

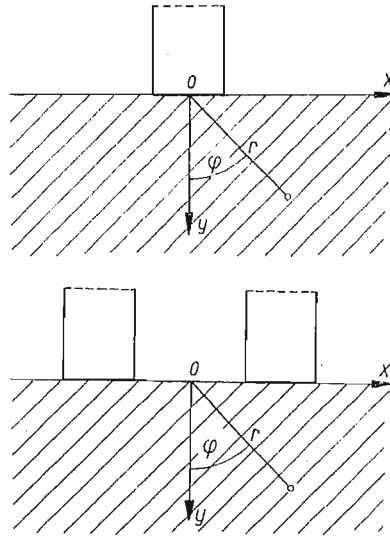
O PEWNYM ZAGADNIENIU KONTAKTOWYM
NIEJEDNORODNEJ PÓŁPŁASZCZYZNY SPRĘŻYSTEJ

BARBARA STACHOWICZ, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

1. Wstęp

Niejednorodny ośrodek sprężysty był przedmiotem rozważań wielu autorów. Między innymi klasyczny problem Flamanta o rozkładzie naprężeń w półpłaszczyźnie, wywołanych siłą skupioną, działającą na brzegu, dla ośrodka niejednorodnego rozwiązany został przez W. OLSZAKA i J. RYCHLEWSKIEGO [5] oraz S. G. LECHNICKIEGO [4]. Oni też postawili ogólnie problem poszukiwania postaci niejednorodności, określonej zmiennym modułem sprężystości dla danego z góry stanu naprężenia.

Zadanie to zostało następnie uogólnione na przypadek półprzestrzeni przez N. A. ROSTOWCEWA [6]. Niektóre typy niejednorodności dla półprzestrzeni rozważał K. HRUBAN [2], a pewne zagadnienie kontaktowe dla określonego typu niejednorodności omawiał B. G. KORNIENIEW [3].



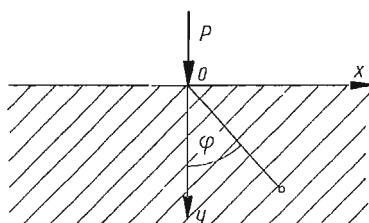
Rys. 1

W pracy niniejszej podamy rozwiązanie płaskiego zagadnienia kontaktowego dla jednego i dwu sztywnych stempli spoczywających bez tarcia na izotropowej, niejednorodnej półpłaszczyźnie sprężystej (rys. 1).

Niejednorodność ośrodka przyjmujemy w postaci dopuszczającej radialny rozkład naprężeń. Jak wiadomo [4] zachodzi to w wypadku, gdy moduł Younga jest typu $E(x, y) = E(r, \varphi) = E_r(r)E_\varphi(\varphi)$. Liczbę Poissona ν przyjmujemy stałą dla całego ośrodka. Wprowadzając zastępczą stałą Poissona μ potraktujemy wspólnie płaski stan naprężenia i odkształcenia. Korzystając z funkcji Greena dla przemieszczeń, sprowadzimy problem do równania całkowego Fredholma I rodzaju z jądrem słabo osobliwym.

2. Konstrukcja funkcji Greena

Jak już wspomnieliśmy wyżej, zagadnienie półpłaszczyzny sprężystej obciążonej siłą normalną na brzegu (rys. 2) dla założonego, radialnego rozkładu naprężeń, prowadzącego do określonego typu niejednorodności, rozwiązane zostało w pracach [4, 5 i 6]. W pracach



Rys. 2

tych nie przytoczono jednak ogólnych wzorów dla przemieszczeń, które dla zadania kontaktowego mają znaczenie podstawowe. Dlatego ograniczając się do zacytowania gotowych wzorów dla naprężeń przytoczymy ponadto związki dla przemieszczeń. Stosując powszechnie stosowane oznaczenia napiszemy składowe radialnego rozkładu naprężeń

