5], jest to, że charakter naprężeń nie zależy od rozkładu strumienia ciepła (lub temperatury) przyłożonego na powierzchniach szczeliny. Od rozkładu strumienia ciepła lub temperatury przyłożonej do powierzchni szczeliny zależy tylko współczynnik, przez który pomnożona jest funkcja (4.1). Wynik powyższy łatwo udowodnimy, gdy weźmiemy pod uwagę, że w przypadku osiowej symetrii i współrzędnych bezwymiarowych otrzymujemy dla $z = 0$

$$w = \int_0^\infty \psi(\eta) J_0(\varrho\eta)\, d\eta,$$

$$T = \frac{1}{(1+\nu)\alpha a} \int_0^\infty \eta\varphi(\eta) J_0(\varrho\eta)\, d\eta, \tag{4.2}$$

$$\sigma_z = -\frac{\mu}{(1-\nu)a} \int_0^\infty \eta[\psi(\eta)+\varphi(\eta)] J_0(\varrho\eta)\, d\eta,$$

gdzie $\psi(\eta)$ i $\varphi(\eta)$ są parametrami podlegającymi wyznaczeniu z warunków brzegowych.

Parametr $\varphi(\eta)$ wyznaczymy z warunków termicznych

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \begin{cases} Q, & 0 \leqslant r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Natomiast parametr $\psi(\eta)$ wyznaczymy z warunków mechanicznych:

$$\sigma_z = 0, \quad 0 \leqslant r < a,$$
$$w = 0, \quad r > a,$$

czyli z następującego układu dualnych równań całkowych

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \eta\psi(\eta) J_0(\varrho\eta)\, d\eta = f(\varrho), \quad && 0 \leqslant \varrho < 1, \\ &\int_0^\infty \psi(\eta) J_0(\varrho\eta)\, d\eta = 0, && \varrho > 1, \end{aligned} \tag{4.3}$$

gdzie

$$f(\varrho) = (1+\nu)\alpha a^2 \int_0^\infty \int_0^1 t Q(t) J_0(t\eta)\, dt J_0(\varrho\eta)\, d\eta.$$

Rozwiązaniem układu tych równań całkowych będzie:

$$\psi(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin(\eta s)\, ds \int_0^s \frac{x f(x)\, dx}{\sqrt{s^2-x^2}}, \tag{4.4}$$

skąd po przekształceniach [5] otrzymamy

$$\psi(\eta) = (1+\nu)\alpha a^2\left(\frac{1-\cos\eta}{\eta}\int_0^1 tQ(t)\,dt - \int_0^1\int_\rho^1 tQ(t)\,dt\,J_0(\varrho\eta)\,d\varrho\right). \tag{4.5}$$

W przypadku gdy rozkład strumienia ciepła można przedstawić w postaci szeregu Fouriera-Bessela

$$Q(\varrho) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m J_0(j_m\varrho), \tag{4.6}$$

gdzie $j_1, j_2, \ldots$ są zerami funkcji Bessela $J_0(z)$, suma parametrów $\psi(\eta)+\varphi(\eta)$ przyjmie postać

$$\psi(\eta)+\varphi(\eta) = -(1+\nu)\alpha a^2 \sum_{m=1}^{\infty}\frac{Q_m J_1(jm)}{j_m}\frac{\cos\eta}{\eta}. \tag{4.7}$$

Podstawiając (4.7) do wzoru na naprężenia

$$\sigma_z = -\frac{\mu}{(1-\nu)a}\int_0^{\infty}[\psi(\eta)+\varphi(\eta)]\eta(1+\eta\zeta)e^{-\zeta\eta}J_0(\varrho\eta)\,d\eta, \tag{4.8}$$

otrzymamy poszukiwany wynik

$$\sigma_z = \frac{\mu(1+\nu)\alpha a}{(1-\nu)}Cf(\varrho, \zeta), \tag{4.9}$$

gdzie

$$C = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{Q_m J_1(j_m)}{j_m}$$

jest liczbą niezależną od $\varrho$ i $\zeta$, a funkcję $f(\varrho, \zeta)$ określa (4.1). Jeżeli $Q(\varrho) = \text{const}$, to wynik powyższy otrzymamy bezpośrednio, a stała $C$ wynosi $-1/2\,Q_0$.

