

## O WYBOCZENIU BIEGUNOWYCH SIATEK PRĘTOWYCH

Cz. WOŹNIAK (WARSZAWA), S. ZIELIŃSKI (ŁÓDŹ)

W pracy wyprowadzono wyrażenia dla sił krytycznych w pierścieniowych, radialnie obciążonych gęstych biegunowych siatkach prętowych. Rozważono tylko przypadek wybozczenia kołowo-symetrycznego. Posłużono się kontynualnym modelem siatki korzystając z równań płaskiego ośrodka włóknistego o biegunowej siatce. Zagadnienie rozpatrywano w ramach teorii liniowej.

### 1. Równania podstawowe

Gęste i regularne siatki prętowe (ruszty) stanowią jeden z przypadków szczególnych tzw. płyt o strukturze siatkowej [1]. Podstawowe równania kontynualnej teorii drugiego rzędu takich płyt składają się z poniższych równań równowagi<sup>(1)</sup> (siły masowe pomijamy)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} p^\alpha{}_{;\alpha} + w_{;\alpha\beta} p^{\alpha\beta} &= 0, \\ m^\alpha{}_{;\beta;\alpha} - \varepsilon_{\alpha\beta} p^\alpha - w_{;\alpha\beta} m^\alpha &= 0, \end{aligned}$$

oraz z równań fizycznych

$$(1.2) \quad p^\alpha = A^{\alpha\mu} \gamma_\mu, \quad m^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\mu\nu} \chi_{\mu\nu}$$

i geometrycznych

$$(1.3) \quad \gamma_\mu = w_{;\mu} + \varepsilon_{\mu\nu} v_\nu, \quad \chi_{\mu\nu} = v_{\nu;\mu}.$$

W powyższych równaniach  $p^\alpha$  i  $m^{\alpha\beta}$  są kolejno wektorem gęstości sił poprzecznych i tensorem gęstości momentów w płycie,  $p^{\alpha\beta}$  jest tensorem napięć błonowych działających w płaszczyźnie płyty oraz  $m^\alpha$  jest wektorem napięć momentowych również działających w płaszczyźnie płyty siatkowej. Zakładamy, że siły i momenty tarczowe  $p^{\alpha\beta}$  i  $m^\alpha$  zostały uprzednio wyznaczone (por. np. [2, 3]). Stan przemieszczenia jest określony ugięciem płyty  $w$  oraz niezależnymi od ugięcia kątami obrotu  $v_\nu$ . Wszystkie wielkości występujące w (1.1)–(1.3) zależą od zmiennych  $x^1, x^2$ , którymi parametryzowana jest płaszczyzna środkowa płyty.

Jeżeli rozpatrywaną płytą o strukturze siatkowej jest gęsta siatka prętowa (ruszt) o sztywnych węzłach, to tensory sztywności sprężystej  $A^{\alpha\mu}$  i  $C^{\alpha\beta\mu\nu}$  występujące w (1.2) mają postać [1]:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} A^{\alpha\mu} &= \sum_{(d)} t_{(d)}^\alpha t_{(d)}^\mu R_{(d)}, \\ C^{\alpha\beta\mu\nu} &= \sum_{(d)} t_{(d)}^\alpha t_{(d)}^\mu (t_{(d)}^\beta t_{(d)}^\nu S_{(d)} + \tilde{t}_{(d)}^\beta \tilde{t}_{(d)}^\nu \tilde{S}_{(d)}). \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Wszystkie wskaźniki przebiegają ciąg 1, 2; średnik oznacza pochodną kowariantną, przecinek — pochodną cząstkową.