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_\varphi &= \tau_{r\varphi} = 0, \\ \sigma_z &= \begin{cases} 0 & \text{dla płaskiego stanu naprężenia,} \\ \nu\sigma_r & \text{dla płaskiego stanu odkształcenia,} \end{cases} \\ \sigma_r &= \frac{f(\varphi)}{r}, \end{aligned}$$

które po wykorzystaniu związków nierozdzielności prowadzą do następującego związku dla modułu:

$$(2.2) \quad E(r, \varphi) = E_r(r)E_\varphi(\varphi),$$

gdzie:

$$\begin{aligned} E_r(r) &= \frac{1}{C_1 r^\alpha + C_2 r^{-\alpha+1-\frac{1}{\mu}}}, & \frac{f(\varphi)}{E_\varphi(\varphi)} &= A \cos n\varphi, \\ n &= \sqrt{(1-\alpha)(1+\mu\alpha)}, & A &= \frac{P}{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E_\varphi(\varphi) \cos n\varphi \cos \varphi d\varphi}; \end{aligned}$$

C_1, C_2, α oznaczają dowolne stałe, $E_\varphi(\varphi)$ dowolną parzystą funkcję φ ,

$$\mu = \begin{cases} \nu & \text{dla płaskiego stanu naprężenia,} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \text{dla płaskiego stanu odkształcenia.} \end{cases}$$

Korzystając ze znanych związków dla odkształceń

$$(2.3) \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

i uwzględniając uogólnione prawo Hooke'a oraz (2.1) i (2.2) wyznaczmy przemieszczenia

$$(2.4) \quad u_r = A \cos n\varphi \int \frac{dr}{E_r r} + \Psi(\varphi),$$

$$(2.5) \quad v_\varphi = -\frac{\mu A \sin n\varphi}{E_r} - \frac{A \sin n\varphi}{n} \int \frac{dr}{E_r r} - \int \psi(\varphi) d\varphi + \Phi(r).$$

Tutaj u_r oznacza przemieszczenie w kierunku promieniowym, v_φ przemieszczenie w kierunku obwodowym. Funkcje $\psi(\varphi)$ i $\Phi(r)$ określimy z warunku zgodności odkształceń

$$(2.6) \quad \gamma_{\varphi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} = 0$$

oraz z symetrii zadania. Jak widać, przemieszczenia nie zależą od postaci funkcji $E_\varphi(\varphi)$, a tylko od $E_r(r)$.

W dalszym ciągu ograniczymy się do modułu postaci

$$E = E_0 r^m \cos^m \varphi = E_0 y^m, \quad 0 < m < 1;$$

wtedy mamy:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} E_\varphi &= E_0 \cos^m \varphi, & E_r &= r^m, \\ C_1 &= 1, & C_2 &= 0, & \nu &= -m, & n &= \sqrt{(1+m)(1-m\mu)}, \\ A &= \frac{P}{E_0} \frac{1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} \varphi \cos n\varphi d\varphi}. \end{aligned}$$

Dla przemieszczeń otrzymujemy więc z (2.4) i (2.5)

$$(2.8) \quad u_r = -\frac{A \cos n\varphi}{m r^m} + \psi(\varphi),$$

$$(2.9) \quad v_\varphi = \left(\frac{1}{m} - \mu \right) \frac{A \sin n\varphi}{n r^m} + \Phi(r) - \int \psi(\varphi) d\varphi.$$

Ze związku (2.6) po uwzględnieniu wartości z (2.7) wynika następujący związek dla funkcji ψ i Φ :

$$(2.10) \quad \psi'(\varphi) + \int \psi(\varphi) d\varphi + r\Phi'(r) - \Phi(r) = 0,$$

który przy dodatkowych warunkach

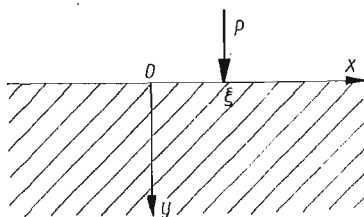
$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_r(r, \varphi) = 0, \quad v_\varphi(r, 0) = 0$$

