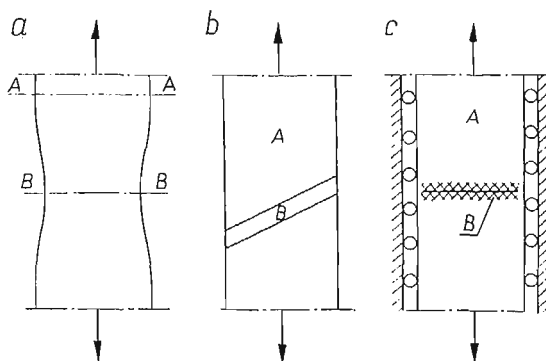


## O RÓŻNYCH FORMACH UTRATY STATECZNOŚCI BLACHY PODDAWANEJ ROZCIĄGANIU W STANIE PLASTYCZNYM

ZDZISŁAW MARCINIAK (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Ogólną cechą utraty stateczności blachy poddanej jedno- lub dwuosowemu rozciąganiu w zakresie plastycznym jest to, że mimo istnienia np. w pewnym obszarze jednorodnego (płaskiego) stanu naprężeń, powstać w nim może niejednorodne pole odkształceń. Z chwilą utraty stateczności odkształcenia koncentrują się w pewnych tylko obszarach ciała, podczas gdy pozostałe obszary, leżące poza zasięgiem koncentracji odkształceń, są bądź odciążane i przechodzą w stan sprężysty, bądź też doznają stopniowo zanikających odkształceń plastycznych. Ta koncentracja odkształceń zależnie od warunków może przybierać różne formy. W niniejszej pracy zanalizowano trzy najważniejsze formy utraty stateczności rozciąganych powłok plastycznych, mianowicie:



Rys. 1

1. Tworzenie się miejscowego przewężenia tzw. szyjki (rys. 1a) w ciele o początkowo niezmiennym przekroju poprzecznym, poddanym rozciąganiu siłą osiową. Do tej formy utraty stateczności zaliczyć również można np. zwiększanie średnicy na pewnym odcinku rury, poddanej wewnętrznemu ciśnieniu (wybrzuszenie) lub miejscowe zwężenie rury poddanej jednoosiowemu rozciąganiu. We wszystkich tych przypadkach odkształcenie rozkłada się nierównomiernie wzdłuż osi próbki, a zasięg obszaru, w którym koncentruje się odkształcenie (szyjki), zależy od wymiarów przekroju poprzecznego ciała, a więc np. od szerokości płaskiej próbki czy średnicy rury. Nie zależy natomiast od grubości ścianki. Tę postać utraty stateczności oznaczamy będziemy w dalszej części pracy jako niestateczność typu I.

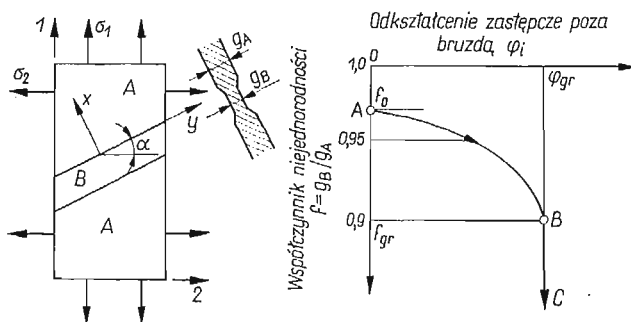
2. Powstanie nieciągłości w polu odkształceń powłoki wg rys. 1b. Jak wykazał R. HILL [1], tego rodzaju nieciągłość kinematyczna może powstać wtedy, gdy granica oddzielająca obszar  $B$  ulegający dalszemu odkształceniu od obszaru  $A$ , w którym zachodzi odciążenie, pokrywa się z charakterystyką równań pola naprężeń. Długość tej linii granicznej nie ulega zmianie w czasie odkształcenia. W odróżnieniu od poprzednio omówionej ta forma utraty stateczności ma charakter lokalny. Zasięg tworzącej się bruzdy w kierunku do niej prostopadłym nie zależy bowiem od szerokości próbki, a jedynie od grubości blachy. Tę postać utraty stateczności oznaczamy będziemy jako typ II.

3. Miejscowe zmniejszanie się grubości blachy wzdłuż pewnej linii (bruzdy), która jak to wykazano w dalszej części pracy biegnie w zasadzie prostopadle do kierunku większego z naprężeń głównych (rys. 1c). W odróżnieniu od obu poprzednio omówionych przypadków, w których następowało odciążenie materiału leżącego poza szyjką czy bruzdą, procesom koncentracji odkształceń w bruzdzie towarzyszy tu stopniowo zanikające plastyczne odkształcenie powłoki poza bruzdą. Ta forma utraty stateczności została zanalizowana przez autora w pracach [2 i 3]. Będzie to III typ niestateczności.

Celem niniejszej pracy jest analiza warunków, w których możliwe jest powstanie każdej z wymienionych wyżej form niestateczności oraz porównanie wniosków wynikających z tej analizy z wynikami doświadczeń. Ponieważ pierwsza z wymienionych form, a więc «szyjka», wyrażająca utratę stateczności danego ciała traktowanego jako całość, powstać może tylko w specjalnych i łatwych do sprecyzowania okolicznościach, przeto w dalszej części pracy zajmujemy się przede wszystkim sprecyzowaniem warunków, w których mogą się pojawić dwie pozostałe formy dotyczące lokalnej utraty stateczności elementu powłoki.

## 2. Wpływ kierunku bruzdy na przebieg procesu jej powstawania

Aby sprecyzować warunki, w których mogą się tworzyć bruzdy typu II lub III, zanalizujemy przebieg tworzenia się bruzd typu III w zależności od kąta nachylenia bruzdy w stosunku do kierunków głównych, przy różnych schematach obciążenia powłoki (stosunku naprężeń głównych  $\sigma_2/\sigma_1$ ). Rozpatrzmy w tym celu element powłoki (rys. 2), na którego



Rys. 2

krawędzie działają naprężenia główne  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , przy czym  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ . Wyobraźmy sobie, że element ten przecina pod kątem  $\alpha$  pas  $B$  o zmniejszonej grubości. Grubość blachy w obszarze  $B$ , reprezentującym bruzdę, jest równa  $g_B$ , podczas gdy w obu sąsiednich obszarach  $A$  wynosi ona  $g_A$ , przy czym  $g_A > g_B$ . Ta niejednorodność geometryczna wyrażająca się

niejednakową grubością blachy reprezentuje dowolną niejednorodność materiału, spowodowaną na przykład pasmowym układem zanieczyszczeń, różnicą własności plastycznych materiału itp. Każdą bowiem tego typu niejednorodność własności fizycznych można zastąpić równoważną jej niejednorodnością geometryczną, wyrażającą się współczynnikiem  $f = g_B/g_A$ , przy czym zakłada się, że materiał jest już pod względem własności fizycznych idealnie jednorodny i izotropowy.