W identyczny sposób zachowują się naprężenia styczne $\tau_{rz}$. Można to udowodnić o wiele prościej niż w pracy E. DEUTSCHA [6], mianowicie wystarczy zauważyć, że $\tau_{rz}$ (w tym zagadnieniu, to znaczy po uwzględnieniu, że dla $z = 0$ $\tau_{rz}$ znika) również zależy od sumy $\psi(\eta)+\varphi(\eta)$ i może być przedstawione wzorem

$$\tau_{rz} = -\frac{\mu}{1-\nu}\frac{\zeta}{a}\int_0^{\infty}[\psi(\eta)+\varphi(\eta)]\eta^2 e^{-\eta\xi}J_1(\eta\varrho)\,d\eta, \tag{4.10}$$

skąd po podstawieniu (4.6) otrzymujemy

$$\tau_{rz} = \frac{(1+\nu)\alpha\mu}{1-\nu}C\zeta a\int_0^{\infty}\eta\cos\eta e^{-\eta\rho}J_1(\eta\varrho)\,d\eta. \tag{4.11}$$

Wydaje się, że oba powyższe wnioski dotyczące własności naprężeń normalnych i stycznych mogą być uogólnione na przypadek szczeliny w warstwie sprężystej oraz na szczeliny o innym kształcie od kołowego i przypadku osiowo-symetrycznego.

### 5. Zagadnienia kontaktowe

Rozpatrzmy zagadnienie kontaktu tego rodzaju, że stempel $\Omega$ styka się bez nacisku z półprzestrzenią (lub warstwą sprężystą) w temperaturze początkowej, natomiast gdy stempel zacznie ogrzewać półprzestrzeń, powstanie pewien nacisk wywołany rozszerzaniem się półprzestrzeni na skutek istniejącego pola temperatury i z tego powodu, że sztywny stempel jest pozbawiony możliwości przesuwu. Rozważamy więc następujące warunki brzegowe dla $z = 0$:

termiczne

$$T(x,y) = \begin{cases} v(x,y), & x,y \in \Omega, \\ 0, & x,y \in R-\Omega; \end{cases} \tag{5.1}$$

mechaniczne

$$\begin{gathered} \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad x,y \in R, \\ \begin{cases} w = 0, & x,y \in \Omega, \\ \sigma_z = 0, & x,y, \in R-\Omega, \end{cases} \end{gathered} \tag{5.2}$$

gdzie $R$ oznacza całą płaszczyznę $z = 0$.

Wykorzystując wzory (3.5) i (3.8) stwierdzimy, że warunek (5.2) jest równoważny następującemu układowi dualnych równań całkowych

$$\begin{gathered} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_2 \exp[-i(\xi x+\eta y)]\,d\xi\,d\eta = 0, \quad x,y \in \Omega, \\ \iint\limits_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{\xi^2+\eta^2}A_2+(1+\nu)\alpha A]\exp[-i(\xi x+\eta y)]\,d\xi\,d\eta = 0, \quad x,y \in R-\Omega. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Przyjmijmy na chwilę, że normalna składowa naprężeń pod stemplem dla $x, y \in \Omega$, $z = 0$ jest wielkością znaną i równą $p(x, y)$. Wtedy możemy odwrócić transformację i otrzymamy

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2}A_2+(1+\nu)\alpha A = \frac{1-\nu}{\mu}\iint\limits_{\Omega} p(x,y)\exp[i(\xi x+\eta y)]\,dx\,dy. \tag{5.4}$$

Podstawiając do wzoru (5.4)

$$A = \iint\limits_{\Omega} T(x,y)\exp[i(\xi x+\eta y)]\,dx\,dy,$$

otrzymamy

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2}A_2 = -(1+\nu)\alpha\iint\limits_{\Omega} T\exp[i(\xi x+\eta y)]\,dx\,dy + \frac{1-\nu}{\mu}\iint\limits_{\Omega} p(x,y)\exp[i(\xi x+\eta y)]\,dx\,dy. \tag{5.5}$$

Dla $x, y \in \Omega$ dostaniemy z warunku brzegowego

$$w = 0 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\exp[-i(\xi x+\eta y)]\,d\xi\,d\eta \iint\limits_{\Omega}\left[\frac{1-\nu}{\mu}p(r,s) - (1+\nu)\alpha T(r,s)\right]\exp[i(r\xi+\eta s)]\,dr\,ds. \tag{5.6}$$

Dla $x, y \in R-\Omega$ wyrażenie to jest również równe zeru, ponieważ w tym obszarze zarówno $p(x, y)$ jak i $T(x, y)$ znikają z założenia. Stąd

$$p(x, y) = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\mu\alpha T(x, y). \tag{5.7}$$