spełniają funkcje $\psi(\varphi) = \Phi(r) = 0$. Na tej podstawie otrzymujemy ostatecznie

$$(2.11) \quad u_r = -\frac{A \cos n\varphi}{mr^m},$$

$$(2.12) \quad v_\varphi = \frac{1-\mu m}{mn} \frac{A \sin n\varphi}{r^m}.$$

Z wyprowadzonych wzorów wynika, że dla ośrodka z niejednorodnością typu $E(x, y) = E_0 y^m$ przemieszczenia są regularne w nieskończoności w przeciwieństwie do ośrodka jednorodnego, dla którego, jak wiadomo, przemieszczenia mają dwa punkty osobliwe (0 i ∞).



Rys. 3

Nadając sile P położenie zmienne (rys. 3) otrzymamy ze związków (2.1), (2.11) i (2.12) funkcje Greena dla naprężeń i przemieszczeń. Wykorzystując znane wzory transformacyjne zapiszemy wielkości te w układzie kartezjańskim:

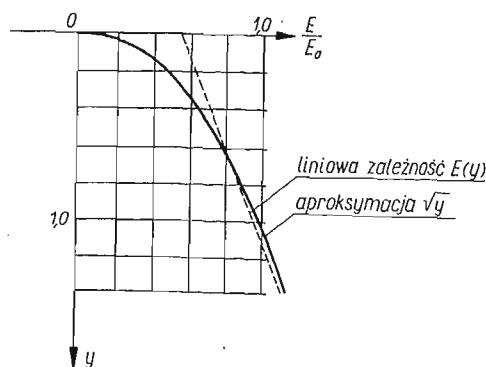
$$(2.13) \quad \begin{aligned} \sigma_x^*(x, y, \xi, 0) &= E_0 A \frac{y^{m+2}}{[(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{m+3}{2}}} T_n \left(\frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \right), \\ \sigma_y^*(x, y, \xi, 0) &= E_0 A \frac{(x-\xi)^2 y^m}{[(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{m+3}{2}}} T_n \left(\frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \right), \\ \tau_{xy}^*(x, y, \xi, 0) &= E_0 A \frac{(x-\xi) y^{m+1}}{[(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{m+3}{2}}} T_n \left(\frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \right), \\ \sigma_z^*(x, y, \xi, 0) &= E_0 A \nu \frac{y^m}{[(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{m+1}{2}}} T_n \left(\frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \right), \\ u^*(x, y, \xi, 0) &= \frac{A}{[(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{m+1}{2}}} \left[\frac{1-\mu m}{mn} y \sin n \arcsin \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{m} T_n \left(\frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \right) \right], \\ v^*(x, y, \xi, 0) &= \frac{A}{[(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{m+1}{2}}} \left[\frac{1-\mu m}{mn} (x-\xi) \sin n \arcsin \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y}{m} T_n \left(\frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Tutaj naprężenia oznaczono zgodnie z powszechnie stosowanymi oznaczeniami: u i v są przemieszczeniami odpowiednio w kierunku osi x i y , $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ jest wielomianem Czebyszewa I rodzaju.

Podane wyżej rozwiązanie dla siły skupionej stanowi podstawę do rozwiązania problemu kontaktowego.

3. Nacisk jednego stempla na półpłaszczyznę

Przystępując do rozpatrzenia zagadnienia kontaktowego zwrócimy jeszcze raz uwagę na przyjętą postać modułu sprężystości. Jak widać, ośrodek o takim typie niejednorodności jest fizycznie nierealny ($E = 0$ na brzegu). Taka postać modułu ułatwia jednak matematyczną analizę zagadnienia, ponadto zaś można przyjąć ją jako aproksymację całego szeregu niejednorodności z różnym od zera modułem na brzegu (rys. 4).



