

QUASI-STATYCZNE TERMONAPRĘŻENIA W PŁASKOWNIKU PRZEWODZĄCYM PRĄD
ELEKTRYCZNY I ODDAJĄCYM CIEPŁO PRZEZ KÓNWEKCJĘ

EDWARD KĄCKI (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

W wielu urządzeniach elektrycznych elementami przewodzącymi prąd elektryczny są pręty o przekroju prostokątnym. Poza tak charakterystycznymi urządzeniami jak szyny zbiorcze w rozdzielniach czy też w podstacjach elektrycznych spotyka się dość często w różnych aparatach części przewodzące prąd w postaci płaskowników. Na szczególną uwagę zasługują elementy grzejne znacznych mocy ogrzewające bezpośrednio pewien roztwór. Dzięki zanurzeniu w kąpeli są one intensywnie chłodzone i stąd powstaje możliwość stosowania znacznych gęstości mocy, a w następstwie tego możliwość powstawania nadmiernych termonaprężeń. W szynach zbiorczych jak i w wymienionych częściach aparatów przewodzących prąd elektryczny spotykamy się — szczególnie w przypadkach zwarć i przetężeń — z zagadnieniem niebezpiecznych naprężeń mechanicznych wywołanych polem temperatury. Znajomość quasi-statycznych termonaprężeń pozwala na zastosowanie zabezpieczeń przetężeniowych o dostatecznie krótkim czasie reakcji.

Wzory wyprowadzone w niniejszej pracy dotyczą pręta nieskończenie długiego o przekroju prostokątnym, którego powierzchnie boczne oddają ciepło do otoczenia wg prawa Newtona ze stałym współczynnikiem wymiany ciepła.

Rozważania są przeprowadzone przy założeniu, że parametry charakteryzujące materiał płaskownika przewodzącego prąd elektryczny są stałe w czasie i w przestrzeni a ponadto materiał jest izotropowy. Gęstość natężenia prądu elektrycznego jest jednakowa w każdym punkcie płaskownika, zatem jest jednakowa w każdym punkcie gęstość mocy zamienianej na ciepło. Wymieniona gęstość mocy p wynosi:

$$(1.1) \quad p = j^2 \varrho,$$

gdzie j jest gęstością natężenia prądu elektrycznego, a ϱ opornością właściwą materiału płaskownika.

Praca składa się z trzech zasadniczych części: a) zawierającej wyprowadzenie funkcji określającej zmienne w czasie pole temperatury w pręcie, b) stanowiącej wyprowadzenie wzorów określających pole quasi-statycznych termonaprężeń w pręcie podczas jego stygnięcia, c) zawierającej wyprowadzenie wzorów określających pole quasi-statyczne termonaprężeń podczas nagrzewania się płaskownika. Dla wyznaczenia quasi-statycznych termonaprężeń posługujemy się potencjałem termosprężystym oraz funkcją Airy'ego.

Metoda wykorzystana w rozważaniach była stosowana do rozwiązywania kilku prostszych przypadków, między innymi dla wyznaczenia quasi-statycznych termonaprężeń w stygnącym walcu o przekroju prostokątnym, nie mającym źródeł ciepła [2, 6] oraz w płaskowniku przewodzącym prąd elektryczny o stałej temperaturze powierzchni bocznych [3].

2. Nieustalone pole temperatury w płaskowniku

Pręt o przekroju prostokątnym $2a \times 2b$ nieskończenie długi przewodzi prąd elektryczny o stałym natężeniu. Wszystkie jego punkty są źródłami ciepła o stałej gęstości mocy p określonej przez wzór (1.1). Ściany boczne $x = \mp a$, $y = \mp b$ rozważanego płaskownika oddają ciepło do otoczenia wg prawa Newtona ze stałym współczynnikiem wymiany ciepła h

$$(2.1) \quad h = \frac{\alpha}{\lambda},$$

gdzie α jest współczynnikiem przejmowania ciepła i λ jest współczynnikiem przewodności cieplnej materiału płaskownika.

