

UTRATA STATECZNOŚCI ROZCIĄGANYCH POWŁOK PLASTYCZNYCH

ZDZISŁAW MARCINIAK (WARSZAWA)

1. Warunek stateczności

W przypadku jednoosiowego rozciągania prętów i wąskich pasów można wyodrębnić w procesie rozciągania dwie fazy:

1) fazę stateczności, charakteryzującą się równomiernym rozkładem wydłużenia wzdłuż osi próbki;

2) fazę niestateczności, w czasie której następuje koncentracja odkształceń na pewnym obszarze próbki, podczas gdy pozostałe jej części, leżące dostatecznie daleko od miejsca przewężenia, nie tylko nie doznają dalszych odkształceń plastycznych, lecz nawet zostają odciążone.

W celu wyjaśnienia różnicy w zachowaniu się materiału w czasie statecznej i niestatecznej fazy rozciągania założmy, że w dowolnym miejscu rozciąganej próbki nastąpiło nieco większe wydłużenie materiału niż w miejscach sąsiednich. To dodatkowe miejscowe wydłużenie pociąga za sobą odpowiednio większe umocnienie się w tym miejscu materiału, ale jednocześnie zwiększają się tam naprężenia rozciągające, gdyż zmniejszony przekrój poprzeczny przenosić musi tę samą co poprzednio siłę osiową. Jeżeli przyrost naprężenia uplastyczniającego, spowodowany umocnieniem, jest większy od przyrostu naprężenia osiowego, zachodzącego w wyniku zmniejszenia pola przekroju, następuje wyrównanie odkształceń w dalszej fazie procesu, a zatem próbka zachowuje stateczność. W przeciwnym przypadku zapoczątkowana niejednorodność odkształcenia będzie się dalej pogłębiać, co jest oznaką utraty stateczności.

Podobne zjawiska występują w przypadku cienkościennej powłoki plastycznej poddanej rozciąganiu w płaskim stanie naprężenia. W celu zanalizowania warunków stateczności wyodrębnimy w niej prostokątny element, którego krawędzie są skierowane zgodnie z kierunkami głównymi naprężeń. Przyjmijmy, że element ten doznaje odkształcenia proporcjonalnego. W pewnej chwili wydłużenia boków tego elementu wynoszą odpowiednio ε_1 i ε_2 , a więc jego odkształcenie zastępcze jest równe

$$(1.1) \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}.$$

Odpowiada temu określona wartość naprężenia uplastyczniającego, będącego, założmy, znaną dla danego materiału funkcją odkształcenia zastępczego $\sigma_p = \sigma_p(\varepsilon_i)$. Przyjęto, że odkształcenia sprężyste są tu pomijalnie małe.

Na boczne krawędzie rozpatrywanego elementu działają w płaszczyźnie powłoki naprężenia główne σ_1 i σ_2 , wywołane obciążeniem powłoki siłami zewnętrznymi. Naprężenie zastępcze dla płaskiego stanu naprężenia ($\sigma_3 = 0$) wynosi zatem

$$(1.2) \quad \sigma_z = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}.$$

Jeżeli $\sigma_z = \sigma_p$, to następuje plastyczne odkształcenie powłoki, przebiegające zgodnie z prawem płynięcia:

$$(1.3) \quad \frac{\varepsilon_1}{2\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2}{2\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{\varepsilon_3}{-\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_p}.$$

W celu rozstrzygnięcia czy rozpatrywany przez nas element znajduje się w stanie stateczności, czy niestateczności rozważmy możliwość osiągnięcia przez niego nieco innego, lecz również dopuszczalnego kinematycznie stanu odkształcenia, którego nowe składowe różnią się od poprzednich odpowiednio o $\delta\varepsilon_1$ i $\delta\varepsilon_2$. Tego rodzaju wariacje składowych stanu odkształcenia powodują odpowiednią zmianę odkształcenia zastępczego

$$(1.4) \quad \delta\varepsilon_i = \frac{2}{3} \frac{(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\delta\varepsilon_1 + (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\delta\varepsilon_2}{\varepsilon_i}.$$

Zmiana ta pociąga za sobą dalej zmianę naprężenia uplastyczniającego w myśl wzoru

$$(1.5) \quad \delta\sigma_p = \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \delta\varepsilon_i.$$

Uwzględniając związki (1.4) i (1.5) wyrazić można przyrost naprężenia uplastyczniającego przez przyrosty składowych stanu odkształcenia $\delta\varepsilon_1$ i $\delta\varepsilon_2$. Otrzymamy wówczas

$$(1.6) \quad \delta\sigma_p = \frac{2}{3} \frac{(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\delta\varepsilon_1 + (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\delta\varepsilon_2}{\varepsilon_i} \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i}.$$

Jednocześnie omawiane odchylenie od początkowego stanu odkształcenia spowoduje pewne zmiany wymiarów powłoki. Przy niezmiennym jej obciążeniu siłami zewnętrznymi pociągnie to za sobą odpowiednie zmiany naprężeń głównych o wielkości $\delta\sigma_1$ i $\delta\sigma_2$. Odpowiada temu zmiana naprężenia zastępczego

$$(1.7) \quad \delta\sigma_z = \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2)\delta\sigma_1 + (2\sigma_2 - \sigma_1)\delta\sigma_2}{\sigma_p},$$

co wynika z różniczkowania wzoru (1.2).

Jeżeli przyrost naprężenia zastępczego $\delta\sigma_z$, spowodowany założoną zmianą wymiarów powłoki, jest mniejszy od przyrostu naprężenia uplastyczniającego $\delta\sigma_p$, związanego z dodatkowym umocnieniem się materiału, to wówczas powłoka przejdzie w tym miejscu w stan sprężysty, a więc proces plastycznego płynięcia zostanie tu zahamowany. Stateczność powłoki jest zatem zachowana.