Wektory  $t_{(\Delta)}^{\alpha}$  i  $\tilde{t}_{(\Delta)}^z$  są wektorami jednostkowymi; wektor  $t_{(\Delta)}^z$  jest styczny, a wektor  $\tilde{t}_{(\Delta)}^z$  normalny do rodzin  $(\Delta)$ , tworzących siatkę (gdy siatka składa się z dwóch rodzin krzywych, wtedy  $(\Delta) = (I), (II)$ ). Ponadto

$$(1.5) \quad R_{(\Delta)} \equiv \frac{12(EJ)_{\Delta}}{l_{\Delta}^2 \tilde{l}_{\Delta}}, \quad S_{(\Delta)} \equiv \frac{(GC)_{\Delta}}{\tilde{l}_{(\Delta)}}, \quad \tilde{S}_{(\Delta)} \equiv \frac{(EJ)_{\Delta}}{\tilde{l}_{(\Delta)}},$$

gdzie  $(EJ)_{\Delta}$  i  $(GC)_{\Delta}$  są kolejno sztywnością giętną i skrętną prętów  $(\Delta)$  siatki,  $\tilde{l}_{\Delta}$  jest odległością sąsiednich prętów  $(\Delta)$  siatki oraz  $l_{\Delta}$  jest odległością sąsiednich węzłów pręta  $(\Delta)$ . Podane powyżej wzory dotyczą tylko przypadku, w którym główne centralne osie bezwładności wszystkich przekrojów prętów leżą na jednej płaszczyźnie (płaszczyzny obojętne prętów leżą na płaszczyźnie ośrodka).

## 2. Zagadnienie kołowo-symetryczne

Dla siatki biegunowej oraz kołowo-symetrycznego stanu odkształcenia równania (1.1)–(1.3) we współrzędnych biegunowych  $(r, \varphi)$  po prostych przekształceniach można doprowadzić do postaci

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (rp^r + rp^{rr}w, r), r &= 0, \\ (r^2m^{r\varphi}), r + rm^{\varphi r} - rp^r &= 0; \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} p^r &= A^{rr}(w, r + v), \\ m^{r\varphi} &= C^{r\varphi r\varphi}rv, r, \\ m^{\varphi r} &= -C^{\varphi r\varphi r}v, \end{aligned}$$

w której  $v \equiv v_{\varphi}/r$  jest obrotem elementu siatki w płaszczyźnie prostopadłej do linii parametrycznej  $r = \text{const}$ . Pomnożmy równanie (2.2)<sub>1</sub> przez  $r$  i dodajmy stronami do równania (2.1)<sub>2</sub>. Wyznamy następnie z (2.1)<sub>2</sub> wielkość  $rp^r$ . Otrzymamy wtedy kolejno

$$(2.3) \quad \begin{aligned} rw, r &= \frac{1}{A^{rr}}[(r^2m^{r\varphi}), r + rm^{\varphi r}] - rv, \\ rp^r &= (r^2m^{r\varphi}), r + rm^{\varphi r}. \end{aligned}$$

Scałkujemy równanie (2.1)<sub>1</sub>. Oznaczając przez  $c = \text{const}$  stałą całkowania napiszemy

$$(2.4) \quad rp^r + rp^{rr}w, r = c.$$

Podstawiając prawe strony (2.3) do powyższego równania uzyskamy

$$(2.5) \quad [(r^2m^{r\varphi}), r + rm^{\varphi r}] \left(1 + \frac{p^{rr}}{A^{rr}}\right) - p^{rr}v = c.$$

Wyrażając w (2.5) momenty  $m^{r\varphi}$  i  $m^{\varphi r}$  zgodnie z (2.2)<sub>2</sub> i (2.2)<sub>3</sub> po prostych przekształceniach dochodzimy do równania

$$(2.6) \quad (C^{r\varphi r\varphi}r^3v, r), r - rC^{\varphi r\varphi r}v - \frac{p^{rr}}{1 + \frac{p^{rr}}{A^{rr}}} = \frac{c}{1 + \frac{p^{rr}}{A^{rr}}}.$$

Podstawiając następnie do (2.4) prawą stronę wzoru (2.2)<sub>1</sub> napiszemy

$$(2.7) \quad \left(1 + \frac{p^{rr}}{A^{rr}}\right) w, r + v = \frac{1}{r} \frac{c}{A^{rr}}.$$

Równania (2.6) i (2.7) są podstawowymi równaniami kołowo-symetrycznie odkształconej płyty o ortotropowej strukturze siatkowej.