Płaskownik znajduje się w stanie ustalonym pod względem cieplnym aż do chwili $t = 0$, w której zostaje odłączony dopływ energii elektrycznej. Przeszają działać źródła ciepła rozłożone równomiernie w płaskowniku. Począwszy od chwili $t = 0$ płaskownik stygnie. Wyznamy funkcję $T_1(x, y, t)$ określającą pole temperatury w płaskowniku podczas jego stygnięcia.

Funkcja $T_1(x, y, t)$ spełnia równanie różniczkowe:

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T_1}{\partial t}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{c\rho},$$

warunek początkowy

$$(2.3) \quad T_1(x, y, 0) = T_0(x, y)$$

oraz warunki brzegowe

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=-a} - hT_1(-a, y, t) &= \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=a} + hT_1(a, y, t) = 0, \\ \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} \right)_{y=-b} - hT_1(x, -b, t) &= \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} \right)_{y=b} + hT_1(x, b, t) = 0, \end{aligned}$$

gdzie λ oznacza przewodność cieplną właściwą, c ciepło właściwe, ρ gęstość materiału.

Funkcja $T_0(x, y)$ występująca w warunku początkowym (2.3) określa rozkład temperatury w pręcie dla stanu ustalonego, a więc dla stanu jaki istniał przed odłączeniem źródła energii elektrycznej. Zatem przed rozwiązaniem równania (2.2) musimy dodatkowo wyznaczyć funkcję $T_0(x, y)$. Jest to funkcja spełniająca równanie różniczkowe

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} = -\frac{p}{\lambda}$$

oraz warunki brzegowe

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial T_0}{\partial x}\right)_{x=-a} - hT_0(-a, y) &= \left(\frac{\partial T_0}{\partial x}\right)_{x=a} + hT_0(a, y) = 0, \\ \left(\frac{\partial T_0}{\partial y}\right)_{y=-b} - hT_0(x, -b) &= \left(\frac{\partial T_0}{\partial y}\right)_{y=b} + hT_0(x, b) = 0. \end{aligned}$$

Funkcję $T_0(x, y)$ wyrażamy w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego [1]. Ze względu na symetrię warunków cieplnych względem osi $x = 0$ oraz $y = 0$, w jakich znajduje się pręt, będą w wymienionym szeregu występowały tylko kosinusy

$$(2.7) \quad T_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \cos N_n x \cos M_m y.$$

Z warunków (2.6) otrzymujemy:

$$(2.8) \quad N_n = \frac{\gamma_n}{a}, \quad M_m = \frac{\mu_m}{b},$$

gdzie γ_n i μ_m są kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równań

$$(2.9) \quad \gamma_n \operatorname{tg} \gamma_n = ah, \quad \mu_m \operatorname{tg} \mu_m = bh.$$

Wartości współczynników A_{nm} wyznaczamy w ten sposób, ażeby funkcja (2.7) spełniała równanie różniczkowe (2.5), skąd mamy

$$(2.10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y = \frac{p}{\lambda}.$$

Jeżeli do powyższego wyrażenia wprowadzimy oznaczenie

$$(2.11) \quad E_{nm} = A_{nm} \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right),$$

to otrzymamy następujący związek (dla $-a < x < a$, $-b < y < b$):

$$(2.12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_{nm} \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y = \frac{p}{\lambda}.$$

Współczynniki E_{nm} obliczamy ze wzoru [4, 7]

$$E_{nm} = \frac{\frac{p}{\lambda} \int_0^a \int_0^b \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y dx dy}{\int_0^a \int_0^b \cos^2 \frac{\gamma_n}{a} x \cos^2 \frac{\mu_m}{b} y dx dy},$$

skąd po przeprowadzeniu rachunków mamy

$$(2.13) \quad E_{nm} = \frac{4p \sin \gamma_n \sin \mu_m}{\lambda \gamma_n \mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right)}$$

Po uwzględnieniu związków (2.11) i (2.13) możemy napisać końcową postać funkcji $T_0(x, y)$, podanej wzorem (2.7)

$$(2.14) \quad T_0(x, y) = \frac{4p}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y}{\gamma_n \mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}\right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)}.$$