W przypadku przeciwnym, gdy $\delta\sigma_z > \delta\sigma_p$, możemy oczekiwać, że założona na wstępie niewielka nawet zmiana stanu odkształcenia zapoczątkuje lawinowy proces dalszego plastycznego płynięcia materiału, co będzie oznaką niestateczności powłoki.

Ostatecznie zatem, korzystając ze związków (1.6) i (1.7), ogólny warunek stateczności powłoki można zapisać w postaci nierówności:

$$(1.8) \quad \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2) \delta\sigma_1 + (2\sigma_2 - \sigma_1) \delta\sigma_2}{2\sigma_p} < \frac{2}{3} \frac{(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta\varepsilon_1 + (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \delta\varepsilon_2}{\varepsilon_i} \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i},$$

będącej uogólnioną formą warunku stateczności podanego przez H. W. SWIFTA [1] (1952).

Aby na podstawie nierówności (1.8) można było wyznaczyć zakres stateczności danego elementu powłoki, należy jeszcze określić jego kinematyczne i statyczne warunki brzegowe oraz sprecyzować zmiany, zachodzące w tych warunkach pod wpływem rozważanych wariacji jego wymiarów.

Te dodatkowe informacje o warunkach, w których przebiega proces plastycznego płynięcia powłoki, wyrażają się w postaci trzech dodatkowych związków zachodzących między przyrostami $\delta\sigma_1$, $\delta\sigma_2$, $\delta\varepsilon_1$ i $\delta\varepsilon_2$ i opisujących rodzaj sprzężenia kinematycznych i statycznych warunków brzegowych. Zależnie od postaci, jaką nadamy tym dodatkowym związkom, otrzymamy różne wzory wyrażające zakres stateczności powłoki. Tym tłumaczy się duża różnorodność wyrażen proponowanych przez różnych autorów dla przedstawienia warunku stateczności powłoki. Najważniejsze z tych propozycji będą teraz kolejno omówione.

1.1. Rozciąganie powłoki niezmienną siłą w kierunku 1 przy zachowaniu stałej wartości stosunku σ_1/σ_2
W celu zanalizowania tego przypadku przyjmujemy następujące założenia co do warunków brzegowych.

1. Naprężenia σ_1 wynikają z działania stałej siły P_1 przenoszonej przez rozpatrywany element powłoki. Dodatkowe wydłużenie tego elementu o wielkości $\delta\varepsilon_1$ powoduje zatem wzrost naprężenia o wielkość

$$(1.9) \quad \delta\sigma_1 = \sigma_1 \cdot \delta\varepsilon_1,$$

co wynika z warunku, by $\delta(F \cdot \sigma_1) = 0$, gdzie F oznacza pole przekroju poprzecznego, prostopadłego do kierunku 1.

2. Obciążenie tego elementu w drugim kierunku głównym 2 zmienia się wraz ze zmianą jego wymiarów w ten sposób, że stosunek naprężeń głównych σ_2/σ_1 pozostaje niezmienny, a zatem

$$(1.10) \quad \frac{\delta\sigma_2}{\delta\sigma_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

3. Stosunek odkształceń głównych nie ulega zmianie w wyniku ewentualnej zmiany wymiarów elementu, co zresztą wiąże się z poprzednim założeniem. Trzeci związek ma więc postać

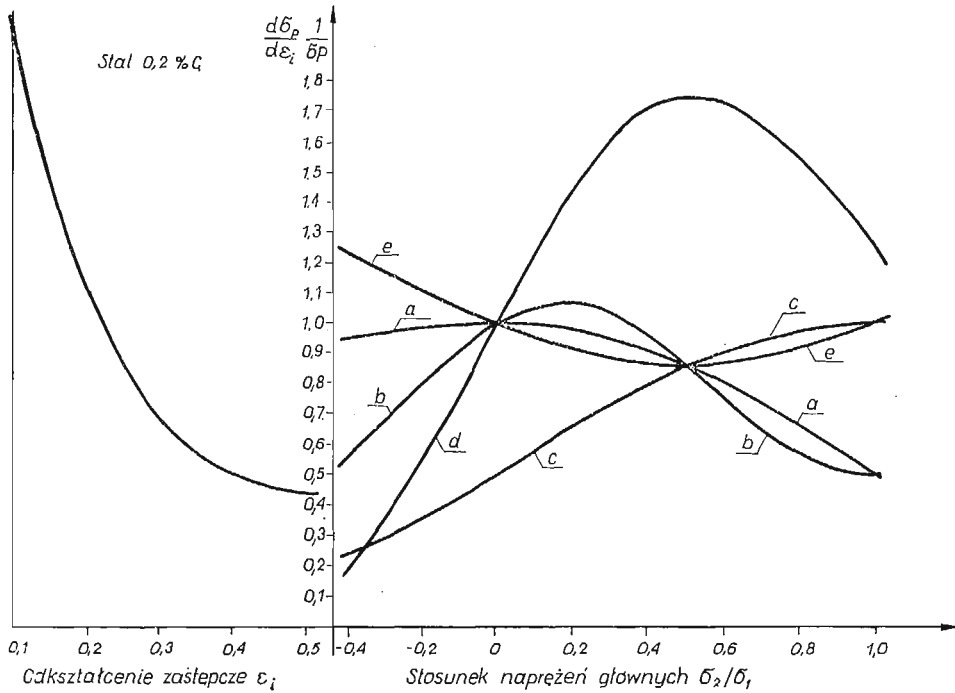
$$(1.11) \quad \frac{\delta\varepsilon_1}{\delta\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

W ten sposób zostały sformułowane trzy dodatkowe zależności (1.9), (1.10) i (1.11), wiążące ze sobą wariacje $\delta\sigma_1$, $\delta\sigma_2$, $\delta\varepsilon_1$ i $\delta\varepsilon_2$. Po podstawieniu tych związków do nierówności (1.8) i dokonaniu niezbędnych przekształceń wykorzystując przy tym prawa płynięcia (1.3) otrzymamy warunek stateczności w postaci

$$(1.12) \quad \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} > \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_p}.$$

Wielkość prawej strony tej nierówności zależy od stosunku σ_2/σ_1 , co przedstawia linia *a* na rys. 1.