Rys. 4

Zagadnienie kontaktowe polega na wyznaczeniu nieznanego rozkładu naprężeń pod stemplem, gdy dane jest jego przemieszczenie:

$$(3.1) \quad v = \Delta(x), \quad |x| < a.$$

Prowadzi to do związku

$$(3.2) \quad \int_{-a}^a p(\xi) v^*(x, 0, \xi, 0) d\xi = \Delta(x),$$

gdzie $p(\xi)$ jest poszukiwanym naprężeniem.

Po wykorzystaniu (2.13) lub (2.12) dla $\varphi = \pi/2$ otrzymamy

$$\frac{1-\mu m}{mn} A \sin \frac{n\pi}{2} \int_{-a}^a \frac{p(\xi)}{|x-\xi|^m} d\xi = \Delta(x)$$

lub krócej

$$(3.3) \quad \int_{-a}^a \frac{p(\xi)}{|x-\xi|^m} d\xi = f(x),$$

gdzie

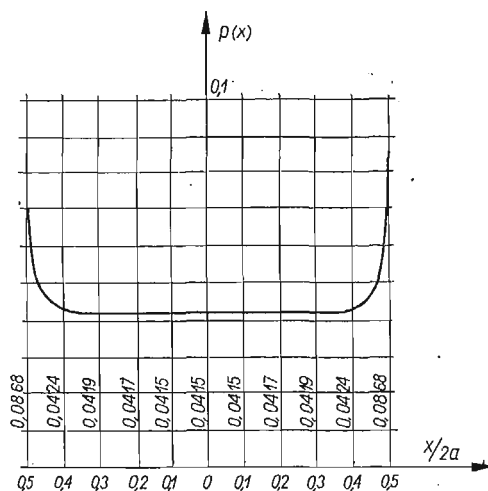
$$f(x) = \frac{nm\Delta x}{A \sin \frac{n\pi}{2} (1-\mu m)}.$$

Jest to równanie całkowe Fredholma I rodzaju z jądrem osobliwym. Całka w (3.3) ma sens jedynie dla $m < 1$, co jest wynikiem przyjętego typu niejednorodności. Równanie (3.3) było badane przez K. D. SAKALIUKA [7]. Stosując przedłużenie na dziedzinę zmiennej zespolonej, rozwiązując pomocniczo zagadnienie brzegowe Hilberta-Riemanna dla funkcji analitycznych oraz sprowadzając następnie zadanie do równania całkowego Abela otrzymuje się rozwiązanie w postaci

$$(3.4) \quad p(\xi) = \frac{\sin m\pi}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_{-a}^{\xi} \frac{F(x)}{(\xi-x)^{1-m}} dx,$$

gdzie

$$F(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} (a^2-x^2)^{\frac{1-m}{2}} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{(a^2-t^2)^{\frac{1-m}{2}} (t-x)}.$$



Rzędne wykresu należy pomnożyć przez

$$\frac{nm}{A(1-\mu m)\sqrt{2a} \sin \frac{n\pi}{2}} \Delta$$

Rys. 5

Całka we wzorze (3.4) nie jest elementarna nawet dla prostych postaci funkcji $f(t)$ [a więc $\Delta(t)$]. Można ją obliczyć jedynie numerycznie. Dla $m = 1/2$ i $\Delta(x) = \Delta = \text{const}$ otrzymujemy rozwiązanie, którego wykres przedstawiono na rys. 5. (Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej UMC-1).

W dalszym ciągu rozpatrzmy kilka prostych przypadków zagadnienia odwrotnego, tzn. zakładając znany rozkład naprężeń pod stemplem wyznaczmy odpowiadające mu przemieszczenie, tzn. kształt stempla.