Obecnie przystąpimy do wyznaczenia funkcji $T_1(x, y, t)$, określającej pole temperatury w stygnącym płaskowniku, tzn. funkcji spełniającej równanie różniczkowe (2.2) oraz warunki (2.3)–(2.4). Równanie różniczkowe przewodnictwa (2.2) rozwiążemy metodą Fouriera rozdzielania zmiennych

$$(2.15) \quad T_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Y_m(y) T_{nm}(t),$$

gdzie funkcje własne $X_n(x)$, $Y_m(y)$, $T_{nm}(t)$ spełniają następujące równania różniczkowe zwyczajne:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} X_n''(x) + K_n^2 X_n(x) &= 0, \\ Y_m''(y) + L_m^2 Y_m(y) &= 0, \\ T_{nm}'(t) + (K_n^2 + L_m^2) T_{nm}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu powyższych równań różniczkowych i uwzględnieniu warunków brzegowych (2.4) otrzymujemy

$$(2.17) \quad K_n = \frac{\gamma_n}{a} = N_n, \quad L_m = \frac{\mu_m}{b} = M_m$$

i wówczas funkcja (2.15) przybiera postać

$$(2.18) \quad T_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y \exp \left[- \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \kappa t \right],$$

gdzie γ_n i μ_m są kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równań (2.9).

Wartości współczynników B_{nm} wyznaczamy z warunku początkowego (2.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y = \frac{4p}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y}{\gamma_n \mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}\right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)}.$$

Kończącą zatem postać funkcji $T_1(x, y, t)$ określającej pole temperatury w stygnącym płaskowniku wyraża wzór:

$$(2.19) \quad T_1(x, y, t) = \frac{4p}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y \exp \left[- \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \kappa t \right]}{\gamma_n \mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}\right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)}.$$

Obecnie zajmiemy się wyznaczeniem funkcji $T_2(x, y, t)$, określającej pole temperatury w płaskowniku podczas nagrzewania się wskutek przepływu prądu elektrycznego o stałym

natężeniu. Temperatura początkowa całego pręta równa jest temperaturze otoczenia i wynosi zero, $T_2(x, y, 0) = 0$. W chwili $t = 0$ zostaje włączone źródło energii elektrycznej, zatem dla $t > 0$ każdy punkt płaskownika jest źródłem ciepła o stałej gęstości mocy p [por. (1.1)]. Analogicznie jak w poprzednio rozpatrzonym przypadku stygnięcia powierzchni boczne pręta oddają ciepło do otoczenia według prawa Newtona ze stałym współczynnikiem wymiany ciepła h [wzór (1.2)].

Funkcja $T_2(x, y, t)$ spełnia równanie różniczkowe cząstkowe

$$(2.20) \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{p}{\lambda}, \quad \varkappa = \frac{\lambda}{c\rho},$$

warunek początkowy

$$(2.21) \quad T_2(x, y, 0) = 0$$

oraz warunki brzegowe

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=-a} - hT_2(-a, y, t) &= \left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=a} + hT_2(a, y, t) = 0, \\ \left(\frac{\partial T_2}{\partial y}\right)_{y=-b} - hT_2(x, -b, t) &= \left(\frac{\partial T_2}{\partial y}\right)_{y=b} + hT_2(x, b, t) = 0, \end{aligned}$$

a ponadto warunek graniczny

$$(2.23) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T_2(x, y, t) = T_0(x, y).$$

Z wyżej podanych warunków wynika, że funkcją $T_2(x, y, t)$ jest różnica wyznaczonych już funkcji $T_0(x, y)$ i $T_1(x, y, t)$, a więc różnica $T_0(x, y) - T_1(x, y, t)$ spełnia równanie różniczkowe (2.20) oraz warunki (2.21)–(2.23)

$$T_2(x, y, t) = T_0(x, y) - T_1(x, y, t).$$

Końcowa postać funkcji $T_2(x, y, t)$ jest następująca:

$$(2.24) \quad T_2(x, y, t) = \frac{4p}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \varkappa t \right] \right\}}{\gamma_n \mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)}.$$