Warunek (1.12), któremu odpowiada ekstremum siły rozciągającej P_1 , został podany przez A. D. TOMLENOWA [2] oraz P. B. MELLORA [3].



Rys. 1

1.2. Rozciąganie powłoki przy zachowaniu niezmiennych wartości obu sił przenoszonych przez element powłoki w dwu kierunkach głównych. W tym przypadku dodatkowe związki zachodzące między przyrostami $\delta\sigma_1$, $\delta\sigma_2$, $\delta\varepsilon_1$ i $\delta\varepsilon_2$ wynikają z następujących założeń.

1. Ewentualny przyrost odkształcenia elementu powłoki nie ma wpływu na wielkości sił przenoszonych przez ten element w obu kierunkach głównych. Wynikają stąd dwa równania:

$$(1.13) \quad \delta\sigma_1 = \sigma_1 \delta\varepsilon_1,$$

$$(1.14) \quad \delta\sigma_2 = \sigma_2 \delta\varepsilon_2.$$

2. Rozważany przyrost odkształcenia powłoki zachodzi zgodnie z istniejącym tam dotychczas stanem naprężenia, a więc

$$(1.15) \quad \frac{\delta\varepsilon_1}{\delta\varepsilon_2} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_2 - \sigma_1} \quad \text{lub} \quad \frac{\delta\varepsilon_1}{\delta\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Po uwzględnieniu związków (1.13), (1.14) i (1.15) nierówność (1.8) sprowadzi się do postaci

$$\frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} > \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)(4\sigma_1^2 - 7\sigma_1\sigma_2 + 4\sigma_2^2)}{4\sigma_p^3}$$

zaproponowanej przez H. W. SWIFTA [1] (1952) i przedstawionej linią *b* na rys. 1.

1.3. Rozciąganie elementu powłoki przy zachowaniu niezmiennych wartości sił jednostkowych, działających w obu kierunkach głównych. Przypadek ten różni się od poprzednio omówionego tym, że zakłada się niezmiennosc sił jednostkowych, a więc przypadających na jednostkę długości krawędzi elementu. W tym przypadku zmiana naprężenia wynika jedynie ze zmiany grubości powłoki *g*. Z warunków $\delta(\sigma_1 g) = 0$ i $\delta(\sigma_2 g) = 0$ i warunku niezmiennych objętości

$$\frac{\delta g}{g} = \delta\varepsilon_3 = -\delta\varepsilon_1 - \delta\varepsilon_2$$

wynikają związki

$$(1.17) \quad \delta\sigma_1 = \sigma_1(\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2),$$

$$(1.18) \quad \delta\sigma_2 = \sigma_2(\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2).$$

Uwzględniając te związki oraz zależność (1.15), która nie ulega zmianie, warunek stateczności (1.8) przyjmie postać:

$$(1.19) \quad \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} > \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_p}.$$

Warunek ten, odpowiadający ekstremalnej wartości iloczynu $(\sigma_p g)$ został podany przez autora [5] (1961). Na wykresie 1 przedstawia go linia *c*.

W przykładach 1.1–1.3 rozpatrzono trzy najprostsze przypadki sprzężenia kinematycznych i statycznych warunków brzegowych, prowadzące do stosunkowo prostych wyrażeń na warunek stateczności. Jednakże tego rodzaju najprostsze rodzaje sprzężenia nie odpowiadają na ogół rzeczywistym warunkom, w których przebiegają procesy plastycznego płynięcia. W dalszym ciągu rozpatrzone będą następne dwa przypadki, w których rodzaj sprzężenia warunków brzegowych wynika z analizy rzeczywistych warunków, zachodzących w konkretnym procesie plastycznego płynięcia.

1.4. Stateczność cienkościennej rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia *p* i rozciągającej siły osiowej *P*. W obciążonej w ten sposób rurze, której średnica wynosi *D*, a grubość ścianki *g* panuje naprężenie obwodowe

$$\sigma_1 = \frac{pD}{2g}$$

i osiowe

$$\sigma_2 = \frac{Dp}{4g} + \frac{P}{\pi Dg}.$$

Ewentualna zmiana średnicy o δD lub grubości o δg , zachodząca przy niezmiennych wartości siły *P* i ciśnienia *p*, powoduje odpowiednie zmiany naprężeń

$$\delta\sigma_1 = \frac{pD}{2g} \frac{\delta D}{D} - \frac{pD}{2g} \frac{\delta g}{g}$$

oraz

$$\delta\sigma_2 = \frac{pD}{4g} \left(\frac{\delta D}{D} - \frac{\delta g}{g} \right) - \frac{P}{\pi Dg} \left(\frac{\delta g}{g} + \frac{\delta D}{D} \right).$$

Oznaczając $\delta D/D = \delta\varepsilon_1$ i $\delta g/g = \delta\varepsilon_3$ oraz biorąc pod uwagę warunek stałej objętości $\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_3 = 0$ powyższym związkom nadać można postać

$$(1.20) \quad \delta\sigma_1 = \sigma_1(2\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2),$$

$$(1.21) \quad \delta\sigma_2 = \sigma_1\delta\varepsilon_1 + \sigma_2\delta\varepsilon_2.$$

Trzeci związek wynika z możliwości swobodnego odkształcania się materiału zgodnie z istniejącym tam uprzednio stanem naprężenia, a więc przyjmie postać podaną wzorem (1.15).