Ponieważ dokonywana analiza ma na celu wyciągnięcie wniosków o charakterze jedynie jakościowym, przeto pominiemy w tym rozumowaniu zjawisko umacniania się materiału zakładając tzw. idealną plastyczność ( $\sigma_{pA} = \sigma_{pB} = \sigma_p$ ).

Jeżeli przyjmiemy nowy układ osi  $x, y$  nachylony do kierunków głównych pod kątem  $\alpha$ , to składowe stanu naprężenia w obszarze  $A$  wyrażą się jak następuje:

$$(2.1) \quad \sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \quad \sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \quad \tau_{xy} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Z warunków równowagi sił prostopadłych i stycznych do linii granicznej wynika, że odpowiednie naprężenia  $\sigma_{xB}$  i  $\tau_{xyB}$  w obszarze  $B$  wynoszą:

$$(2.2) \quad \sigma_{xB} = \frac{\sigma_x}{f}, \quad \tau_{xyB} = \frac{\tau_{xy}}{f}, \quad \text{przy czym} \quad f = \frac{g_B}{g_A}.$$

Trzecia składowa stanu naprężenia, mianowicie naprężenie  $\sigma_{yB}$ , może zmienić się na linii granicznej skokowo w sposób, który już nie wynika z warunków równowagi. Naprężenie to spełnić jednak musi warunek plastyczności w obszarze  $B$ , który dla płaskiego stanu naprężenia ( $\sigma_3 = 0$ ) napiszemy w postaci

$$(2.3) \quad \sigma_{xB}^2 - \sigma_{xB} \sigma_{yB} + \sigma_{yB}^2 + 3\tau_{xyB}^2 = \sigma_p^2.$$

Po podstawieniu do tego warunku związków (2.2) otrzymamy równanie kwadratowe

$$(2.4) \quad \left(\frac{\sigma_x}{f}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x}{f}\right) \sigma_{yB} + \sigma_{yB}^2 + 3\left(\frac{\tau_{xy}}{f}\right)^2 - \sigma_p^2 = 0,$$

z którego można wyznaczyć szukane naprężenie  $\sigma_{yB}$ :

$$(2.5) \quad \sigma_{yB} = \frac{\sigma_x}{2f} \pm \frac{1}{f} \sqrt{f^2 \sigma_p^2 - 3\tau_{xy}^2 - \frac{3}{4} \sigma_x^2}.$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem można przekształcić odejmując stronami od warunku plastyczności dla obszaru  $A$

$$\sigma_p^2 = \sigma_y^2 - \sigma_y \sigma_x + \sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2$$

tożsamość

$$\left(\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x\right)^2 = \sigma_y^2 - \sigma_y \sigma_x + \frac{1}{4} \sigma_x^2.$$

Otrzymamy wtedy związek

$$\sigma_p^2 - \left(\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x\right)^2 = +3\tau_{xy}^2 + \frac{3}{4} \sigma_x^2.$$

Po podstawieniu tej zależności do równania (2.5) przybierze ono postać

$$(2.6) \quad \sigma_{yB} = \frac{\sigma_x}{2f} \pm \frac{1}{f} \sqrt{\left(\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x\right)^2 - (1-f^2) \sigma_p^2}.$$

Odształcenia obu rozpatrywanych obszarów  $A$  i  $B$  wynikają z istniejących tam stanów naprężeń, a ponadto są z sobą związane kinematycznym warunkiem, aby odształcenie  $\varphi_y$  po obu stronach linii nieciągłości było sobie równe, a zatem

$$\varphi_{yB} = \varphi_{yA} = \varphi_y.$$

Załóżmy, że w pewnym okresie czasu obszar  $A$  doznał przyrostu odształcenia  $d\varphi_i$ , któremu zgodnie z prawem płynięcia towarzyszył przyrost składowej  $d\varphi_y$

$$(2.7) \quad d\varphi_y = \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{2\sigma_p} d\varphi_i.$$

Ubytek grubości tej części powłoki wynosi wówczas

$$(2.8) \quad \frac{dg_A}{g_A} = d\varphi_{3A} = \frac{-\sigma_x - \sigma_y}{2\sigma_y - \sigma_x} d\varphi_y.$$

Zachodzący w tym samym czasie ubytek grubości obszaru  $B$  wyraża się związkami

$$(2.9) \quad \frac{dg_B}{g_B} = d\varphi_{3B} = \frac{-\sigma_{xB} - \sigma_{yB}}{2\sigma_{yB} - \sigma_{xB}} d\varphi_y,$$

przy czym w obu związkach (2.8)—(2.9) występuje wielkość  $d\varphi_y$  wyrażająca przyrost długości wspólnej linii granicznej oddzielającej obszary  $A$  i  $B$ .

Z definicji współczynnika niejednorodności  $f = g_B/g_A$  wynika, że jego przyrost  $df$  wyrazić można przez przyrosty odształceń  $d\varphi_{3A}$  i  $d\varphi_{3B}$  jak następuje:

$$df = \frac{dg_B g_A - dg_A g_B}{g_A^2}$$

lub

$$(2.10) \quad df = \frac{g_B}{g_A} \left( \frac{dg_B}{g_B} - \frac{dg_A}{g_A} \right), \quad \text{a więc} \quad \frac{df}{f} = d\varphi_{3B} - d\varphi_{3A}.$$

Po uwzględnieniu związków (2.8), (2.9) i (2.7) wyrażenie (2.10) przybierze postać

$$-\frac{df}{f} = \left( \frac{\sigma_{xB} + \sigma_{yB}}{2\sigma_{yB} - \sigma_{xB}} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2\sigma_y - \sigma_x} \right) \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{2\sigma_p} d\varphi_i.$$

W powyższym równaniu można wyizolować składowe naprężeń  $\sigma_{xB}$  i  $\sigma_{yB}$  przez składowe  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  zgodnie z zależnościami (2.1) oraz (2.6). Po dokonaniu prostych przekształceń otrzymamy równanie różniczkowe

$$(2.11) \quad -\frac{df}{f} = K \left[ \frac{1}{\sqrt{Lf^2 - (L-1)}} - 1 \right] d\varphi_i,$$

w którym  $K$  i  $L$  są następującymi funkcjami składowych stanu naprężenia w obszarze  $A$ :

$$(2.12) \quad K = \frac{3}{4} \frac{\sigma_x}{\sigma_p}, \quad L = \frac{1}{\left( \frac{\sigma_y}{\sigma_p} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_x}{\sigma_p} \right)^2}.$$

Dla danego stanu naprężenia określonego wartościami naprężeń głównych  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  współczynniki  $K$  i  $L$  zależą jedynie od kąta  $\alpha$ :  $K(\alpha)$  i  $L(\alpha)$ .