3. Pole quasi-statycznych termonaprężeń w płaskowniku podczas jego stygnięcia

Dla wyznaczenia quasi-statycznych termonaprężeń σ_{ij} posłużymy się potencjałem termosprężystym Φ oraz funkcją Airy'ego F . Jak wiadomo z teorii termosprężystości [5], potencjał termosprężysty Φ spełnia równanie różniczkowe:

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \vartheta_0 T, \quad \vartheta_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t,$$

gdzie ν jest współczynnikiem Poissona i α , jest współczynnikiem rozszerzalności termicznej liniowej. T jest funkcją określającą pole temperatury w płaskowniku podczas stygnięcia; funkcja ta $T = T_1(x, y, t)$ jest określona wzorem (2.19). Funkcja Airy'ego F spełnia równanie różniczkowe biharmoniczne

$$(3.2) \quad \nabla^2 \nabla^2 F = 0.$$

Wartości odpowiednich naprężeń otrzymujemy ze związków [5]

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}_{ij} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} \nabla^2 \right) (2G\Phi - F), \\ \sigma_{zz} &= \bar{\sigma}_{zz} + \bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \nabla^2 (\nu F - 2G\Phi), \\ i, j &= 1, 2, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \end{aligned}$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kroneckera:

$$(3.4) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i = j, \\ 0, & \text{jeśli } i \neq j. \end{cases}$$

Na podstawie związków (2.2) i (3.1) możemy napisać:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Phi) = \kappa \vartheta_0 \nabla^2 T_1.$$

Z powyższego równania otrzymujemy potencjał termosprężysty

$$(3.5) \quad \Phi(x, y, t) = -\frac{4p\vartheta_0}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y \exp \left[-\left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \kappa t \right]}{\gamma_n \mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}$$

Obecnie możemy określić naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$. Posiadają one następującą postać:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \\ &= -\frac{8Gp\vartheta_0}{\lambda b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m \sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y \exp \left[-\left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \kappa t \right]}{\gamma_n \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}, \\ \bar{\sigma}_{yy} &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \\ &= -\frac{8Gp\vartheta_0}{\lambda a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y \exp \left[-\left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \kappa t \right]}{\mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}, \\ \bar{\sigma}_{zz} &= -2G \nabla^2 \Phi = -2G\vartheta_0 T_1(x, y, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \\ &= -\frac{8Gp\vartheta_0}{\lambda ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \sin \mu_m \sin \frac{\gamma_n}{a} x \sin \frac{\mu_m}{b} y \exp \left[-\left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \kappa t \right]}{\left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}, \\ \bar{\sigma}_{xz} &= 0, \quad \bar{\sigma}_{yz} = 0. \end{aligned}$$

Przed wyznaczeniem funkcji Airy'ego musimy określić wartości naprężeń $\bar{\sigma}_{xx}$ i $\bar{\sigma}_{xy}$ na powierzchni $x = a$ oraz naprężeń $\bar{\sigma}_{yy}$ i $\bar{\sigma}_{xy}$ na powierzchni $y = b$.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}(a, y, t) &= -\frac{4Gp\vartheta_0}{\lambda b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_1(\mu_m, t) \cos \frac{\mu_m}{b} y \exp \left(-\frac{\mu_m^2}{b^2} \kappa t \right), \\ \bar{\sigma}_{yy}(x, b, t) &= -\frac{4Gp\vartheta_0}{\lambda a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_2(\gamma_n, t) \cos \frac{\gamma_n}{a} x \exp \left(-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \kappa t \right), \\ \bar{\sigma}_{xy}(a, y, t) &= -\frac{8Gp\vartheta_0}{\lambda ab} \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_3(\mu_m, t) \sin \frac{\mu_m}{b} y \exp \left(-\frac{\mu_m^2}{b^2} \kappa t \right), \\ \bar{\sigma}_{xy}(x, b, t) &= -\frac{8Gp\vartheta_0}{\lambda ab} \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_4(\gamma_n, t) \sin \frac{\gamma_n}{a} x \exp \left(-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \kappa t \right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varrho_1(\mu_m, t) &= \frac{\mu_m \sin \mu_m}{1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\gamma_n \exp \left(-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \kappa t \right)}{\gamma_n \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}, \\ \varrho_2(\gamma_n, t) &= \frac{\gamma_n \sin \gamma_n}{1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\mu_m \exp \left(-\frac{\mu_m^2}{b^2} \kappa t \right)}{\mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}, \\ \varrho_3(\mu_m, t) &= \frac{\sin \mu_m}{1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_n \exp \left(-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \kappa t \right)}{\left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\varrho_4(\gamma_n, t) = \frac{\sin \gamma_n}{1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \mu_m \exp\left(-\frac{\mu_m^2}{b^2} \kappa t\right)}{\left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)^2}.$$