Uwzględniając te trzy dodatkowe zależności wyrażone równaniami (1.20), (1.21) i (1.15) w warunkach stateczności (1.8) otrzymamy po przekształceniach

$$(1.22) \quad \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} > \frac{3\sigma_1^2(2\sigma_1 - \sigma_2)}{4\sigma_p^3} + \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_p}.$$

Związek ten podał H. W. SWIFT [1] (1952). Dla zakresu $\sigma_2/\sigma_1 < 1$ przedstawia go linia d na wykresie 1. Odminną propozycję co do sprzężenia warunków brzegowych w tym zagadnieniu przedstawił M. J. HILIER [7].

1.5. Warunek powstawania bruzdy prostopadłej do największego naprężenia. Jak wynika z obserwacji, utrata stateczności blachy poddanej dwuosowemu nierównomiernemu rozciąganiu uwidacznia się powstaniem miejscowego pocienienia w postaci bruzdy biegnącej często prostopadle do kierunku największego naprężenia rozciągającego. Kierunek ten oznaczmy przez 1, a drugi prostopadły do niego kierunek leżący również w płaszczyźnie powłoki — przez 2.

Jeżeli bruzda jest dostatecznie długa w porównaniu z jej szerokością, to proces jej powstawania uwidacznia się miejscowym wzrostem składowej ε_1 odkształcenia, a więc wzrostem wydłużenia materiału w kierunku prostopadłym do bruzdy. Druga składowa odkształcenia ε_2 jest taka sama w bruzdzie, jak i w sąsiadujących z nią częściach powłoki. A zatem dopuszczalne kinematycznie są jedynie wariacje składowych ε_1 i ε_3 . Warunek ten można zapisać w postaci:

$$(1.23) \quad \delta\varepsilon_2 = 0.$$

Drugi związek opisujący sprzężenie warunków brzegowych rozpatrywanego elementu wynika z warunku niezmienności siły przenoszonej przez powłokę w kierunku 1. Warunek $\delta(\sigma_1 g) = 0$ biorąc pod uwagę (1.23) zapisać można w postaci

$$(1.24) \quad \delta\sigma_1 = \sigma_1 \delta\varepsilon_1.$$

Aby przypadkowo zapoczątkowana bruzda nie pogłębiała się dalej, przyrost naprężenia $\delta\sigma_1$, spowodowany miejscowym zmniejszeniem grubości, powinien być proporcjonalny do przyrostu naprężenia uplastyczniającego $\delta\sigma_p$ wywołanego dodatkowym umocnieniem się materiału w tym miejscu. A więc nie powinien powodować zmiany stosunku naprężeń głównych σ_1/σ_2 . Zmiana bowiem tego stosunku pociąga za sobą dalszą zmianę stosunku odkształceń głównych $\delta\varepsilon_1/\delta\varepsilon_2$ i wyzwala lawinowy proces koncentracji odkształceń w bruzdzie. Zatem w zakresie stateczności powłoki podstawowa nierówność (1.8) musi być spełniona

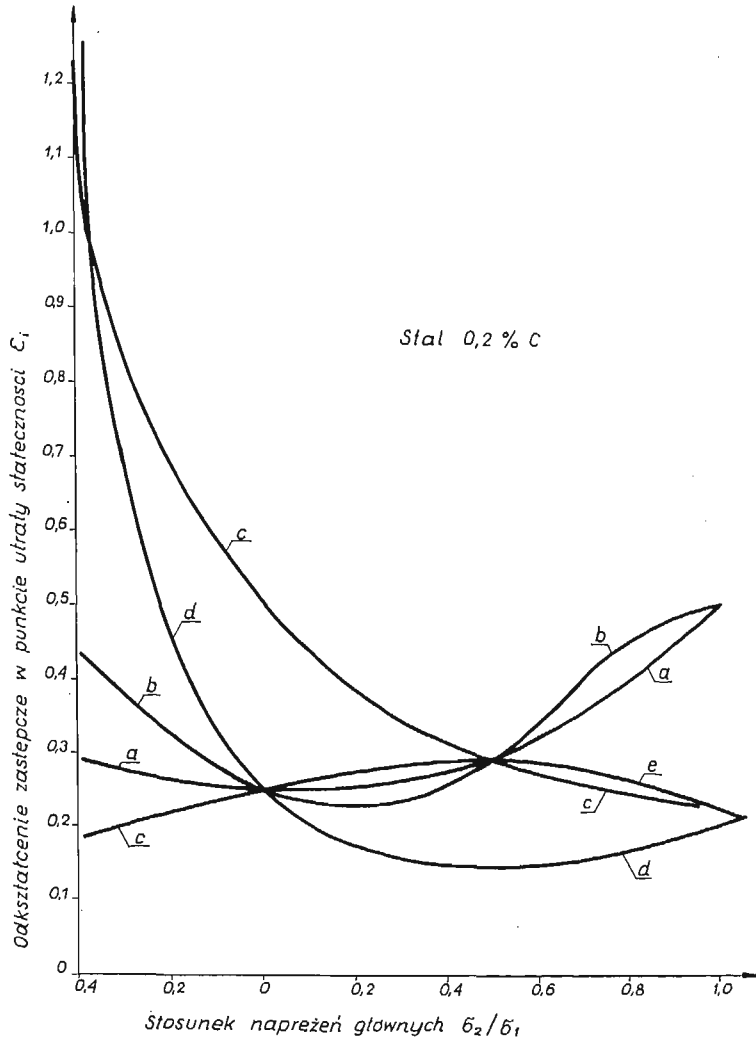
nawet przy założeniu o niezmiennym stosunku naprężeń głównych. Założenie to prowadzi do trzeciego związku

$$(1.25) \quad \frac{\delta\sigma_1}{\delta\sigma_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Po uwzględnieniu warunków (1.24) – (1.26) nierówność (1.8) przyjmie postać

$$(1.26) \quad \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} > \frac{\sigma_p}{\sigma_1}.$$

Zależności tej, podanej przez autora [6] (1965) odpowiada linia *e* na rys. 1.