Całkowanie równania (2.11) pozwala wyznaczyć przebieg procesu formowania się bruzdy, a więc wyrazić stosunek grubości części  $B$  i  $A$  ( $g_B/g_A=f$ ), jako funkcję odkształcenia zastępczego  $\varphi_i$  powłoki poza przewężeniem (w części  $A$ ). Przebieg tej zależności przedstawia wykres po prawej stronie rys. 2. Należy podkreślić, że dla uzyskania tej zależności konieczne jest założenie w ramach stałej całkowania pewnej wstępnej niejednorodności powłoki  $f_0 = g_{B0}/g_{A0}$ . Jak wynika z wykresu na rys. 2, w miarę odkształcania się części  $A$  niejednorodność ta stopniowo się pogłębia, gdyż coraz to większemu odkształceniu w bruzdzie (części  $B$ ) odpowiada stopniowo zanikające odkształcenie obszarów sąsiednich (części  $A$ ). Tę fazę procesu kształtowania się miejscowego przewężenia (bruzdy) nazwiemy fazą quasi-stateczną. Wreszcie, gdy współczynnik niejednorodności osiągnie pewną graniczną wartość  $\varphi_{gr}$  całe odkształcenie powłoki koncentruje się wyłącznie w bruzdzie, podczas gdy obszary z nią sąsiadujące ulegają odciążeniu i przechodzą w stan sprężysty. Jest to oznaką wejścia w fazę pełnej niestateczności powłoki, podczas której odkształcenie obszarów sąsiadujących z bruzdą jest stałe i wynosi  $\varphi_{gr}$ . Proces utraty stateczności może być w pewnej chwili przerwany pęknięciem blachy w najbardziej osłabionym przekroju powłoki, przy czym zależnie od rodzaju materiału utrata spójności może nastąpić bądź w fazie pełnej utraty stateczności, bądź też w fazie quasi-statecznej.

Dla danego stanu naprężenia, określonego wartościami naprężeń głównych  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , graniczna wartość odkształcenia  $\varphi_{gr}$  zależy jedynie od założonej wstępnej niejednorodności powłoki  $f_0$  oraz od kąta  $\alpha$  pochylecia rozpatrywanej bruzdy względem kierunków głównych, a więc  $\varphi_{gr} = \varphi_{gr}(f_0, \alpha)$ . Przebieg tych funkcji dla trzech różnych stanów naprężenia powłoki wyznaczony na podstawie numerycznego całkowania równania (2.11) został przedstawiony po prawej stronie rysunków 3, 4, 5 sporządzonych w biegunowym układzie współrzędnych  $\varphi_{gr}, \alpha$ .

Przypadek jednoosiowego rozciągania (gdy  $\sigma_2 = 0$ ) ilustruje rys. 3. Widać z niego, że istnieją w tym przypadku dwa szczególne kierunki pochylone do jednego z kierunków głównych pod kątem  $\alpha_B = 35^\circ 15'$ , wzdłuż których pojawić się może bruzda nawet w przypadku powłoki całkowicie jednorodnej (gdy  $f_0 = 1$ ). Pojawienie się bruzdy w tych kierunkach towarzyszy odciążeniu pozostałych obszarów powłoki ( $\varphi_{gr} = 0$ ), a więc następuje od razu pełna niestateczność powłoki nie poprzedzona fazą quasi-stateczną. Łatwo zauważyć, że kierunki te pokrywają się z liniami dopuszczalnych nieciągłości w polu kinematycznym (charakterystyki), a więc zgodnie z oznaczeniami podanymi na początku utrata stateczności zachodzi w tych kierunkach wg formy II.

Jeżeli kąt  $\alpha$  nachylecia ewentualnej bruzdy byłby inny niż  $\alpha_B$ , wówczas przebieg jej odkształcenia musiałby przebiegać wg schematu III. Wiązałoby się z tym pewne odkształcenie powłoki w obszarze sąsiadującym z bruzdą  $\varphi_{gr}$ , którego wielkość dla kilku wartości wstępnej niejednorodności  $f_0$  przedstawiają linie po prawej stronie wykresu (rys. 3). Jednakże w przypadku powłoki dostatecznie jednorodnej proces tworzenia się bruzdy typu III nie może się rozwijać, gdyż jest on natychmiast zahamowany przez poprzednio omówioną niestateczność typu II, związaną z kierunkiem  $\alpha_B$ . Należy bowiem pamiętać, że powstanie w którymkolwiek miejscu niestateczności typu II powoduje przejście w stan sprężysty pozostałych obszarów powłoki, a więc zahamowanie wszystkich ewentualnych procesów tworzenia się bruzd nachylonych w kierunkach innych niż  $\alpha_B$ .

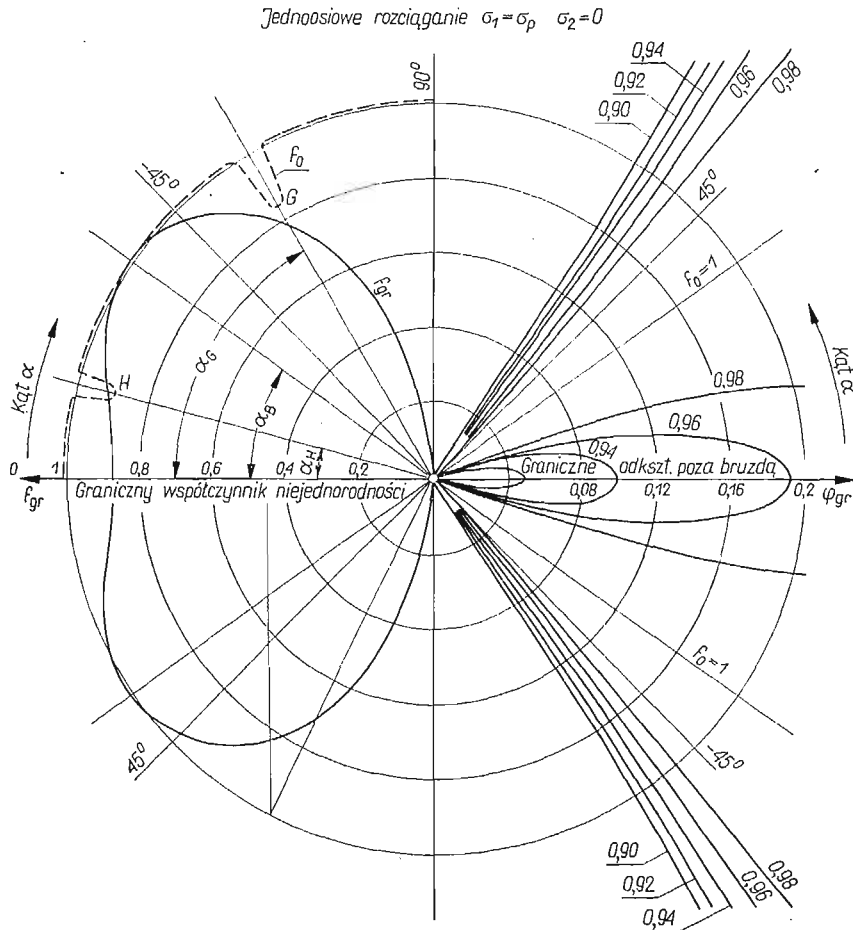
Powyższy wniosek jest jednak słuszny tylko wtedy, gdy wstępna niejednorodność powłoki  $f_0(\alpha)$  (traktowana jako funkcja kąta  $\alpha$ ) jest dla każdego kąta  $\alpha$  mniejsza od jej niejednorodności granicznej  $f_{gr}(\alpha)$ . Tę ostatnią wyznaczyć można z warunku, aby wyrażenie zawarte w kwadratowym nawiasie równania (2.11) stało się równe zero. Prowadzi to do związku:

$$(2.13) \quad f_{gr} = \sqrt{\frac{L-1}{L}},$$

który dla przypadku jednoosiowego rozciągania ( $\sigma_1 = \sigma_p$ ,  $\sigma_2 = 0$ ) zgodnie z (2.1) i (2.12) przedstawia graniczną niejednorodność  $f_{gr}$  jako następującą funkcję kąta

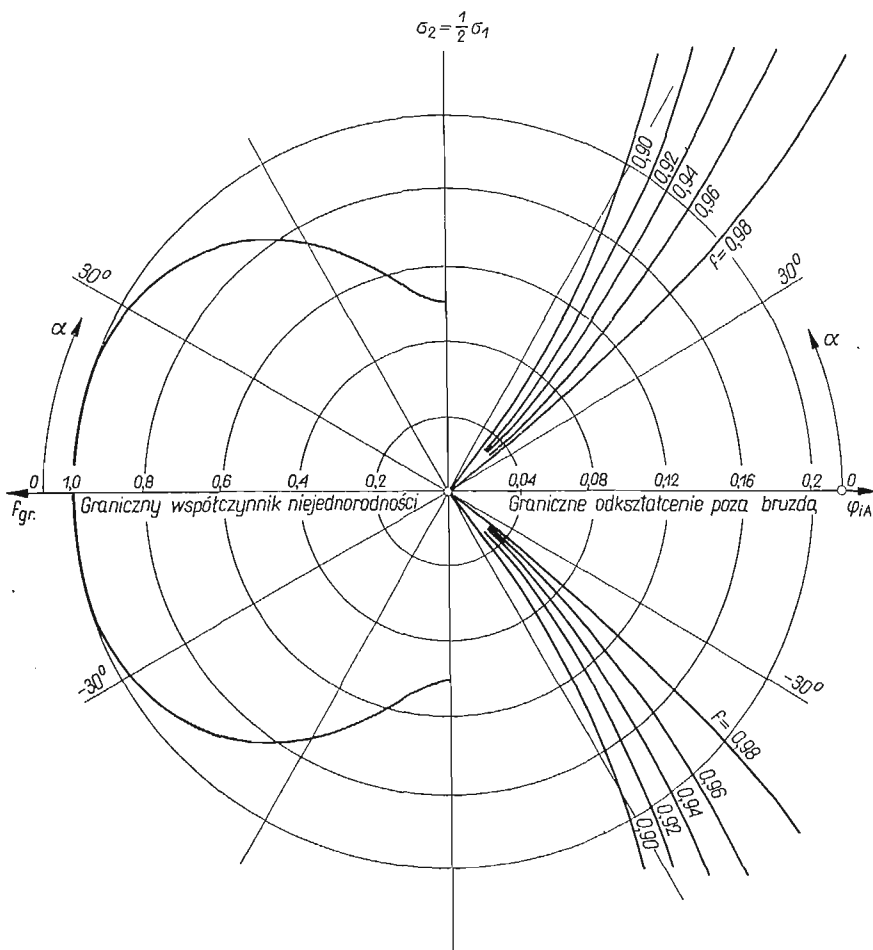
$$(2.14) \quad f_{gr} = \sqrt{1 - \left( \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right)^2}.$$

Przebieg tej funkcji w biegunowym układzie osi współrzędnych  $f, \alpha$  przedstawia linia ciągła po lewej stronie wykresu na rys. 3. Porównanie przebiegu tej linii z odpowiednią krzywą pokazaną na rysunku linią przerywaną, charakteryzującą niejednorodność rozpatrywanej



Rys. 3

powłoki, pozwala przewidzieć kąt, pod którym pojawi się bruzda. Jeżeli mianowicie dla dowolnego kąta spełniony jest warunek  $f_0 \geq f_{gr}$ , wtedy, jak to już poprzednio stwierdzono, następuje niestateczność typu II, a bruzda biegnie pod kątem  $\alpha_B$  dla którego  $f_0 = f_{gr}$ .