Poszukujemy naprężeń σ spełniających warunki brzegowe:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{xy}(a, y, t) &= \sigma_{xy}(x, b, t) = 0, \\ \sigma_{xt}(a, y, t) &= \sigma_{yy}(x, b, t) = 0, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy następujące związki pomiędzy naprężeniami $\bar{\sigma}_{ij}$ i $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ na powierzchni ograniczającej rozważany płaskownik. Związki te dają odpowiednie warunki brzegowe dla funkcji Airy'ego (3.2)

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy} + \bar{\bar{\sigma}}_{xy} &= 0 \quad \text{dla} \quad x = a, y = b, \\ \bar{\sigma}_{xx} + \bar{\bar{\sigma}}_{xx} &= 0 \quad \text{dla} \quad x = a, \\ \bar{\sigma}_{yy} + \bar{\bar{\sigma}}_{yy} &= 0 \quad \text{dla} \quad y = b. \end{aligned}$$

Funkcję Airy'ego wyrażamy pojedynczym szeregiem

$$(3.11) \quad \begin{aligned} F = b^2 \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^{-2} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{\mu_m}{b} x + B_m \frac{\mu_m}{b} x \operatorname{sh} \frac{\mu_m}{b} x \right) \cos \frac{\mu_m}{b} y + \\ + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{-2} \left(C_n \operatorname{ch} \frac{\gamma_n}{a} y + D_n \frac{\gamma_n}{a} y \operatorname{sh} \frac{\gamma_n}{a} y \right) \cos \frac{\gamma_n}{a} x. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych (3.10) korzystamy z następujących rozwinięć na szeregi trygonometryczne:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{\gamma_n}{a} y &= \sum_{m=1}^{\infty} E_{nm} \cos \frac{\mu_m}{b} y, & y \operatorname{sh} \frac{\gamma_n}{a} y &= \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \cos \frac{\mu_m}{b} y, \\ \operatorname{ch} \frac{\mu_m}{b} x &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{nm} \cos \frac{\gamma_n}{a} x, & x \operatorname{sh} \frac{\mu_m}{b} x &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{nm} \cos \frac{\gamma_n}{a} x, \\ \operatorname{sh} \frac{\gamma_n}{a} y &= \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} \sin \frac{\mu_m}{b} y, & y \operatorname{ch} \frac{\gamma_n}{a} y &= \sum_{m=1}^{\infty} L_{nm} \sin \frac{\mu_m}{b} y, \\ \operatorname{sh} \frac{\mu_m}{b} x &= \sum_{n=1}^{\infty} M_{nm} \sin \frac{\gamma_n}{a} x, & x \operatorname{ch} \frac{\mu_m}{b} x &= \sum_{n=1}^{\infty} N_{nm} \sin \frac{\gamma_n}{a} x, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 E_{nm} &= f_1(a, b, \gamma_n, \mu_m) = 2 \frac{b\gamma_n \operatorname{sh} \frac{b}{a} \gamma_n \cos \mu_m + a\mu_m \operatorname{ch} \frac{b}{a} \gamma_n \sin \mu_m}{ab^2 \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)}, \\
 F_{nm} &= f_2(a, b, \gamma_n, \mu_m) = 2 \frac{b\gamma_n \operatorname{ch} \frac{b}{a} \gamma_n \cos \mu_m + a\mu_m \operatorname{sh} \frac{b}{a} \gamma_n \sin \mu_m}{ab \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)} + \\
 (3.13) \quad &+ 2 \frac{(a^2\mu_m^2 - b^2\gamma_n^2) \operatorname{sh} \frac{b}{a} \gamma_n \cos \mu_m - 2ab\gamma_n\mu_m \operatorname{ch} \frac{b}{a} \gamma_n \sin \mu_m}{a^2b^3 \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)^2}, \\
 G_{nm} &= f_1(b, a, \mu_m, \gamma_n), \quad H_{nm} = f_2(b, a, \mu_m, \gamma_n), \\
 K_{nm} &= \frac{b\gamma_n}{a\mu_m} E_{nm}, \quad L_{nm} = \frac{b}{\mu_m} \left(E_{nm} + \frac{\gamma_n}{a} F_{nm}\right), \\
 M_{nm} &= \frac{a\mu_m}{b\gamma_n} G_{nm}, \quad N_{nm} = \frac{a}{\gamma_n} \left(G_{nm} + \frac{\mu_m}{b} H_{nm}\right).
 \end{aligned}$$