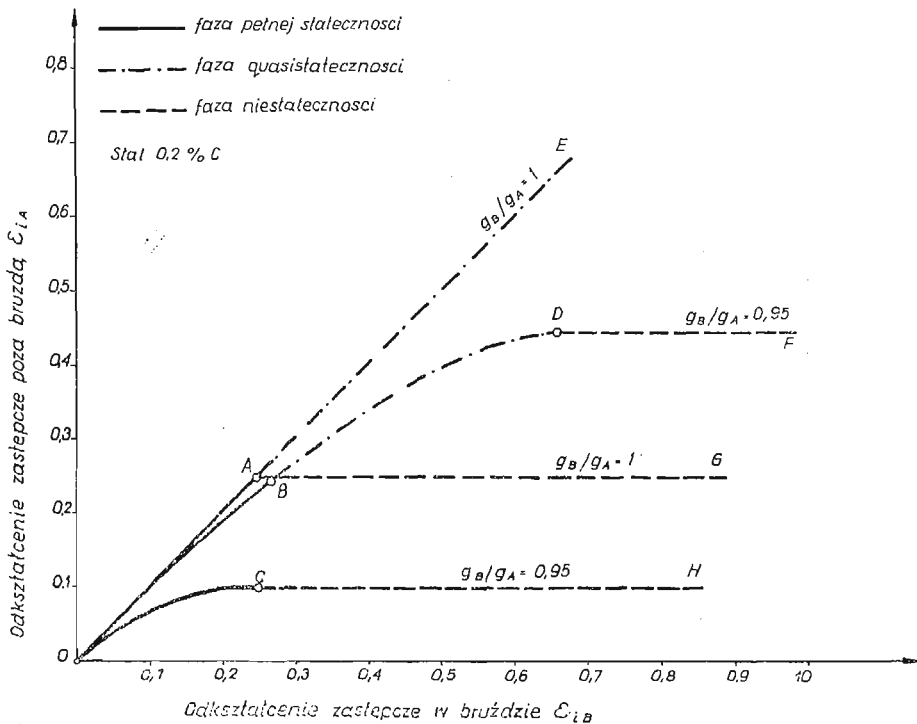
Rys. 2

We wszystkich omówionych dotychczas przypadkach lewa strona warunków stateczności ma postać $(d\sigma_p/d\varepsilon_i) \cdot (1/\sigma_p)$. Wartość tego wyrażenia jest dla danego materiału jednoznaczna funkcją odkształcenia zastępczego ε_i . Związek ten, zachodzący na przykład

dla miękkiej stali, przedstawia wykres zamieszczony po lewej stronie rys. 1. Porównując dla danego stosunku σ_2/σ_1 rzędną odpowiedniej linii wykresu umieszczonego po prawej stronie rys. 1 z wartością wyrażenia $(d\sigma_p/d\varepsilon_i) \cdot (1/\sigma_p)$ po lewej stronie tego rysunku wyznaczyć można wielkość odkształcenia ε_i w punkcie utraty stateczności. Odkształcenie to, którego nie można przekroczyć bez utraty stateczności powłoki, jest funkcją stosunku σ_2/σ_1 , przy czym postać tej funkcji zależy od rodzaju warunków brzegowych, co uwiadczenia rys. 2. Linie *a, b, c, d, e* odpowiadają omówionym uprzednio warunkom brzegowym. Rysunek 2 odnosi się do miękkiej stali, której własności plastyczne podane były na rys. 1.

2. Przebieg odkształcenia po utracie stateczności

Z chwilą przekroczenia zakresu stateczności powłoki powstaje w niej pewien ograniczony obszar, w którym koncentruje się dalszy przyrost jej odkształcenia, podczas gdy na pozostałych obszarach proces odkształcenia plastycznego najczęściej ustaje. Jeżeli przez ε_{iB} oznaczymy odkształcenie zastępcze w miejscu największej koncentracji odkształceń,



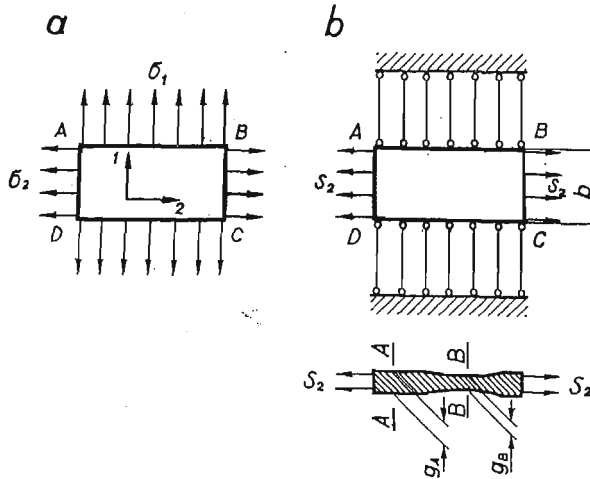
Rys. 3

a przez ε_{iA} — odkształcenie, jakie w tej samej chwili występuje na pozostałym obszarze powłoki, a więc w miejscach leżących poza zasięgiem miejscowego przewężenia, to tego rodzaju przebieg procesu utraty stateczności przedstawia linia łamana *OAG*, pokazana na wykresie we współrzędnych ε_{iA} , ε_{iB} (rys. 3). Punkt załamania *A* jest punktem utraty stateczności, a jego rzędna ε_{iA} stanowi kres możliwości odkształcenia całej powłoki.