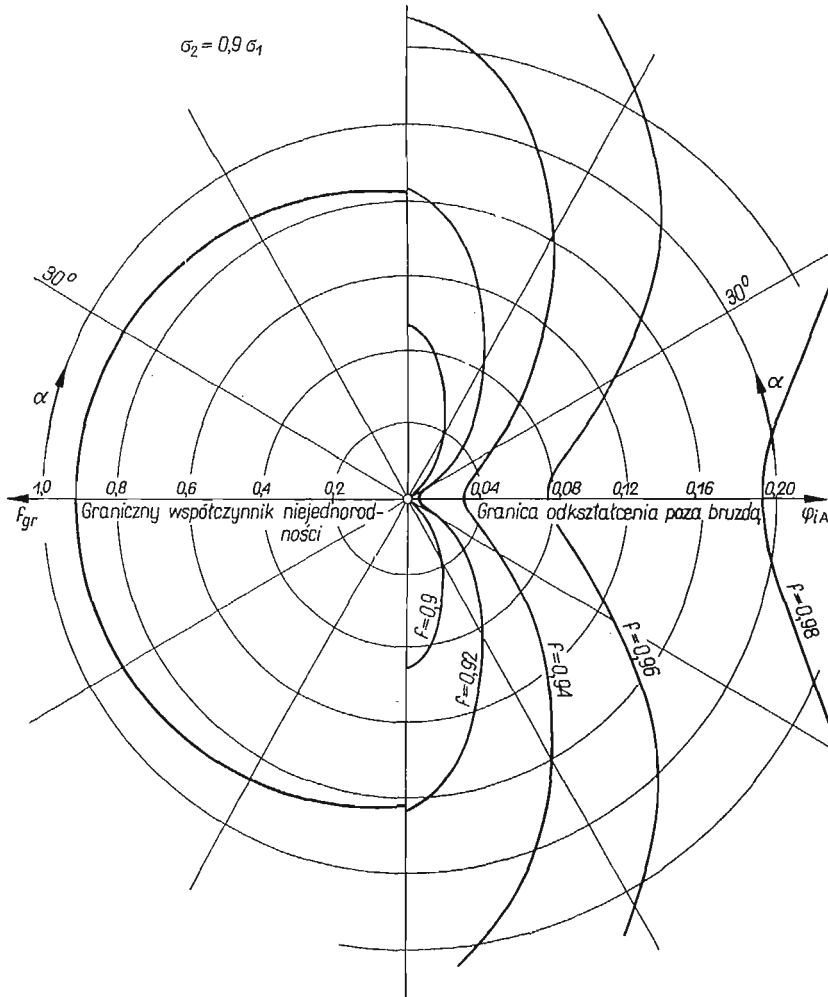


Rys. 4

Jeżeli natomiast linia przerywana  $f_0$  przecina w jakimkolwiek miejscu linię ciągłą  $f_{gr}$ , a więc gdy istnieje taki kąt  $\alpha_H$ , dla którego  $f_0 < f_{gr}$ , wtedy bruzda będzie pod tym właśnie kątem  $\alpha_H$ , a przebieg procesu odpowiada fazie pełnej niestateczności wg schematu III. Oznacza to, że pozostałe obszary powłoki ulegają od razu odciążeniu i przechodzą w stan sprężysty. Niemożliwe jest natomiast przy tym stosunku naprężeń głównych pojawienie się quasi-statecznej fazy procesu wg schematu III.

Przedstawiony obraz nie ulega zasadniczym zmianom dla innych wartości stosunku  $\sigma_2/\sigma_1$  pod warunkiem, że  $\sigma_2 \leq \sigma_1/2$ . Jedyną różnicą polega na stopniowym zmniejszaniu się krytycznej wartości kąta  $\alpha_B$  wraz ze wzrostem stosunku  $\sigma_2/\sigma_1$ . W granicznym przypadku, gdy  $\sigma_2 = \sigma_1/2$ , przedstawionym na rys. 4, bruzda tworząca się wg schematu B biegnie prostopadle do kierunku większego z naprężeń głównych ( $\alpha_B = 0$ ).

Natomiast zasadnicza zmiana sytuacji występuje wtedy, gdy stosunek  $\sigma_2/\sigma_1$  przekracza wartość  $1/2$ . Dla tego zakresu stanów naprężeń równania opisujące pole naprężeń stają się typu eliptycznego i nie mają charakterystyk, a długość dowolnej linii poprowadzonej na powierzchni powłoki zwiększa się w miarę jej odkształcania. Obraz funkcji  $\varphi_{gr}(\alpha)$  oraz  $f_{gr}(\alpha)$  dla tego zakresu stanów naprężeń przedstawia rys. 5, sporządzony dla stosunku



Rys. 5

$\sigma_2/\sigma_1 = 0,9$ . Z wykresu tego widać, że nie istnieje tu, w odróżnieniu od poprzednio omówionych przypadków, żaden krytyczny kierunek, wzdłuż którego mogłaby powstać nieciągłość kinematyczna typu II. Istnieją zatem warunki do tworzenia się bruzd wg schematu III, przy czym w fazie quasi-statecznej następuje odkształcanie się powłoki w bruzdzie i poza nią. Przejście w stan pełnej niestateczności zależy od kąta pochylenia bruzdy  $\alpha$ .

Jak widać z wykresu 5, najmniejsze graniczne odkształcanie powłoki przypada dla  $\alpha = 0$ , a zatem proces tworzenia się bruzdy przechodzi najszybciej w fazę pełnej nie-



stateczności w przypadku bruzd biegnących prostopadle do kierunku większego z naprężeń głównych. Graniczna niejednorodność powłoki  $f_0$  jest dla omawianego zakresu stanów naprężenia zawsze mniejsza od jedności i osiąga maksimum, gdy  $\alpha = 0$ .

Łatwo zauważyć, że dla stanu równomiernego, dwuosowego rozciągania, gdy  $\sigma_1 = \sigma_2$ , wielkości  $\varphi_{gr}$  oraz  $f_0$  przestają zależeć od kąta  $\alpha$ . Na wykresie we współrzędnych biegunowych  $\varphi_{gr, \alpha}$  i  $f_{gr, \alpha}$  funkcje te odwzorowują się więc szeregiem współśrodkowych kół.

Z przedstawionej tu analizy równania (2.11) wyciągnąć można ostatecznie następujący wniosek:

Jeżeli  $\sigma_2 \leq \sigma_1/2$ , to utrata stateczności powłoki przebiega wg schematu II, a więc powstaje linia nieciągłości kinematycznej, nachylona pod kątem  $\alpha_B$ . Jeżeli natomiast  $\sigma_1/2 < \sigma_2 \leq \sigma_1$ , to utrata stateczności następuje wg schematu III, przy czym bruzda jest prostopadła do kierunku większego z naprężeń głównych. Wyjątek od tej zasady stanowią przypadki, gdy wstępna niejednorodność powłoki  $f_0$  przekracza dla pewnej wartości kąta  $\alpha_H$  niejednorodność graniczną  $f_{gr}$ . Bruzda powstaje wówczas w miejscu osłabienia powłoki pod kątem  $\alpha_H$ , przy czym proces ten nie jest poprzedzony fazą quasi-stateczną. Wniosek ten stanowić będzie podstawę do dalszych rozważań.

### 3. Utrata stateczności powłok z uwzględnieniem wzmocnienia

Uwzględnienie zjawiska wzmocnienia się materiału zmienia przedstawiony wyżej obraz tylko o tyle, że utrata stateczności wg form I i II następuje dopiero przy pewnej wartości odkształcenia plastycznego powłoki  $\varphi_i$ , podczas gdy dla materiału idealnie plastycznego niestateczność występowała od samego początku procesu odkształcania.

Ogólny warunek utraty stateczności rozciąganej powłoki wg formy I został omówiony w pracy [2].