A więc możemy sformułować następujące twierdzenie [7]: *jeżeli na części płaszczyzny* $x, y \in \Omega$, $z = 0$ *ograniczającej półprzestrzeń sprężystą jest przyłożona temperatura* $T(x, y)$ *oraz jeżeli normalne przemieszczenie obszaru* $\Omega$ *jest równe zeru, to*

a) *naprężenia kontaktowe są proporcjonalne do temperatury i określone wzorem* (5.7),

b) *przemieszczenia* $w$ *znikają w całej płaszczyźnie.*

Rozpatrując zagadnienie kontaktowe ogrzanego stempla działającego na półprzestrzeń (lub warstwę) sprężystą możemy wyróżnić dwa przypadki. W przypadku pierwszym stempla utwierdzonego jest on pozbawiony możliwości przesuwu pomimo ogrzania. Jeżeli jedynym źródłem ciepła jest stempel, to zagadnieniu brzegowemu odpowiadają następujące warunki mechaniczne

$$\begin{aligned} w &= w(x, y), \qquad && x, y \in \Omega, \\ \sigma_z &= 0, && x, y \in R-\Omega \end{aligned} \tag{5.8}$$

oraz termiczne (5.1).

Zagadnienie to można rozbić na dwa zadania pomocnicze, a następnie wykorzystać zasadę superpozycji [8]. Pierwsze zadanie pomocnicze będzie klasycznym zagadnieniem teorii sprężystości przy stałej temperaturze ($T = 0$) z warunkami brzegowymi (5.8). Drugie zadanie będzie zagadnieniem termosprężystości z warunkami brzegowymi (5.1) i (5.2). Rozwiązanie tego zagadnienia podaje związek (5.7). Możemy więc wyciągnąć następujące wnioski:

1. Składowa normalna naprężenia na powierzchni ograniczającej $z = 0$ równa się wartości znanej z rozwiązania zagadnienia kontaktowego teorii sprężystości oraz funkcji $p(x, y)$ określonej wzorem (5.7).

2. Składowa $w$ wektora przemieszczeń jest identyczna jak w przypadku klasycznym (mimo działania temperatury).

Przypadek drugi dotyczy stempla swobodnego. Przypuśćmy, że stempel działający na półprzestrzeń z pewną siłą i będący źródłem ciepła jest przylepiony do płaszczyzny ograniczającej w ten sposób, że nie może się od niej oderwać (dla uproszczenia zakładamy, że $\tau_{xy} \equiv 0$). Rozwiązanie obecnego zagadnienia możemy sprowadzić do rozwiązania poprzedniego zagadnienia stempla utwierdzonego, jednak następnie należy zredukować dodatkowe naprężenia kontaktowe $p(x, y)$. Musimy więc dodać rozwiązanie zagadnienia klasycznego teorii sprężystości takie, aby zredukowało wypadkową obciążenia $p(x, y)$ i ewentualny moment powstający od tego obciążenia. Rozwiązujemy zatem zagadnienie tak, jak dla stempla swobodnego oraz dodajemy rozwiązanie zagadnienia brzegowego z następującymi warunkami:

$$\begin{aligned} w &= cx+dy+f, \qquad && x, y \in \Omega, \\ \sigma_z &= 0, && x, y \in R-\Omega. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Współczynniki $c$, $d$, $f$ określamy z warunków statyki:

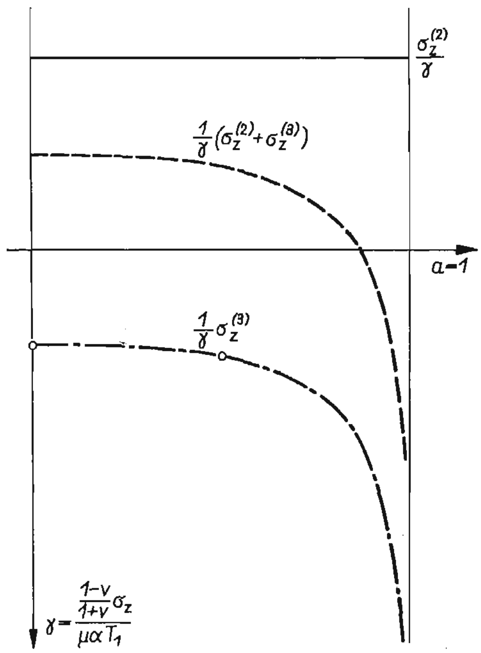
$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} p(x,y)\,d\Omega &= -\int_{\Omega} q(x,y)\,d\Omega,\\
\int_{\Omega} xp(x,y)\,d\Omega &= -\int_{\Omega} xq(x,y)\,d\Omega, \qquad (5.10)\\
\int_{\Omega} yp(x,y)\,d\Omega &= -\int_{\Omega} yq(x,y)\,d\Omega.
\end{aligned}
$$