Przypuśćmy, że $p(\xi) = p_0 = \text{const}$. Otrzymujemy wtedy z (3.3)

$$\Delta(x) = \frac{A \sin \frac{n\pi}{2} (1-\mu m)}{nm} \int_{-a}^a \frac{p_0}{|x-\xi|^m} d\xi = \frac{A \sin \frac{n\pi}{2} (1-\mu m)}{nm} p_0 \left[\int_{-a}^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^m} + \int_x^a \frac{d\xi}{(\xi-x)^m} \right]$$

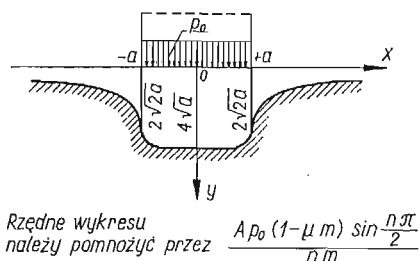
i po obliczeniu całek

$$(3.5) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \frac{p_0}{1-m} [(x+a)^{1-m} + (a-x)^{1-m}], \quad |x| < a.$$

Dla $x > a$ znajdujemy

$$(3.6) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_0 \int_{-a}^a \frac{d\xi}{(x-\xi)^m} = \\ = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \frac{p_0}{1-m} [(x-a)^{1-m} - (x+a)^{1-m}].$$

Dla $m = 1/2$ wykres przemieszczeń przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6

Weźmy teraz pod uwagę $p(\xi) = p_1 \xi^2$. Wtedy

$$\Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \int_{-a}^a \frac{p_1 \xi^2}{|x-\xi|^m} d\xi = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_1 \left[\int_{-a}^x \frac{\xi^2 d\xi}{(x-\xi)^m} + \int_x^a \frac{\xi^2 d\xi}{(\xi-x)^m} \right]$$

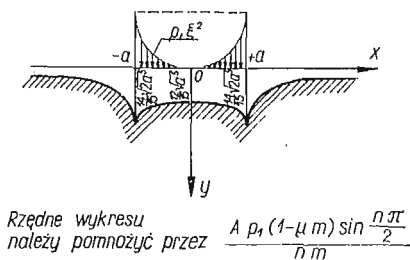
Po obliczeniu całek otrzymujemy

$$(3.7) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_1 \left\{ \frac{a^2}{1-m} [(a+x)^{1-m} + (a-x)^{1-m}] - \right. \\ \left. - \frac{2a}{(1-m)(2-m)} [(a+x)^{2-m} + (a-x)^{2-m}] + \frac{2}{(1-m)(2-m)(3-m)} [(a+x)^{3-m} + \right. \\ \left. + (a-x)^{3-m}] \right\}, \quad |x| < a.$$

Dla $x > a$ mamy

$$(3.8) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_1 \int_{-a}^a \frac{\xi^2}{(x-\xi)^m} d\xi = \\ = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_1 \left\{ \frac{a^2}{1-m} [(a+x)^{1-m} - (x-a)^{1-m}] - \right. \\ \left. - \frac{2a}{(1-m)(2-m)} [(x+a)^{2-m} + (x-a)^{2-m}] + \frac{2}{(1-m)(2-m)(3-m)} [(x+a)^{3-m} - (x-a)^{3-m}] \right\}.$$

Wykres dla $m = 1/2$ zamieszczono na rys. 7.



Rys. 7

Przypuśćmy następnie, że $p(\xi) = p_0 + p_1 \xi^2$. Dodając (3.5) i (3.7) otrzymamy

$$(3.9) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \left\{ \frac{p_0 + p_1 a^2}{1-m} [(a+x)^{1-m} + (a-x)^{1-m}] - \right. \\ \left. - \frac{2ap_1}{(1-m)(2-m)} [(a+x)^{2-m} + (a-x)^{2-m}] + \right. \\ \left. + \frac{2p_1}{(1-m)(2-m)(3-m)} [(a+x)^{3-m} + (a-x)^{3-m}] \right\}, \quad |x| < a.$$