W przypadku powłoki idealnie jednorodnej ( $f_0 = 1$ ) początek tworzenia się szyjki (wg formy I) w powłoce poddanej rozciąganiu przypada, jak wiemy, na moment osiągnięcia przez siłę osiową  $P = \sigma_p F$  wartości ekstremalnej. Z warunku  $d(\sigma_p F) = 0$  wynika zależność

$$\frac{d\sigma_p}{\sigma_p} = d\varphi_1,$$

w której przyrost wydłużenia osiowego  $d\varphi_1$  można wyrazić przez przyrost odkształcenia zastępczego  $d\varphi_i$  zgodnie z prawem płynięcia

$$d\varphi_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_p} d\varphi_i.$$

Ostatecznie otrzymujemy związek

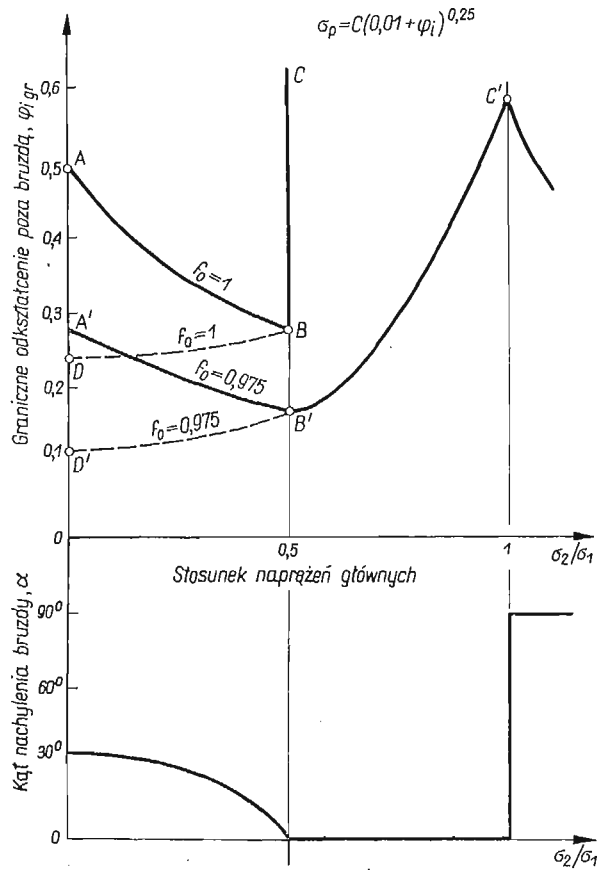
$$\frac{d\sigma_p}{d\varphi_i} \frac{1}{\sigma_p} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_p},$$

którego lewa strona dla danego kształtu krzywej wzmocnienia  $\sigma_p = \sigma_p(\varphi_i)$  jest jednoznacznie funkcją odkształcenia  $\varphi_i$ , a prawa istniejącego stanu naprężenia. Na przykład dla krzywej wzmocnienia określonej związkiem  $\sigma_p = C(\varphi_0 + \varphi_i)^n$  wartość odkształcenia

$\varphi_{gr}$ , przy którym zachodzi utrata stateczności w postaci szyjki można wyznaczyć z zależności

$$\frac{n}{\varphi_0 + \varphi_{gr}} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_p}$$

Graniczna wartość odkształcenia  $\varphi_{gr}$  zależy więc od stosunku naprężeń głównych  $\sigma_2/\sigma_1$ , jak to przedstawia linia  $DB$  na rys. 6. Została ona wykreślona dla krzywej wzmocnienia o równaniu  $\sigma_p = C(0,01 + \varphi_i)^{0,25}$ .



Rys. 6

Sprecyzujmy teraz warunek powstawania niestateczności typu II w powłoce podlegającej wzmocnieniu. Niestateczność tego typu pojawi się wówczas, gdy przyrost jednostkowej siły przenoszonej przez linię nieciągłości w kierunku do niej prostopadłym wywołany wzmocnieniem materiału zostanie w całości skompensowany przez ubytek grubości blachy w bardziej odkształconym obszarze. Utrata stateczności zachodzi zatem w chwili osiągnięcia maksimum przez jednostkową siłę  $\sigma_{xg}$ , a więc w chwili, gdy  $d(\sigma_{xg}) = 0$  lub, co na jedno wychodzi,  $d(\sigma_p g) = 0$ . Postępując podobnie jak poprzednio można warunek ten wyrazić w postaci związku

$$\frac{d\sigma_p}{d\varphi_i} \frac{1}{\sigma_p} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_p}$$

z którego dla danego kształtu krzywej wzmocnienia można wyznaczyć wartość odkształcenia  $(\varphi_i)_{gr}$ , przy którym pojawia się niestateczność typu II, jako funkcję stosunku naprężeń głównych  $\sigma_2/\sigma_1$ . Związek ten dla tej samej co i poprzednio krzywej wzmocnienia przedstawia na wykresie 6 odcinek krzywej  $AB$ . Został on doprowadzony tylko do wartości  $\sigma_2/\sigma_1 = 0,5$ , gdyż, jak wynika z poprzednich rozważań, niestateczność tego typu nie może się pojawić przy większej wartości tego stosunku.

W zakresie tym gdy  $\sigma_2 > \sigma_1/2$  tworzyć się mogą, jak wiemy, tylko bruzdy typu III, ale proces ten dla rozważanej tu powłoki idealnie jednorodnej ( $f_0 = 1$ ) nie zostaje zapoczątkowany, co zostało na wykresie 6 zaznaczone w postaci pionowego odcinka  $BC$ . W celu zbliżenia się do rzeczywistych warunków należy zatem uwzględnić pewną wstępną niejednorodność powłoki  $f_0$ , przy czym założymy, że wstępnie osłabiony przekrój pokrywa się każdorazowo z kierunkiem powstawania bruzdy. Jak wykazano w pracy [2] nawet bardzo niewielka wstępna niejednorodność materiału powoduje bardzo znaczne zmniejszenie się odkształcenia obszaru otaczającego powstającą bruzdę. Należy bowiem pamiętać, że siła powodująca odkształcenie grubszej części powłoki jest mniejsza  $f = g_B/g_A$  razy w stosunku do siły odkształcającej ten obszar w powłoce idealnie jednorodnej. Graniczna wartość odkształcenia obszaru  $A$  sąsiadującego z bruzdą typu II lub szyjką typu I musi być taka, by spełnione były odpowiednie warunki równowagi:

$$\sigma_{pA} F_A = (\sigma_{pB} F_B)_{max} f \quad \text{dla typu I,}$$

lub

$$\sigma_{pA} g_A = (\sigma_{pB} g_B)_{max} f \quad \text{dla typu II.}$$

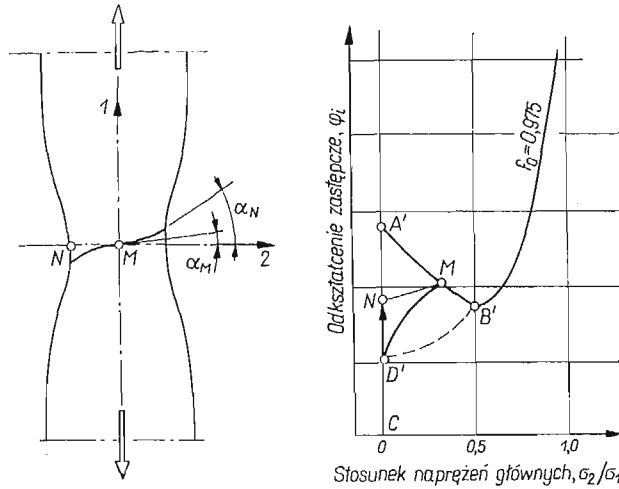
Opierając się na tych zależnościach można wyznaczyć wartość granicznego odkształcenia  $\varphi_{gr}$  powłoki ze wstępną niejednorodnością  $f_0$  jako funkcję stosunku  $\sigma_1/\sigma_2$ , przy czym najwygodniej posłużyć się w tym celu metodą wykreślną sporządzając dla każdego przypadku wykres we współrzędnych siła-odkształcenie. Otrzymane tą metodą wyniki (dla  $f = 0,975$ ) przedstawiają na rys. 6 linie:  $D'-B'$  dla niestateczności typu I oraz linia  $A'-B'$  dla niestateczności typu II.