Otrzymujemy w końcu następujący układ równań, w którym niewiadomymi są współczynniki A_m, B_m, C_n i D_n występujące w funkcji Airy'ego (3.11)

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad & - \left(A_m \operatorname{ch} \frac{a}{b} \mu_m + B_m \mu_m \frac{a}{b} \operatorname{sh} \frac{a}{b} \mu_m\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n E_{nm} + D_n \left(2E_{nm} + \frac{\gamma_n}{a} F_{nm}\right)\right] \cos \gamma_n = \\
 & = \frac{4Gp\vartheta_0}{\lambda b^2} \varrho_1(\mu_m, t) \exp\left(-\frac{\mu_m^2}{b^2} \kappa t\right), \quad m = 1, 2, \dots \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m G_{nm} + B_m \left(2G_{nm} + \frac{\mu_m}{b} H_{nm}\right)\right] \cos \mu_m - \left(C_n \operatorname{ch} \frac{b}{a} \gamma_n + D_n \gamma_n \frac{b}{a} \operatorname{sh} \frac{b}{a} \gamma_n\right) = \\
 & = \frac{4Gp\vartheta_0}{\lambda a^2} \varrho_2(\gamma_n, t) \exp\left(-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \kappa t\right), \quad n = 1, 2, \dots \\
 (3.14) \quad & (A_m + B_m) \operatorname{sh} \frac{a}{b} \mu_m + B_m \mu_m \frac{a}{b} \operatorname{ch} \frac{a}{b} \mu_m + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n K_{nm} + D_n \left(K_{nm} + \frac{\gamma_n}{a} L_{nm}\right)\right] \sin \gamma_n = \\
 & = \frac{4Gp\vartheta_0}{\lambda ab} \varrho_3(\mu_m, t) \exp\left(-\frac{\mu_m^2}{b^2} \kappa t\right), \quad m = 1, 2, \dots \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m M_{nm} + B_m \left(M_{nm} + \frac{\mu_m}{b} N_{nm}\right)\right] \sin \mu_m + (C_n + D_n) \operatorname{sh} \frac{b}{a} \gamma_n + D_n \gamma_n \frac{b}{a} \operatorname{ch} \frac{b}{a} \gamma_n = \\
 & = \frac{4Gp\vartheta_0}{\lambda ab} \varrho_4(\gamma_n, t) \exp\left(-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \kappa t\right). \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Zależności (3.14) stanowią nieskończony układ równań. Jeżeli ograniczymy się w szeregu (3.11) przedstawiającym funkcję Airy'ego do k pierwszych składników, to uzyskamy ze związków (3.14) układ równań złożony z $4k$ równań liniowych o niewiadomych A_m, B_m, C_n i D_n dla $m = 1, 2, 3, \dots, k$ oraz $n = 1, 2, 3, \dots, k$. Po rozwiązaniu wymienionego układu równań możemy napisać przybliżoną postać (3.11) funkcji F , a następnie wyznaczyć wartości naprężeń $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ z zależności

$$(3.15) \quad \bar{\bar{\sigma}}_{ij} = \left(\delta_{ij} \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) F, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \nu \nabla^2 F.$$

Obliczone wartości naprężeń ze wzorów (3.15) dodajemy do naprężeń przedstawionych zależnościami (3.6) i stąd otrzymujemy szukane naprężenia (3.3).