Jeżeli równania (2.6) i (2.7) mają opisywać kołowo-symetrycznie odkształconą biegunową siatką prętową, wtedy wielkości  $C^{r\varphi r\varphi}$ ,  $C^{\varphi r r\varphi}$ ,  $A^{rr}$  powinny być określone wzorami (1.4). Otrzymamy wtedy

$$(2.8) \quad \begin{aligned} C^{r\varphi r\varphi} &= \frac{1}{r^2} \tilde{S}_{(r)} = \frac{1}{r^2} \frac{(EJ)_r}{\tilde{l}_r} = \frac{1}{r^2} \frac{(EJ)_r}{l_\varphi}, \\ C^{\varphi r r\varphi} &= \frac{1}{r^2} \tilde{S}_{(\varphi)} = \frac{1}{r^2} \frac{(EJ)_\varphi}{\tilde{l}_\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{(EJ)_\varphi}{l_r}, \\ A^{rr} &= \hat{R}_{(v)} = \frac{12(EJ)_r}{l_r^2 \tilde{l}_r}, \end{aligned}$$

przy czym  $(EJ)_r$  i  $(EJ)_\varphi$  jest kolejno sztywnością giętą prętów promieniowych i obwodowych siatki,  $\tilde{l}_r = l_\varphi$  jest odległością sąsiednich prętów promieniowych (lub odległością sąsiednich węzłów w prętach obwodowych) oraz  $\tilde{l}_\varphi = l_r$  jest odległością sąsiednich prętów obwodowych siatki (lub odległością sąsiednich węzłów w prętach promieniowych).

Równanie (2.6) dla przypadku biegunowej siatki prętowej przyjmie teraz postać

$$(r\tilde{S}_{(r)}v_{,r})_{,r} - \frac{1}{r} \left( \tilde{S}_{(\varphi)} + r^2 \frac{p^{rr}}{1 + \frac{p^{rr}}{\hat{R}^r}} \right) v = \frac{c}{1 + \frac{p^{rr}}{\hat{R}^r}}$$

lub po przekształceniach

$$(2.9) \quad v_{,rr} + \frac{(r\tilde{S}_{(\varphi)})_{,r}}{r\tilde{S}_{(r)}} v_{,r} - \frac{1}{r^2 \tilde{S}_{(r)}} \left( \tilde{S}_{(\varphi)} + r^2 \frac{p^{rr}}{1 + \frac{p^{rr}}{\hat{R}_{(r)}^r}} \right) v = \frac{1}{r\tilde{S}_{(r)}} \frac{c}{\left( 1 + \frac{p^{rr}}{\hat{R}_{(r)}^r} \right)}.$$

Równania (2.9) i (2.7) dla  $A^{rr} = \hat{R}_{(r)}$  są podstawowymi równaniami wyoboczonej kolistej biegunowej siatki prętowej.

### 3. Przypadki szczególne i rozwiązania

Ograniczymy się dalej do rozpatrywania ważnego przypadku szczególnego siatki, w której sztywności zginania prętów promieniowych i obwodowych są stałe:

$$(EJ)_r = \text{const}, \quad (EJ)_\varphi = \text{const}.$$

Oznaczmy przez  $\psi$  kąt pomiędzy prętami promieniowymi siatki; wtedy  $l_\varphi = \tilde{l}_r = \psi r$ . Przyjmijmy następnie, że kształt «oczek» jest stały, tj.

$$(3.1) \quad \frac{l_r}{l_\varphi} = \text{const}.$$

Warunek (3.1) zachodzi, gdy  $l_r = \tilde{l}_\varphi = \varkappa r$ , gdzie  $\varkappa$  jest stałą bezwymiarową. Z tego powodu zgodnie z (2.5) otrzymamy wtedy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tilde{S}_{(r)} &= \frac{(EJ)_r}{l_\varphi} = \frac{1}{r} \frac{(EJ)_r}{\psi}, \\ \tilde{S}_{(\varphi)} &= \frac{(EJ)_\varphi}{l_r} = \frac{1}{r} \frac{(EJ)_\varphi}{\varkappa}, \\ \hat{R}_{(r)} &= \frac{12(EJ)_r}{l_r^2 l_\varphi} = \frac{1}{r^3} \frac{12(EJ)_r}{\psi \varkappa^2}. \end{aligned}$$