Wyznaczenie granicznego odkształcenia dla bruzdy powstającej w zakresie  $\sigma_2 > \sigma_1/2$  według schematu III dla materiału ulegającego wzmocnieniu jest znacznie bardziej kłopotliwe. Sposób postępowania dla tego przypadku omówiony został w pracy [2], a wyniki obliczeń numerycznych, dokonanych dla tej samej funkcji wzmocnienia za pomocą maszyny cyfrowej przedstawia linia  $B'-C'$ .

#### 4. Utrata stateczności zachodząca w niektórych procesach tłoczenia blach

Wykres przedstawiony na rys. 6 może być wykorzystany do analizy procesu utraty stateczności blachy w dowolnym technologicznym procesie tłoczenia. W tym celu należy porównać przebieg linii  $A'B'$ ,  $B'C'$  i ewentualnie  $D'B'$ , przedstawiających moment powstawania niestateczności wszystkich trzech rozpatrywanych tu form, z charakterystyczną dla danego procesu technologicznego linią, której kolejne punkty reprezentują odpowiednie punkty odkształcanego ciała w przyjętym tu układzie współrzędnych: zastępcze odkształcenie  $\varphi_i$  — stosunek naprężeń  $\sigma_2/\sigma_1$ .

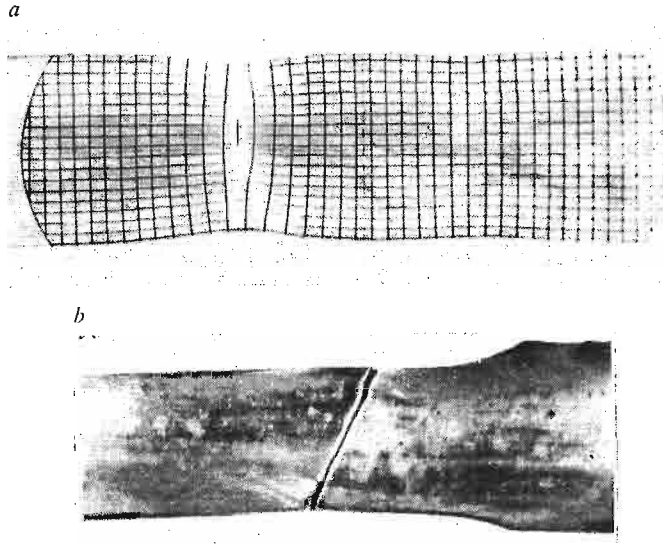
Wyjaśnimy to na najprostszym przykładzie jednoosiowego rozciągania płaskich próbek (rys. 7). W początkowym obszarze pełnej stateczności wszystkie punkty próbki znajdują się w jednorodnym stanie odkształcenia i naprężenia. Na wykresie we współrzędnych  $\varphi_i - \sigma_2/\sigma_1$  są więc reprezentowane przez jeden punkt, który stopniowo w miarę wydłużania



Rys. 7

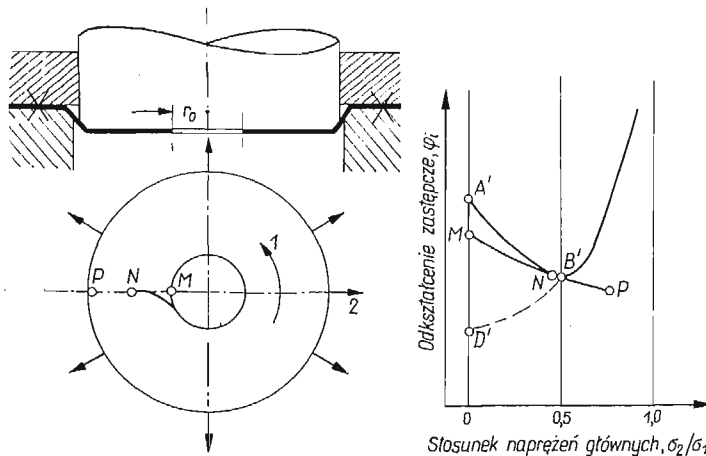
próbki przesuwa się ku górze wzdłuż odcinka  $CD'$ . Z chwilą osiągnięcia punktu  $D'$  rozciągana próbka traci stateczność wg formy I. Pojawia się lokalne przewężenie (szyjka), w zasięgu którego stany naprężenia i odkształcenia przestają być jednorodne. W punkcie  $N$ , leżącym na krawędzi próbki, stan naprężeń nie ulega zmianie, podczas gdy np. w punkcie  $M$ , leżącym na osi próbki, w środku powstałego przewężenia pojawiają się rozciągające naprężenia poprzeczne  $\sigma_2$ . Stanowi temu odpowiada na wykresie (rys. 7) punkt  $M$ , leżący na prawo od punktu  $N$  i nieco od niego wyżej, gdyż zastępcze odkształcenie  $\varphi_i$  w osi próbki jest przy tym samym wydłużeniu osiowym  $\varphi_1$  większe niż na jej brzegu ( $\varphi_{iM} > \varphi_{iN}$ ). Pozostałym punktom leżącym na odcinku  $M-N$  próbki odpowiada na wykresie krzywoliniowy odcinek  $M-N$ . Jak widać z tego wykresu w czasie procesu kształtowania szyjki pojawić się może w jej środku druga forma utraty stateczności, mianowicie bruzda typu II. Bruzda ta tworzy się najpierw w środkowej części szyjki pod stosunkowo niewielkim kątem  $\alpha_M$  odpowiadającym istniejącemu w tym miejscu stanowi naprężeń ( $\alpha_M < \alpha_B$ ), a następnie rozszerza się na boki zmieniając jednocześnie kąt nachylenia. Na brzegu próbki kąt ten osiąga wartość  $\alpha_N$  odpowiadającą jednoosiowemu rozciąganiu. Ostatecznie następuje pęknięcie próbki wzdłuż tej bruzdy, przy czym uzyskana linia pęknięcia ma kształt zbliżony do litery  $S$ . Opisany tu przebieg utraty stateczności można zaobserwować na próbkach wykonanych z miękkich i plastycznych materiałów (rys. 8a). Jeżeli próbka wykonana jest z materiału twardego, wstępnie odkształconego np. przez walcowanie na zimno do wartości  $\varphi_i$  większej od rzędnej punktu  $A'$ , wtedy przy jej rozciąganiu istnieje potencjalna możliwość pojawienia się jednocześnie dwu form niestateczności: szyjki oraz bruzdy typu II. Należy jednak pamiętać, że pojawienie się bruzdy typu II, biegnącej pod kątem  $\alpha_B$  do kierunku rozciągania, powoduje natychmiastowe odciążenie pozostałego obszaru próbki,

co pociąga za sobą zahamowanie ewentualnego procesu tworzenia się szyjki. W rezultacie otrzymamy pęknięcie próbki wzdłuż linii prostej nachylonej pod kątem  $\alpha_B$  bez śladów szyjki, jak to ilustruje rys. 8b.