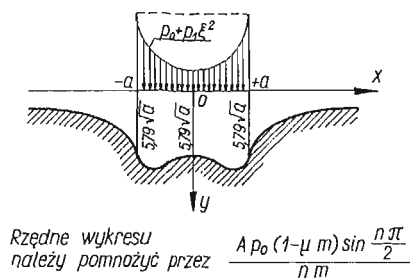
Na przykład dla $m = 1/2$ jest

$$\Delta(x) = \frac{2A \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \sin \frac{n\pi}{2}}{n} \left\{ 2(p_0 + p_1 a^2)(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}) - \frac{8a}{3} p_1 (\sqrt{a+x})^3 + \right. \\ \left. + \sqrt{(a-x)^3} + \frac{16p_1}{15} (\sqrt{a+x})^5 + \sqrt{(a-x)^5} \right\}.$$

Można tak dobrać p_1 , by $\Delta(0) = \Delta(a)$. Otrzymujemy wtedy

$$(3.10) \quad p_1 = \frac{15(1-\sqrt{2})}{(3\sqrt{2}-7)} \frac{p_0}{a^2} \approx 2,22 \frac{p_0}{a^2}.$$

Przy tak dobranej kombinacji naprężeń otrzymujemy przemieszczenia, których wykres przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8

4. Nacisk dwóch stempli

Rozpatrzmy jeszcze zagadnienie dwóch stempli. Równanie całkowe problemu ma teraz postać

$$(4.1) \quad \int_a^b p(\xi) \left[\frac{1}{|x+\xi|^m} + \frac{1}{|x-\xi|^m} \right] d\xi = f(x),$$

gdzie funkcja $f(x)$ określona jest przez (3.3).

Równanie (4.1) można sprowadzić do równania Fredholma II rodzaju. Mamy mianowicie:

$$(4.2) \quad \int_a^b \frac{p(\xi)}{|x+\xi|^m} d\xi + \int_a^b \frac{p(\xi)}{|x-\xi|^m} d\xi = f(x).$$

Jądro pierwszej całki jest regularne. Oznaczmy

$$(4.3) \quad \int_a^b \frac{p(\xi)}{(x+\xi)^m} d\xi = w(x).$$

Równanie (4.2) możemy teraz napisać w postaci

$$(4.4) \quad \int_a^b \frac{p(\xi)}{|x-\xi|^m} d\xi = f(x) - w(x),$$

a traktując formalnie prawą stronę jako znaną możemy zastosować rozwiązanie Saka-liuka

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \frac{\sin m\pi}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{\frac{f(x)-w(x)}{2} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} R(x) \int_a^b \frac{f(t)-w(t)}{R(t)(t-x)} dt}{(\xi-x)^{1-m}} dx = \\ &= \frac{\sin m\pi}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{\frac{f(x)}{2} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} R(x) \int_a^b \frac{f(t)}{R(t)(t-x)} dt}{(\xi-x)^{1-m}} dx - \\ &\quad - \frac{\sin m\pi}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{\frac{w(x)}{2} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} R(x) \int_a^b \frac{w(t)}{R(t)(t-x)} dt}{(\xi-x)^{1-m}} dx \\ R(x) &= [(b-x)(x-a)]^{\frac{1-m}{2}}. \end{aligned}$$

Oznaczmy dalej dla zwięzłości

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{\sin m\pi}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{\frac{f(x)}{2} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} R(x) \int_a^b \frac{f(t)}{R(t)(t-x)} dt}{(\xi-x)^{1-m}} dx, \\ (4.5) \quad J_1(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{w(x)}{2(\xi-x)^{1-m}} dx, \end{aligned}$$

$$J_2(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{\frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} R(x) \int_a^b \frac{w(t)}{R(t)(t-x)} dt}{(\xi-x)^{1-m}}.$$

Zapiszemy wtedy krótko

$$(4.6) \quad p(\xi) = g(\xi) - \frac{\sin m\pi}{\pi} [J_1(\xi) - J_2(\xi)].$$

Funkcja $g(\xi)$ jest znana, wielkości zaś $J_1(\xi)$ i $J_2(\xi)$ zawierające nie znaną funkcję $p(x)$ przekształcimy dalej. Mamy mianowicie

$$J_1(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \int_a^b \frac{p(t)}{(x+t)^m} dt \frac{dx}{2(\xi-x)^{1-m}} = \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \left[\int_a^b \frac{p(t)}{2(x+t)^m(\xi-x)^{1-m}} dt \right] dx,$$

a po zmianie kolejności całkowania

$$J_1(\xi) = \int_a^\xi p(t) dt \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{dx}{2(x+t)^m(\xi-x)^{1-m}}.$$