Założmy, że rozpatrywana przez nas biegunowa pierścieniowa siatka prętowa jest obciążona na wewnętrznym obwodzie  $r = r_w$  obciążeniem radialnym  $p_w$  oraz na zewnętrznym obwodzie  $r = r_z$  obciążeniem radialnym  $p_z$ . Wielkości napięć radialnych  $p^{rr}$  w takiej siatce można obliczyć na podstawie wzorów podanych w pracy [3]. Zakładając, że sztywności podłużne  $(EA)_r$ ,  $(EA)_\varphi$  prętów siatki są stałe oraz że

$$(3.3) \quad \frac{\psi(EA)_\varphi}{\varkappa(EA)_r} = 2,$$

otrzymamy rozkład napięć radialnych  $p^{rr}$  wyrażony wzorem (por. [3])

$$(3.4) \quad p^{rr} = -\frac{p}{r^3}, \quad p = \text{const.}$$

Zgodnie ze wzorem (3.4) ograniczymy się więc do badania stateczności takiej biegunowej siatki prętowej, w której pomiędzy obciążeniami radialnymi wewnętrznego i zewnętrznego brzegu siatki zachodzi związek

$$p_w = p_z \left( \frac{r_z}{r_w} \right)^3.$$

Podstawiając prawe strony wzorów (3.2) i (3.4) do równania (2.9), otrzymamy

$$(3.5) \quad v_{,rr} - \frac{\psi}{r^2(EJ)_r} \left[ \frac{(EJ)_\varphi}{\varkappa} - \frac{p}{1 - \frac{\psi \varkappa^2}{12(EJ)_r} p} \right] v = \frac{c}{1 - \frac{\psi \varkappa^2}{12(EJ)_r} p}.$$

Założmy, że brzeg  $r = r_w$  siatki jest podparty w sposób uniemożliwiający obrót, lecz dopuszczający swobodę przesunięcia w kierunku normalnym do płaszczyzny nieodkształconej siatki. Wtedy

$$(3.6) \quad v(r_w) = 0 \quad \text{oraz} \quad p^r(r_w) = 0.$$

Założmy następnie, że brzeg zewnętrzny  $r = r_z$  jest doskonale sztywno utwierdzony:

$$(3.7) \quad v(r_z) = 0 \quad \text{oraz} \quad w(r_z) = 0.$$

Z warunków (3.6) oraz wzoru (2.2) wynika, że dla  $r = r_w$  zachodzi  $w_{,r} = 0$ . Zgodnie z równaniem (2.4) stała  $c$  występująca w (3.5) jest równa zero. Oznaczając

$$(3.8) \quad \lambda \equiv \frac{\psi}{(EJ)_r} \left[ \frac{(EJ)_\varphi}{\varkappa} - \frac{p}{1 - \frac{\psi \varkappa^2}{12(EJ)_r} p} \right]$$

równanie (3.5) napiszemy w postaci

$$v_{,rr} - \frac{\lambda}{r^2} v = 0.$$

Całka ogólna powyższego równania ma postać

$$(3.9) \quad v = \sqrt{r} [C_1 \cos(\mu \ln r) + C_2 \sin(\mu \ln r)],$$

gdzie

$$(3.10) \quad \mu \equiv \frac{1}{2} \sqrt{|1+4\lambda|}, \quad 1+4\lambda < 0.$$

Warunki brzegowe (3.6)<sub>1</sub> i (3.7)<sub>1</sub> dla  $v \neq 0$  mogą być spełnione tylko w przypadku, gdy

$$\begin{vmatrix} \sqrt{r_w} \cos(\mu \ln r_w), & \sqrt{r_w} \sin(\mu \ln r_w) \\ \sqrt{r_z} \cos(\mu \ln r_z), & \sqrt{r_z} \sin(\mu \ln r_z) \end{vmatrix} = 0.$$

Powyzszy warunek istnienia nietrywialnych rozwiązań (3.9) rozpatrywanego tu zagadnienia brzegowego sprowadza się do warunku

$$\sin\left(\mu \ln \frac{r_w}{r_z}\right) = 0,$$

z którego wynika, że

$$(3.11) \quad \mu = \frac{k\pi}{\ln \frac{r_z}{r_w}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ze wzorów (3.10) i (3.11) dla  $k = 1$  otrzymamy

$$(3.12) \quad \lambda = - \left[ \frac{1}{4} + \left( \frac{\pi}{\ln \frac{r_z}{r_w}} \right)^2 \right].$$