Tego rodzaju przebieg odkształcenia zachodzi na przykład przy jednoosiowym rozciąganiu prętów lub wąskich taśm oraz przy rozciąganiu pasów w warunkach zapewniających niezmienną ich szerokość.

W pewnych jednak warunkach obserwuje się odmienny przebieg procesu utraty stateczności. Mianowicie plastyczne płynięcie powłoki poza miejscem przewężenia nie ustaje nagle jak w omówionym poprzednio przypadku, ale trwa przez jakiś czas dalej równoległe z procesem pogłębiania się niejednorodności odkształceń jak to na przykład przedstawia linia $OBDF$ na rys. 3. Zjawisko takie zachodzi właśnie w przypadku tworzenia się bruzdy, omówionym uprzednio w p. 1.5.

Aby zanalizować dalszy przebieg odkształcenia po przekroczeniu punktu stateczności, rozważmy prostokątny element powłoki $ABCD$ (rys. 4), którego krawędzie są zgodne z kierunkami głównymi 1 i 2. Rozpatrzony zostanie przypadek, gdy bruzda jest prostopadła do kierunku 1. Założymy, że proces tworzenia się bruzdy został już rozpoczęty



Rys. 4

i w rozpatrywanej chwili grubość powłoki nie jest jednakowa; w przekroju $A-A$ wynosi ona g_A , natomiast w przekroju $B-B$, biegnącym wzdłuż osi bruzdy, grubość jest mniejsza i wynosi g_B . Warunki brzegowe wzdłuż dwu przeciwległych krawędzi AB i CD są tego rodzaju, że pozwalają na swobodne przemieszczanie się punktów powłoki w kierunku 1 przy zachowaniu równoległości boków AB i CD , których odległość b zmienia się w procesie odkształcenia. Z warunku tego wynika, że przyrosty składowej odkształcenia ε_2 są sobie równe w obu rozpatrywanych przekrojach, a zatem

$$(2.1) \quad \frac{db}{b} = d\varepsilon_{2A} = d\varepsilon_{2B} = d\varepsilon_2.$$

Wzdłuż dwu pozostałych boków rozpatrywanego elementu powłoki dane są statyczne warunki brzegowe w postaci jednostkowych sił S_1 przyłożonych do dwu pozostałych krawędzi AD i BC . Ponieważ oba rozpatrywane przekroje $A-A$ i $B-B$ przenoszą tę samą

się S_1 , przeto panujące w tych przekrojach naprężenia σ_{1A} i σ_{1B} muszą spełniać związek $\sigma_{1A}g_A = \sigma_{1B}g_B$, któremu po wprowadzeniu oznaczenia

$$(2.2) \quad u = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_{1B}}{\sigma_{pB}}$$

nadać można postać

$$(2.3) \quad \sigma_{1A}g_A = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{pB} u g_B.$$

Naprężenia istniejące w obu rozpatrywanych przekrojach muszą ponadto spełniać warunki plastyczności:

$$(2.4) \quad \sigma_{pA}^2 = \sigma_{1A}^2 - \sigma_{1A}\sigma_{2A} + \sigma_{2A}^2,$$

$$(2.5) \quad \sigma_{pB}^2 = \sigma_{1B}^2 - \sigma_{1B}\sigma_{2B} + \sigma_{2B}^2.$$

Założymy, że wartość naprężenia uplastyczniającego w obu przekrojach σ_{pA} i σ_{pB} zależy od istniejącego tam odkształcenia zastępczego ε_{iA} oraz ε_{iB} w myśl związku

$$(2.6) \quad \sigma_p = C\varepsilon_i^m \quad \text{lub} \quad \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} = \frac{m}{\varepsilon_i}.$$

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku, w którym sprzężenie statycznych i kinematycznych warunków brzegowych jest tego rodzaju, że stosunek naprężeń głównych w przekroju $A-A$, a więc w miejscach leżących poza bruzdą, nie ulega zmianie

$$(2.7) \quad \frac{d\sigma_{1A}}{\sigma_{1A}} = \frac{d\sigma_{2A}}{\sigma_{2A}} = \frac{d\sigma_{pA}}{\sigma_{pA}}.$$

W przekroju $A-A$ zachodzi zatem odkształcenie proporcjonalne, a przeto stosunek n odkształceń głównych $\varepsilon_{3A}/\varepsilon_2$ jest tam stały

$$(2.8) \quad n = \frac{\varepsilon_{3A}}{\varepsilon_2} = \frac{d\varepsilon_{3A}}{d\varepsilon_2}.$$

Natomiast w przekroju $B-B$ stosunek odkształceń głównych zmienia się w czasie procesu zgodnie z prawem płynięcia,

$$(2.9) \quad \frac{d\varepsilon_{3B}}{d\varepsilon_2} = \frac{-\sigma_{1B} - \sigma_{2B}}{2\sigma_{2B} - \sigma_{1B}},$$

które, po uwzględnieniu związku (2.5) i oznaczenia (2.2), napisać można w postaci

$$(2.10) \quad \frac{d\varepsilon_{3B}}{d\varepsilon_2} = -\frac{\sqrt{3}u}{2\sqrt{1-u^2}} \mp \frac{1}{2}.$$

Po zróżniczkowaniu związku (2.3) i podzieleniu stronami otrzymanego wyniku przez to samo równanie (2.3) otrzymamy

$$(2.11) \quad \frac{d\sigma_{1A}}{\sigma_{1A}} + d\varepsilon_{3A} = \frac{d\sigma_{1B}}{\sigma_{1B}} + d\varepsilon_{3B} + \frac{du}{u},$$

przy czym

$$d\varepsilon_{3A} = \frac{dg_A}{g_A} \quad \text{i} \quad d\varepsilon_{3B} = \frac{dg_B}{g_B}.$$