Oznaczając dalej

$$(4.7) \quad \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{dx}{2(x+t)^m(\xi-x)^{1-m}} = K(\xi, t)$$

otrzymamy ostatecznie

$$(4.8) \quad J_1(\xi) = \int_a^\xi p(t) K(\xi, t) dt.$$

Analogiczne przekształcenia stosujemy do funkcji $J_2(\xi)$

$$\begin{aligned} J_2(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} R(x) \int_a^b \frac{p(s)}{(t+s)^m} ds \frac{dt}{R(t)(t-x)} \frac{dx}{(\xi-x)^{1-m}} = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{R(x)}{(\xi-x)^{1-m}} \int_a^b dt \int_a^b \frac{p(s)}{(t+s)^m R(t)(t-x)} ds dx \end{aligned}$$

i dalej po zmianie kolejności całkowania

$$J_2(\xi) = \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} \int_a^b p(s) ds \int_a^b \frac{dt}{(t+s)^m R(t)} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{R(x)}{(t-x)(\xi-x)^{1-m}} dx.$$

Oznaczając

$$(4.9) \quad \int_a^b \frac{dt}{(t+s)^m R(t)} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{R(x)}{(t-x)(\xi-x)^{1-m}} dx = L(\xi, s)$$

otrzymamy

$$(4.10) \quad J_2(\xi) = \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} \int_a^b p(s) L(\xi, s) ds.$$

Podstawiając (4.8) i (4.10) do (4.6) znajdujemy

$$p(\xi) = g(\xi) - \frac{\sin m\pi}{\pi} \left[\int_a^b p(t)K(\xi, t) dt - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} \int_a^b p(t)L(\xi, t) dt \right]$$

i następnie

$$p(\xi) = g(\xi) - \frac{\sin m\pi}{\pi} \int_a^b p(t) \left[K(\xi, t) - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} L(\xi, t) \right] dt,$$

a oznaczając

$$(4.11) \quad K(\xi, t) - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} L(\xi, t) = M(\xi, t)$$

otrzymamy ostatecznie

$$(4.12) \quad p(\xi) = g(\xi) - \frac{\sin m\pi}{\pi} \int_a^b p(t)M(\xi, t) dt,$$

a więc równanie całkowe Fredholma II rodzaju. Z uwagi na złożoną postać jądra można je rozwiązać tylko numerycznie.

Podobnie jak w przypadku jednego stempla rozpatrzmy jeszcze prosty przykład wyznaczenia kształtu stempla dla danego rozkładu naprężeń. Przypuśćmy, że $p(\xi) = p_0 = \text{const}$. Wtedy z (4.1)

$$\Delta(x) = \frac{A(1-\mu m)\sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_0 \left[\int_a^b \frac{d\xi}{(x+\xi)^m} + \int_a^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^m} + \int_x^b \frac{d\xi}{(\xi-x)^m} \right],$$

a po obliczeniu całek

$$(4.13) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m)\sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \frac{p_0}{1-m} [(x+b)^{1-m} - (x+a)^{1-m} + (b-x)^{1-m} + (x-a)^{1-m}], \quad x \in [a, b].$$