4. Pole quasi-statycznych termonaprężeń w płaskowniku podczas jego nagrzewania

Pole temperatury w płaskowniku podczas jego nagrzewania się wskutek przepływu prądu elektrycznego o stałym natężeniu jest superpozycją dwóch pól, mianowicie pola dla stanu ustalonego oraz nieustalonego pola temperatury dla stygnącego płaskownika po wyłączeniu dopływu energii elektrycznej. Z wymienionego powodu funkcja $T_2(x, y, t)$ określająca pole temperatury podczas nagrzewania się rozważanego pręta jest różnicą funkcji $T_0(x, y)$ i $T_1(x, y, t)$ [por. wzór (2.24)]

$$T_2(x, y, t) = T_0(x, y) - T_1(x, y, t),$$

gdzie $T_0(x, y) = T_1(x, y, 0)$.

Chwilowe wartości quasi-statycznych termonaprężeń nie zależą od kierunku zmian naprężeń w czasie, lecz są w jednoznaczny sposób przyporządkowane poszczególnym punktom przestrzeni dla każdego z chwilowych pól temperatury. Stąd następujący wniosek, że polu temperatury będącemu superpozycją kilku pól odpowiada pole quasi-statycznych termonaprężeń będące superpozycją odpowiednich pól naprężeń. Możemy zatem napisać, że wartość termonaprężenia σ_{ij}^* dla nagrzewającego się płaskownika jest różnicą naprężeń $\sigma_{ij}(x, y, 0)$ oraz $\sigma_{ij}(x, y, t)$, gdzie funkcja $\sigma_{ij}(x, y, 0)$ określa termonaprężenia dla stanu ustalonego pod względem cieplnym, funkcja zaś $\sigma_{ij}(x, y, t)$ — dla stygnącego płaskownika.

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}^*(x, y, t) &= \sigma_{ij}(x, y, 0) - \sigma_{ij}(x, y, t), \\ \sigma_{xz}^*(x, y, t) &= 0, \quad \sigma_{yz}^*(x, y, t) = 0. \end{aligned}$$

Funkcje $\sigma_{ij}(x, y, t)$ występujące w powyższych zależnościach są określone wzorami (3.3), (3.6) i (3.15).

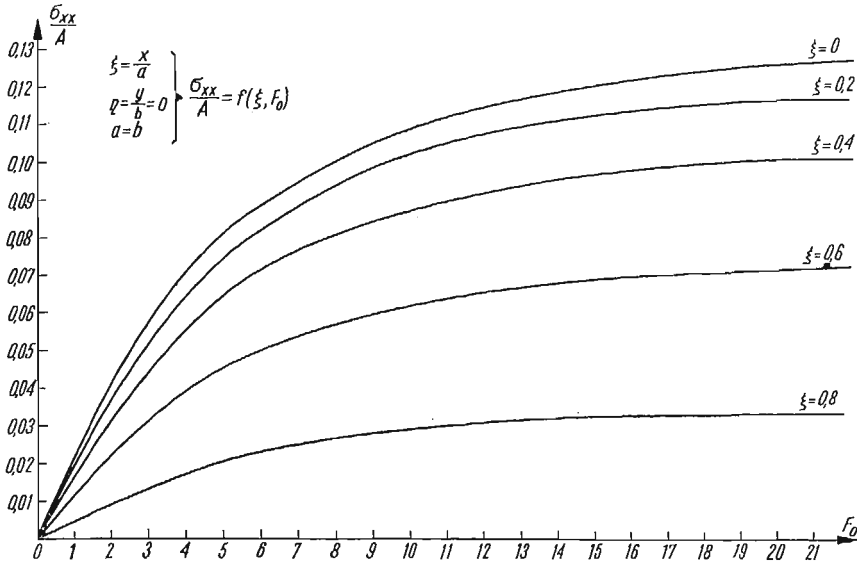
5. Zakończenie

Wzory wyprowadzone w pracy posiadają dość skomplikowaną postać, jednak mogą one posiadać praktyczną wartość po zaprogramowaniu ich na maszynę cyfrową.