Możemy zatem wyciągnąć następujące wnioski:

1. Zagadnienie stempla swobodnego można sprowadzić do zagadnienia stempla utwierdzonego i dodać następnie rozwiązanie zagadnienia brzegowego klasycznej teorii sprężystości z warunkami (5.9).

2. Źródło ciepła, którym jest stempel, może spowodować powstanie naprężeń rozciągających, starających się oderwać stempel od powierzchni kontaktu.

3. Istnieje pewien stosunek siły $P$ do temperatury $T$, dla którego zaczną występować naprężenia rozciągające.




Rys. 2

Jako przykład rozpatrzmy stempel o przekroju kołowym i średnicy 2, a działający z siłą wypadkową $P$. Przypuśćmy, że płaska podstawa stempla jest ogrzana do temperatury $T_1$. Zadanie jest osiowo-symetryczne. Rozwiązanie zagadnienia teorii sprężystości ma postać następującą:

$$\sigma_z^{(1)} = -\frac{1}{2}\frac{P}{\pi a}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}, \qquad 0 \leqslant r < a.$$

W przypadku stempla utwierdzonego otrzymamy

$$\sigma_z^{(2)} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\mu\alpha T_1,$$

stąd

$$P_1 = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\mu\alpha\pi a^2 T_1.$$

Jeżeli przyłożymy stempel działający z siłą $P_1$, to otrzymamy następujące naprężenia:

$$\sigma_z^{(3)} = \frac{a}{2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\mu\alpha T_1 \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Składając naprężenia $\sigma_z^{(2)}$ i $\sigma_z^{(3)}$ otrzymamy naprężenia normalne wywołane źródłem ciepła

$$\sigma_z^{(T)} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\mu\alpha T_1\left(\frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}-1\right).$$

Naprężenia rozciągające powstaną na obwodzie koła $r = a$ wtedy, gdy

$$\frac{P}{T_1} < \frac{1+\nu}{1-\nu}\mu\alpha\pi a^2.$$

### Literatura cytowana w tekście

1. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва 1949, 157-161.
2. А. И. Лурье, *Пространственные задачи теории упругости*, Москва 1955, 193-196.
3. W. Nowacki, *Two steady state thermoelastic problems*, Arch. Mech. Stos., 5, **9** (1957), 579–592.
4. E. Sternberg i McDowell, Quart. App. Math., **14** (1957), 381.
5. Z. Olesiak i I. N. Sneddon, *The distribution of thermal stress in an infinite elastic solid containing a penny-shaped crack*, Arch. Rat. Mech. Anal., 3, **4** (1960), 238–254.
6. E. Deutsch, *The distribution of axisymmetric thermal stress in an infinite elastic medium containing a penny-shaped crack*, Intern. J. Engng. Sci., 5, **3** (1965), 485–490.
7. Z. Olesiak i J. Śliżewicz, *Stresses and strains in a semi-space heated on a constrained part of the bounding plane*, Bull, Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **13** (1965), 8.
8. Z. Olesiak, *Some remarks on the contact problem of thermoelasticity for a semi-space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **13** (1965), 8.

Р е з ю м е

## О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Обсуждаются некоторые двух- и трехмерные задачи термоупругости с точки зрения свойств поля напряжений, вызванного изменением температуры. Эти изменения такого рода, что не вызывают изменения значений постоянных материала, ни другого рода эффектов, как напр. ползучести или релаксации. Рассматриваются задачи о полупространстве и упругом слое, подверженным нагреву на части поверхности, задача о трещине и контактная задача.

Summary

## ON SOME PROPERTIES OF THERMAL STRESSES

Discussed are properties of thermal stress fields in some two- and three-dimensional thermoelastic problems. It is assumed that the variation of the temperature does not cause any changes in the material constants, and any other effects as creep and relaxation. The problems of half-space or an elastic layer heated on a part of their surface, the crack and contact problems are considered.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 sierpnia 1966 r.*