Dla $0 < x < a$

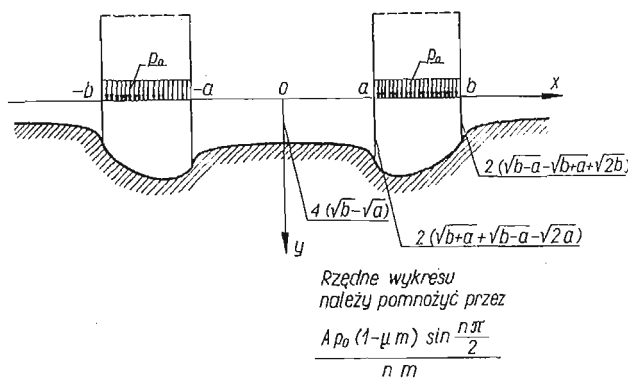
$$(4.14) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m)\sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_0 \left[\int_a^b \frac{d\xi}{(x+\xi)^m} + \int_a^b \frac{d\xi}{(\xi-x)^m} \right] = \\ = \frac{A(1-\mu m)\sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \frac{p_0}{1-m} [(x+b)^{1-m} + (x+a)^{1-m} + (b-x)^{1-m} - (a-x)^{1-m}].$$

Dla $x > b$

$$(4.15) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_0 \left[\int_a^b \frac{d\xi}{(x+\xi)^m} + \int_a^b \frac{d\xi}{(x-\xi)^m} \right] =$$

$$= \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \frac{p_0}{1-m} [(x+b)^{1-m} - (x+a)^{1-m} - (x-b)^{1-m} + (x-a)^{1-m}].$$

Dla $m = 1/2$ wykres przemieszczeń ma postać jak na rys. 9.



Rys. 9

Literatura cytowana w tekście

1. Ф. Д. ГАХОВ, *Краевые задачи*, Ф. М. Москва 1963.
2. K. HRUBAN, *The Basic Problem of a Non-linear Non-homogeneity in Elasticity*, Proceedings of the IUTAM Symposium 1958, Pergamon Press.
3. В. Г. КОРЕНЕВ, *Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности решаемые в Бессельевых функциях*, Ф. М. Москва.
4. С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ, *Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости*, Прикл. Мат. Мех., 2, 20 (1962), 146-151.
5. W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI, *Nichthomogenitäts-Probleme im elastischen und vorplastischen Bereich*, Öst. Ing. Archiv, 15 (1961), 130-152.
6. Н. А. РОСТОВЦЕВ, *К теории упругости неоднородной среды*, Прикл. Мат. Мех., 4, 23 (1964), 601-611.
7. К. Д. САКАЛЮК, *Обобщенное интегральное уравнение Абэля*, Докл. АН СССР, 4, 131 (1960), 748-751.
8. W. SCHMEIDLER, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik*, Leipzig 1955.

Резюме

О НЕКОТОРОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ, УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Дается решение контактной задачи для одного или двух жестких штампов, покоящихся без трения на изотропной, неоднородной упругой полуплоскости. На основе радиального распределения напряжений для сосредоточенной силы, действующей на краю, построена функция Грина

для напряжений и перемещений для неоднородности типа $E(x, y) = E_0 y^m$. Вопрос о контакте штампа сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода со слабо-сингулярным ядром.

Предлагается решение этого уравнения. Кроме того обсуждается несколько примеров обратной задачи, т. е. для по заданному распределению напряжений под штампом определяются перемещения (форма штампа).

Для случая двух штампов показано, что вопрос нажима штампов можно свести к уравнению Фредгольма второго рода.

S u m m a r y

ON A CONTACT PROBLEM FOR NONHOMOGENEOUS ELASTIC HALF-PLANE

A solution to the contact problem for one and two rigid punches lying without friction on the isotropic nonhomogeneous elastic half-plane is presented. Starting from the radial stress distribution for concentrated force applied on the edge, the Green function for stresses and displacements is built in case of nonhomogeneity of the type $E(x, y) = E_0 y^m$. The contact problem for a punch is reduced to the Fredholm integral equation of the first kind with the kernel of weak singularity. The solution of this equation is given. Also, some examples of the inverse problem are investigated, i. e. the determination of the displacements or the shape of the punch when the stresses under the punch are assumed.

It is shown that the problem of the pressure of two punches can be reduced to the Fredholm integral equation of the second kind.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 grudnia 1965 r.