Dla zilustrowania otrzymanych wyników podajemy na rys. 1 przebiegi bezwymiarowego naprężenia σ_{xx}^*/A , gdzie

$$A = \frac{8Gp\vartheta_0 a^2}{\lambda}, \quad \sigma_{xx}^* = \sigma_{xx}^*(x, 0, t) \text{ [por. wzór (4.1)]}$$

w przekroju $y = 0$ nagrzewanego prądem elektrycznym płaskownika o przekroju kwadratowym ($a = b$). Przebiegi σ_{xx}^*/A przedstawione na wykresie uzależnione są od liczby



Rys. 1

Fouriera $F_0 = \kappa t/a^2$ oraz od bezwymiarowej współrzędnej $\xi = x/a$. Wymiana ciepła z otoczeniem w rozważanym przykładzie określona jest przez przyjętą liczbę Biota, $Bi = 0,1$. Dla tej wartości $Bi = 0,1$ cztery pierwsze kolejne pierwiastki równań (2.9) wynoszą $\gamma_1 = \mu_1 = 0,311$, $\gamma_2 = \mu_2 = 3,173$, $\gamma_3 = \mu_3 = 6,299$, $\gamma_4 = \mu_4 = 9,435$ [4]. Wartości przedstawione wykresami na rys.1 zostały obliczone na maszynie cyfrowej ZAM2 w Katedrze Mechaniki Technicznej Politechniki Łódzkiej.

Literatura cytowana w tekście

1. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Heat Conduction in Solids*, Oxford 1959.
2. E. KĄCKI, *Quasi-statyczne termonaprężenia w stygnącym walcu prostokątnym, nieskończonej długości, oddającym ciepło przez konwekcję*, Zesz. Nauk. P. Ł. Mechanika Nr 12, Łódź 1964.
3. E. KĄCKI, *Quasi-statyczne termonaprężenie w płaskowniku przewodzącym prąd elektryczny*, Zesz. Nauk. P. Ł. Mechanika Nr 10, Łódź 1963.
4. E. KĄCKI, *Termokinetyka*, WNT, Warszawa 1966.
5. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
6. W. NOWACKI, *Non-steady thermal stresses in an infinite cylinder of rectangular or circular cross-section*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 6, 1958.

7. И. А. САМОЙЛОВИЧ, *Температурные напряжения в длинной призме прямоугольного сечения*, Инж. физ. журн., 7, 3, 1964.
 8. А. Н. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИ, *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1963.

Р е з ю м е

ТЕРМИЧЕСКИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БРУСЕ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ
 СЕЧЕНИЕМ ПРОВОДЯЩИМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК И ОТДАЮЩИМ ТЕПЛО ЧЕРЕЗ
 ПОВЕРХНОСТЬ

В работе найдены функции $\sigma(x, y, t)$ определяющие термические нестационарные напряжения в брусе с прямоугольным сечением. Эти напряжения вызваны нагревом вследствие прохождения электрического тока постоянной силы и последующим охлаждением после выключения тока. Принимается, что отдача тепла в окружающее пространство через боковую поверхность происходит в соответствии с законом Ньютона. Предполагается, что параметры характеризующие материал бруса постоянны во времени и по координатам.

Термические напряжения найдены при помощи потенциала термоупругих перемещений Φ , а также функции Эри F .

S u m m a r y

QUASI-STATIC THERMAL STRESSES IN A BAR OF RECTANGULAR CROSS-SECTION
 CONDUCTING ELECTRIC CURRENT AND EXCHANGING HEAT BY CONVECTION

Quasi-static state of stress in the bar is determined with the aid of the Airy stress function and the Goodier potential of thermo-elastic displacement. Both the heating and cooling processes are considered. It has been assumed that at the lateral surfaces the heat flow is proportional to the temperature; all physical parameters of the material are independent of temperature and constant throughout the body.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 stycznia 1967 r.