Rys. 8

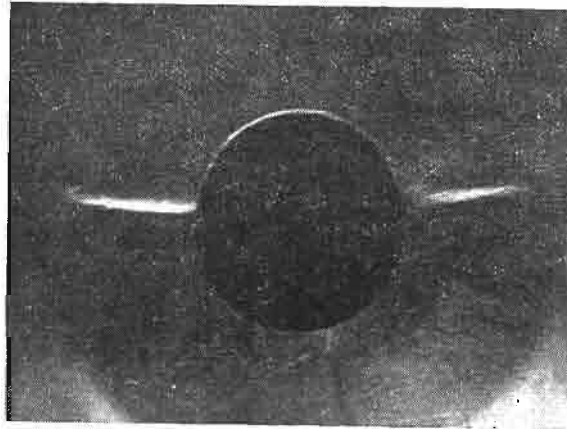
Następny przykład dotyczy procesu rozszerzania otworu przez rozciąganie pierścieni blachy o utwardzonym obrzeżu zewnętrznym (rys. 9), (próba tłoczności Siebla).



Rys. 9

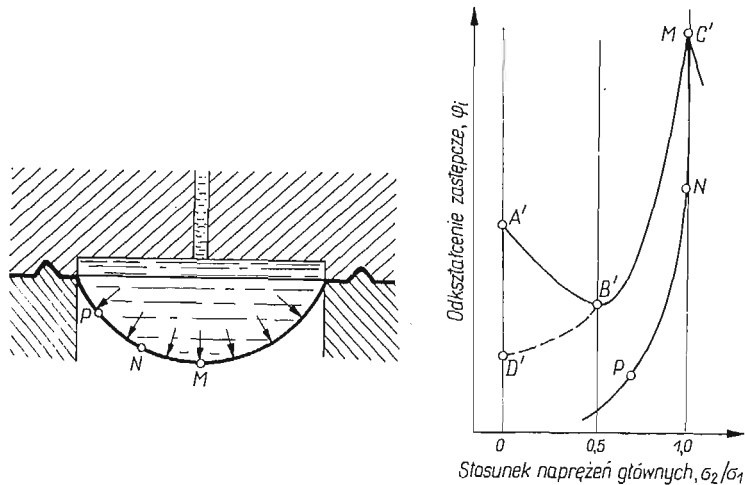
Istniejący w tym procesie rozkład naprężeń i odkształceń przedstawia na wykresie linia  $MNP$ . Dochodzi ona do granicznej linii  $A'B'$ , odpowiadającej niestateczności typu II, w punkcie  $N$  leżącym w pobliżu punktu  $B'$ , przy czym na wytłoczce miejsce to (punkt  $N$ ) znajduje się w przybliżeniu dwukrotnie dalej od osi niż promień otworu ( $r_N \approx 2r_0$ ). W tym

więc miejscu powłoki możemy się spodziewać powstania bruzdy typu II. Biec ona powinna w kierunku promieniowym, gdyż stan naprężeń w tym punkcie odpowiada schematowi  $\sigma_2 = \sigma_1/2$ , a największą wartość ma naprężenie obwodowe. Rysunek 10 przedstawia fotografię takiej bruzdy zaobserwowanej przy rozciąganiu blachy aluminiowej.



Rys. 10

Rysunek 11 przedstawia proces kształtowania wybrzuszenia o kształcie zbliżonym do czaszy kulistej za pomocą ciśnienia cieczy wywieranego na wewnętrzną powierzchnię blachy. Rozkład naprężeń i odkształceń dla tego procesu przedstawia linia  $M-N-P$  osiągnająca graniczną linię  $B'-C'$  w punkcie  $M$ . Oznacza to możliwość powstawania



Rys. 11

niestateczności typu III w najbardziej odkształconym miejscu wytłoczki leżącym na jej osi symetrii. Graniczna wartość odkształcenia, którego doznać może w tym miejscu blacha do chwili utraty stateczności jest, jak widać z wykresu, wyjątkowo duża, toteż ten sposób kształtowania blach należy uznać za wyjątkowo korzystny.

## Literatura cytowana w tekście

1. R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, O.U.P., 1950.
2. Z. MARCINIAK, *Stability of plastic shells under tension with kinematic boundary conditions*, AMS, 4, 17 (1965).
3. Z. MARCINIAK, *Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych*, Mech. Teoret. i Stos., 1966.

## Резюме

## О РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИСТА ПОДВЕРЖЕННОГО РАСТЯЖЕНИЮ В ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

Потеря устойчивости листа подверженного растяжению в пластическом состоянии может иметь различные формы: появление шейки (например при растяжении образцов осевой силой), появление линии, вдоль которой происходит разрыв поля скоростей или появление борозды, углублению которой сопутствует постепенное исчезновение пластической деформации других областей. В работе содержится анализ условий, при которых могут осуществляться упомянутые виды потери устойчивости. Из этого анализа следует, что при отношении главных напряжений  $\sigma_2/\sigma_1 \leq 0,5$  образуется неустойчивость типа кинематического разрыва, тогда как при  $\sigma_2/\sigma_1 > 0,5$  потеря устойчивости имеет вид борозды перпендикулярной большему из главных напряжений. В работе исследована потеря устойчивости листа в ходе различных технологических процессов. Полученные теоретические результаты сравнены с экспериментальными данными.

## Summary

## ON VARIOUS FORMS OF INSTABILITY IN SHEET MATERIAL UNDERGOING PLASTIC TENSION

The loss of stability of sheet material undergoing plastic tension may take various forms: necking occurring for example in specimens loaded by uniaxial tension, a line of kinematical discontinuity or necking line connected with progressively diminishing plastic deformation in neighbouring portions of material. The present paper contains an analysis of conditions associated with each of these forms of instability. For principal stress ratio  $\sigma_2/\sigma_1 \leq 0.5$  a line of kinematical discontinuity occurs, while for  $\sigma_2/\sigma_1 > 0.5$  the deformation takes the form of a necking-line perpendicular to the direction of the greater principal stress. The course of stability loss is also considered for various processes of metal forming. Theoretical results are later compared with experimental observations.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 września 1966 r.*