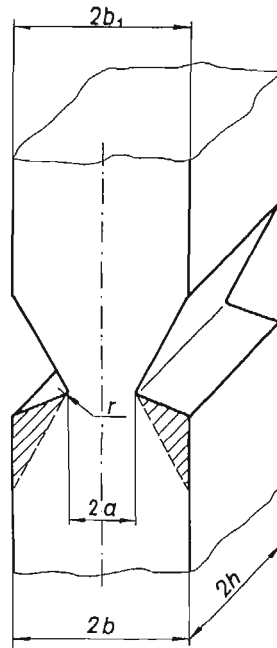


TEORETYCZNA I DOŚWIADCZALNA ANALIZA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ ROZCIĄGANEGO
PRĘTA Z WYCIĘCIAMI O NIESYMETRYCZNIE NACHYLONYCH KRAWĘDZIACH

LECH DIETRICH (WARSZAWA)

1. Wstęp

Analiza naprężeń i odkształceń rozciąganych płaskich prętów z karbem może być przeprowadzona przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia, o ile grubość pręta $2h$ (rys. 1) jest wystarczająca. W. ŻUKOWSKI [1] wykazał, że dla pręta z ostrym karbem kątowym przy stosunku $h/a > 4$ zarówno wielkość siły zrywającej, odniesionej do jednostki powierzchni, jak i wartość naprężeń umownej granicy plastyczności praktycznie nie ulega



Rys. 1

zmianie. W pracy [2] badano pręty z karbem o zaokrąglonych narożach i stwierdzono, że dla stosunku $h/a > 2$ praktycznie realizuje się płaski stan odkształcenia. Wystarczająca wartość stosunku $h/a = 3$ wynika z badań przeprowadzonych w pracy [3], w której zajmowano się prętami z karbem ostrym i o zaokrąglonych narożach. Autorzy zaznaczają jednak, że jeszcze dla $h/a = 6,67$ istnieje wpływ grubości $2h$ pręta.

Przy założeniu materiału idealnie plastycznego odkształcenia dla głębokiego karbu są zlokalizowane w najwęższym przekroju, a ich zakres jest określony polem linii poślizgu.

W niniejszej pracy analizowane są duże odkształcenia, które uzasadniają przyjęcie modelu ciała sztywno-plastycznego. Teoretycznie pręt ulegnie zniszczeniu, gdy jego szerokość w najwyższym miejscu zmaleje do zera ($a \rightarrow 0$).

Jeśli w warunku plastyczności przyjmujemy rzeczywistą granicę plastyczności σ_{p1} dla danego materiału, to nośność graniczną dla pręta z karbem będzie określała siła P_{p1} , której przekroczenie spowoduje powstanie dużych odkształceń. Ze względu na wzmocnienie materiału pręt taki będzie jeszcze mógł przenosić wzrastające siły aż do osiągnięcia P_{max} . Dalsze rozciąganie spowoduje szybko zniszczenie pręta. Nośność graniczną odniesioną do siły P_{max} można określić przez podstawienie do warunku plastyczności naprężeń odpowiadających wytrzymałości na zerwanie R_p .

Mając określone kinematycznie dopuszczalne pole prędkości można analizować odkształcenia powstałe w karbie podczas rozciągania. Zagadnieniem tym dla pręta z symetrycznym półokrągłym głębokim wycięciem zajmował się A. J. WANG [8]. Parametry geometryczne były tak dobrane, że siatka linii poślizgu składała się wyłącznie ze spirali logarytmicznych. Rozwiązanie dla naprężeń i prędkości wykonano analitycznie metodą Riemanna. Aproksymując to rozwiązanie określono kształt brzegu podczas całego procesu odkształcenia. Jak podaje autor, błędy powstałe wskutek przyjęcia upraszczających założeń mieszczą się w granicach błędu stosowanej konstrukcji graficznej.

Podobnie rozważania dla pręta z prostokątnym głębokim wycięciem przeprowadził E. H. LEE [9]. Po zbudowaniu pola linii poślizgu podzielił on cały czas procesu odkształcenia na szereg przyrostów Δt i dla każdego czasu określił kształt brzegu. W pracy [10] ten sam autor badał odkształcanie brzegu i kwadratowej siatki dla pręta osłabionego symetrycznym wycięciem kątowym. Ze względu na ostre zakończenie karbu następuje rozdzielanie materiału na dwie części. Odkształcenie kwadratowej siatki dla półokrągłego karbu badano w pracy [11]. Mając prędkości w każdym punkcie siatki określano jej przemieszczenia dla odpowiednio małego przyrostu czasu Δt .

Analiza procesu odkształcenia przy założeniu, że uplastycznienie następuje w całym najwęższym przekroju, jest możliwa, gdy stosunek b/a jest większy lub równy pewnej liczbie stałej dla danego typu karbu.

Podstawową teorią rozwiązywania zadań w płaskim stanie odkształcenia jest wyczerpująco podana w pracy [4]. Tu zostaną podane tylko związki, które muszą być spełnione wzdłuż charakterystyk, oraz niektóre ogólne uwagi dotyczące rozwiązania.