Równanie (2.11) po uwzględnieniu związku (2.7) napisać można również w postaci

$$\frac{du}{u} = \left[\left(\frac{d\sigma_{pA}}{d\varepsilon_{iA}} \cdot \frac{1}{\sigma_{pA}} \right) \frac{d\varepsilon_{iA}}{d\varepsilon_2} - \left(\frac{d\sigma_{pB}}{d\varepsilon_{iB}} \cdot \frac{1}{\sigma_{pB}} \right) \frac{d\varepsilon_{iB}}{d\varepsilon_2} + \frac{d\varepsilon_{3A}}{d\varepsilon_2} + \frac{d\varepsilon_{3B}}{d\varepsilon_2} \right] d\varepsilon_2.$$

Uwzględniając zależności (1.1), (2.2), (2.5), (2.6), (2.8) i (2.10) równaniu powyższemu można nadać jeszcze inną postać

$$(2.12) \quad \frac{du}{u} = \left(\frac{m}{\varepsilon_{iA}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+u+u^2} - \frac{m}{\varepsilon_{iB}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{\sqrt{3}u}{2\sqrt{1-u^2}} + n + \frac{1}{2} \right) d\varepsilon_2,$$

przy czym wchodzące do tego wzoru wartości ε_{iA} oraz ε_{iB} związane są dodatkowymi równaniami

$$(2.13) \quad \varepsilon_{iA} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+n+n^2\varepsilon_2},$$

$$(2.14) \quad \varepsilon_{iB} = \int \frac{d\varepsilon_2}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Równania (2.12)–(2.14) stanowią układ, którego rozwiązanie pozwala wyznaczyć szukane funkcje $\varepsilon_{iB} = \varepsilon_{iB}(\varepsilon_2)$ oraz $u = u(\varepsilon_2)$, opisujące przebieg procesu tworzenia się bruzdy. Można więc tą drogą wyznaczyć również związek zachodzący między odkształceniami ε_{iB} oraz ε_{iA} .

Wyniki uzyskane przez przybliżone rozwiązanie tego układu metodą różnic skończonych przedstawia linia *OBDF* na rys. 3. Linia ta odnosi się do przypadku, gdy poza bruzdą występuje stan jednoosiowego rozciągania naprężenia σ_1 . Jak widać z rys. 3 w procesie plastycznego płynięcia powłoki wyodrębnić można trzy fazy.

1. Fazę pełnej stateczności (odcinek *OB*), w czasie której w bruzdzie spełniony jest warunek stateczności (1.26).

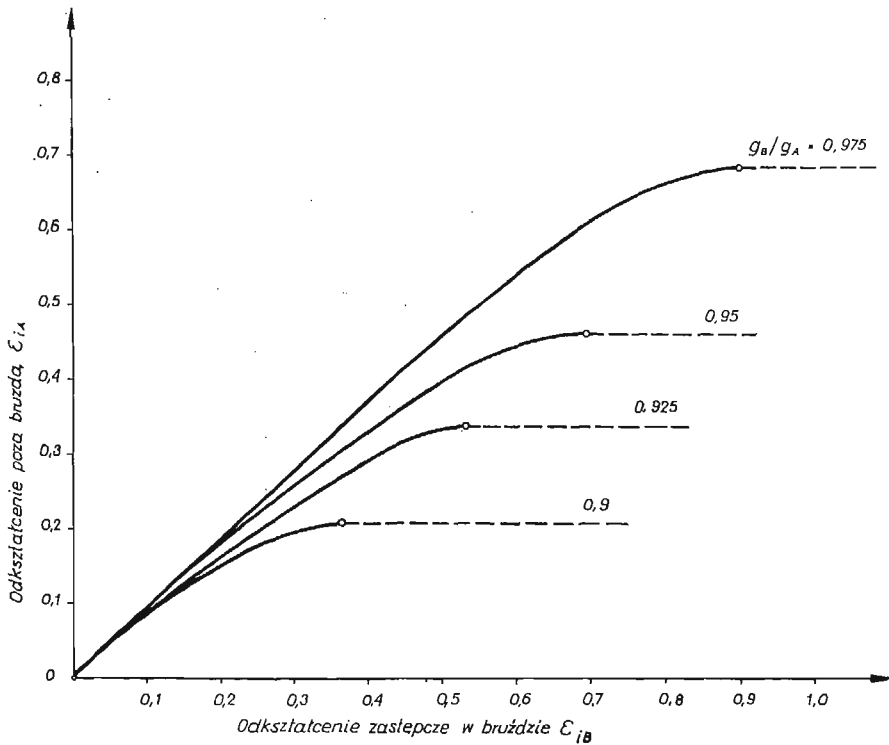
2. Fazę quasi-stateczności odpowiadającą odcinkowi *BD* na rys. 3. W tej fazie zachodzi jednoczesne plastyczne płynięcie powłoki zarówno w samej bruzdzie jak i poza nią, z tym że niejednorodność odkształceń szybko się pogłębia.

3. Fazę niestateczności, której na wykresie 3 odpowiada prosty odcinek *DF* równoległy do osi ε_{iB} . W tej fazie odkształcenie koncentruje się wyłącznie w bruzdzie, podczas gdy pozostałe części powłoki ulegają odciążeniu.

W wyniku istnienia quasi-statecznej fazy procesu największe odkształcenie, jakiego doznać może cała powłoka (poza bruzdą), przekracza, i to często bardzo znacznie, wartość odpowiadającą punktowi *B* wyznaczającemu zakres pełnej stateczności powłoki.

Wartość tego dodatkowego odkształcenia, zachodzącego w quasi-statecznej fazie procesu zależy od dwu czynników: wstępnej niejednorodności powłoki oraz sposobu obciążenia powłoki (stosunku naprężeń głównych).