Wyznaczmy ze wzoru (3.8) parametr  $p$ :

$$(3.13) \quad p = \frac{\frac{(EJ)_\varphi}{\kappa} - \lambda \frac{(EJ)_r}{\psi}}{1 + \frac{\psi \kappa}{12} \frac{(EJ)_\varphi}{(EJ)_r} - \frac{\lambda \kappa^2}{12}}.$$

Podstawiając do (3.13) wyrażenie (3.12) dla  $\lambda$  otrzymamy krytyczną wartość  $p$ .

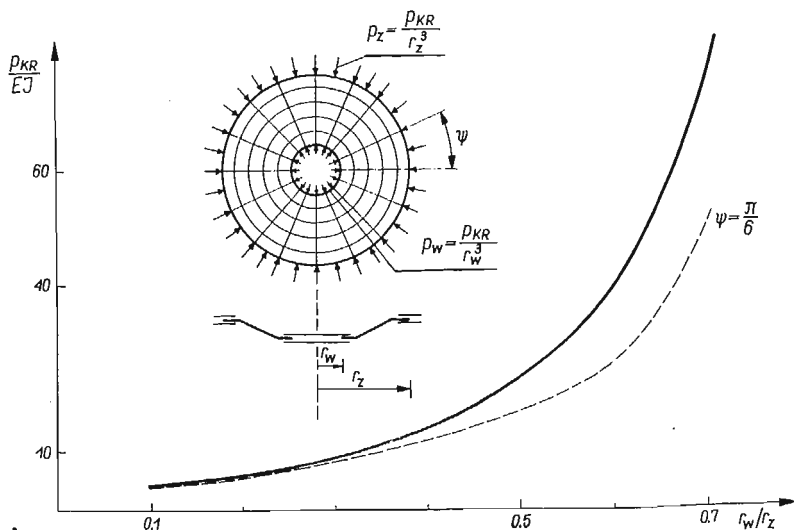
Gdy przekroje belek promieniowych i obwodowych są takie same,

$$(EJ)_\varphi = (EJ)_r = EJ, \quad (EA)_\varphi = (EA)_r,$$

wtedy dla rozpatrywanej siatki zgodnie z (3.3) mamy także  $\kappa = \psi/2$ . Wzór (3.13) ma wtedy postać

$$p_{KR} = \frac{2-\lambda}{1 + \frac{\psi^2}{48} (2-\lambda)} \frac{EJ}{\psi},$$

przy czym  $\lambda$  jest określone wzorem (3.12). Na rysunku 1 przedstawiono dla tego przypadku wykresy parametru bezwymiarowego  $p_{KR}\psi/EJ$  w zależności od stosunku  $r_u/r_z$  oraz dla kąta  $\psi = \pi/6$  pomiędzy prętami radialnymi.



Rys. 1

## Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Bending and stability of lattice-type plates*, Arch. Mech. Stos., 6, 18 (1966).
2. Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *Some problems of plane fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 7 (1966).
3. Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *On the solution of axially-symmetrical problems of plane fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 8 (1966).

## Р е з ю м е

## О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СЕТОК

В работе обсуждается вопрос устойчивости кольцевых радиально нагруженных густых полярных стержневых сеток (ростверков). Использовалась континуальная модель сетки и уравнения плоской волокнистой среды с полярной сеткой [1]. Даются зависимости критических сил для некоторого частного вида ростверка в функции плотности сетки и произведения внутреннего и внешнего радиусов сетки.

## S u m m a r y

## ON THE BUCKLING OF POLAR BAR NETWORKS

The paper considers the stability problem of annular radially loaded dense polar networks of bars (grates). The use of continuous model of network is applied by utilising equations of a plane fibrous continuum with polar network [1]. Expressions for critical loads depending on the network density and the ratio of internal and external network radii are given for a certain particular type of grate.

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO  
KATEDRA MECHANIKI BUDOWLI POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 lipca 1966 r.