Należy tu zauważyć, że w celu otrzymania z równań (2.12)–(2.14) skończonej wartości odkształcenia ε_{iA} trzeba, przy wyznaczaniu stałych całkowania, założyć pewną wstępną niejednorodność powłoki, a więc przyjąć pewną, mniejszą od jedności, początkową wartość stosunku g_B/g_A . W rzeczywistości niejednorodność ta może być spowodowana różnymi czynnikami, np. pasmowym rozkładem zanieczyszczeń, miejscowym obniżeniem granicy plastyczności, zadrapaniem powierzchni blachy itd. W każdym jednak przypadku można ją sprowadzić do niejednorodności geometrycznej, wyrażającej się początkowym stosunkiem grubości g_B/g_A . Linia *OBDF* na rys. 3 odnosi się do powłoki o wstępnej niejednorodności $g_B/g_A = 0,95$. Linia *OCH* przedstawia dla porównania przebieg odkształcenia wąskiego pasma o tej samej niejednorodności początkowej $g_B/g_A = 0,95$, zachodzącego w warunkach umożliwiających miejscowe zmniejszanie się jego szerokości.

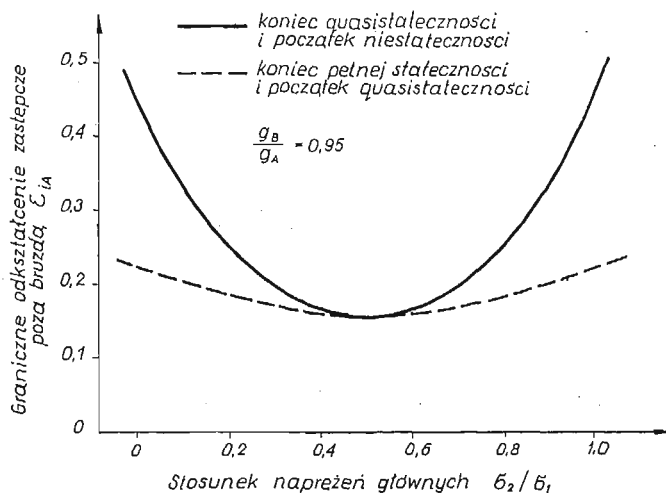


Rys. 5

Wpływ wstępnej niejednorodności jest bardzo znaczny. Widać to z rys. 5, na którym poszczególne krzywe odpowiadają różnym wartościom wstępnej niejednorodności.

Drugim czynnikiem, wpływającym na przebieg quasi-statecznej fazy procesu, a więc i na wielkość granicznego odkształcenia powłoki poza bruzdą ε_{iA} , jest sposób obciążenia powłoki, wyrażający się stosunkiem σ_{2A}/σ_{1B} . Zależność ta jest przedstawiona na rys. 6, przy czym linia przerywana oznacza przejście ze stateczności do quasi-stateczności, a linia ciągła oznacza osiągnięcie stanu pełnej niestateczności. Jak widać z tego wykresu, najbardziej niekorzystne jest rozciąganie powłoki przy zachowaniu niezmiennego szerokości

odkształcanego pasma, a więc gdy $\sigma_2/\sigma_1 = 1/2$. Wówczas to bowiem zanika przejściowa, quasi-stateczna faza procesu, a graniczne odkształcenie powłoki osiąga minimum. Warto również zauważyć, że w przypadku dwuosowego równomiernego rozciągania ($\sigma_1 = \sigma_2$) graniczna wartość odkształcenia jest taka sama jak przy jednoosiowym jej rozciąganiu ($\sigma_2 = 0$).



Rys. 6

Literatura cytowana w tekście

1. H. W. SWIFT, *Plastic instability under plane stress*, J. Mech. Phys. Solids, 1, 1952.
2. А. Д. ТОМЛЕНОВ, *Пластическое напряженное состояние и устойчивость процесса вытяжки деталей сложной формы*, Вопросы обработки металлов давлением, Изд. АН СССР, Москва 1958.
3. P. B. MELLOR, *Plastic instability in tension*, The Engineer, 25, 1960.
4. Z. MARCINIAK, *Analiza stateczności cienkościennej powłoki walcowej poddanej rozciąganiu w stanie plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 4, 6 (1958).
5. Z. MARCINIAK, *Mechanika procesów tłoczenia blach*, P.W.N.T., Warszawa 1961.
6. Z. MARCINIAK, *Stability of plastic shells under tension with kinematic boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., 4, 17 (1965).
7. M. J. HILLIER, *Tensile plastic instability of thin tubes*, Intern. J. Mech. Sci., 8, 7 (1965).

Резюме

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

В работе дается формулировка общего направления устойчивости тонкостенной пластической оболочки, подверженной растяжению, в плоском напряженном состоянии. Рассматривается ряд особых случаев сопряжения кинематических и статических краевых условий и указывается зависимость между условиями, в которых происходит процесс пластического течения и точкой потери устойчивости. Во второй части работы анализируется процесс образования

борозды на поверхности, растягиваемого листового железа после выхода из области устойчивости. Доказывается также, что при некоторых краевых условиях имеет место промежуточная, так наз. квазиустойчивая фаза процесса, во время которой происходит дальнейшая деформация оболочки вне борозды, не смотря на превышение точки устойчивости.

S u m m a r y

THE LOSS OF STABILITY OF PLASTIC SHELLS UNDER TENSILE LOADING

General condition of stability of a thin-walled plastic shell, loaded by tension in plane stress conditions is formulated. A number of particular cases of coupling of kinematic and static boundary conditions is considered. Moreover, a relation between conditions of plastic flow involved and the point of loss of stability is derived.

In the second part of the paper the formation process of a neck beyond of the stability range is analysed. It is shown, moreover, that in certain boundary conditions, an additional, intermediate, so-called quasi-stable stage occurs, connected with plastic deformation of the shell outside the neck in spite of the stability point being exceeded.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 listopada 1965 r.