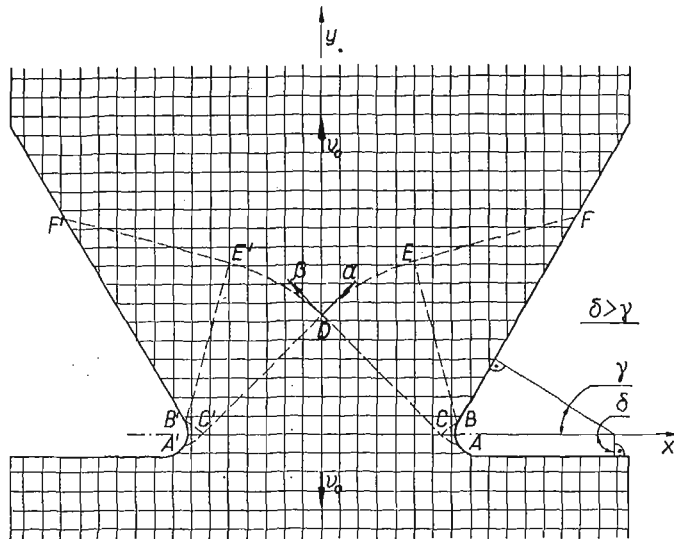
2. Rozwiązanie dla naprężeń i prędkości

W zagadnieniach płaskiego stanu odkształcenia mamy pięć niewiadomych, mianowicie trzy składowe naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ oraz dwie składowe wektora prędkości płynięcia v_x, v_y . Równania można rozwiązywać niezależnie dla naprężeń i prędkości, o ile warunki brzegowe są dane w naprężeniach. Przez podstawienie w znany sposób wartości λ i v zamiast naprężeń otrzymujemy układ równań typu hiperbolicznego, który rozwiązujemy metodą charakterystyk. Związki wzdłuż charakterystyk są następujące:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} v, \quad \lambda - v = \text{const wzdłuż } \alpha,$$

$$\frac{\tau_y}{dx} = -\operatorname{ctg} v, \quad \lambda + v = \text{const wzdłuż } \beta.$$

Wykorzystując własności siatek Hencky'ego-Prandtla można wykreślić i zbudować pole linii poślizgu. Dla niesymetrycznego zaokrąglonego wycięcia pole to jest przedstawione na rys. 2.



Rys. 2

Dla karbów z zaokrąglonym dnem rozwiązanie w postaci zamkniętej zostało podane przez R. HILLA [4]. Naprężenia osiowe wzdłuż najwęższego przekroju wynoszą:

$$\sigma_y = 2k \left\{ 1 + \ln \left[1 + \frac{a}{r} (e^\gamma - 1) \right] \right\}.$$

Graniczną siłę P można obliczyć przez całkowanie wartości σ_y na obszarze całego przekroju. Wzór na współczynnik zwiększenia nośności granicznej w stosunku do pręta bez karbu o wymiarach przekroju $2a \times 2h$ ma postać:

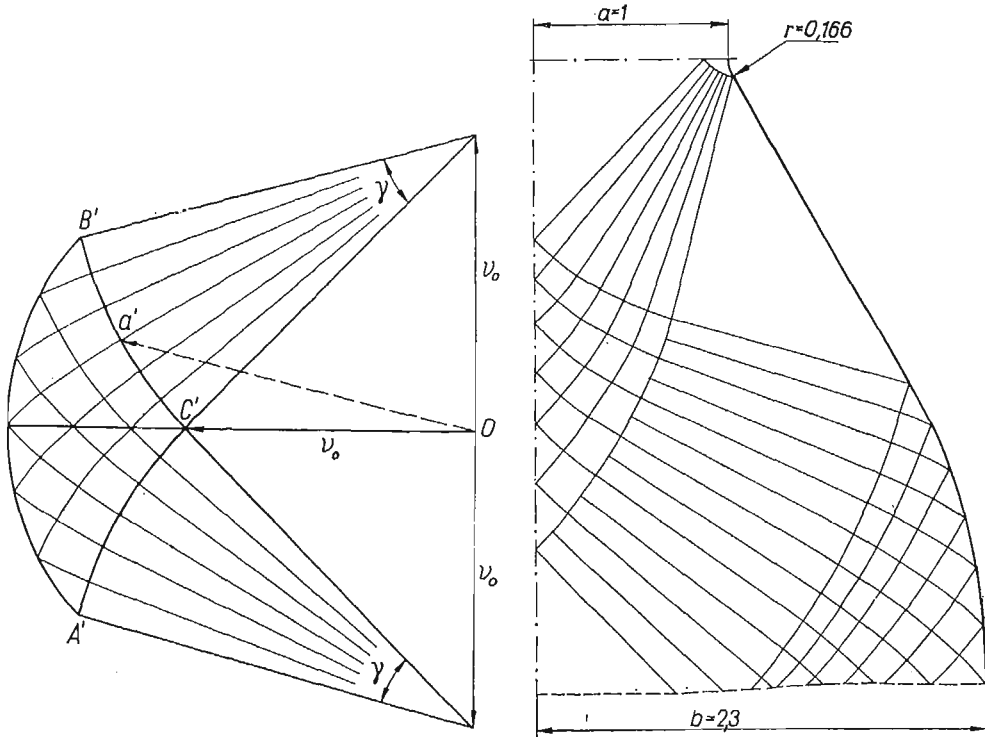
$$(2.1) \quad f_{\text{teor}} = (1 + \gamma) - \frac{r}{a} (e^\gamma - 1 - \gamma).$$

Pole prędkości dla karbu niesymetrycznego jest określone jednoznacznie (rys. 2). Zewnętrzne linie poślizgu $ACDE'F'$ i $A'C'DEF$ są liniami nieciągłości prędkości. Jeśli sztywne części poruszają się z prędkością v_0 , to wzdłuż zewnętrznych linii można wyznaczyć składową normalną prędkości. Pozwala to na określenie prędkości w całym uplastycznym obszarze. Oczywiście wzdłuż charakterystyk muszą być spełnione równania Geiringer.

Rozkład prędkości w polu linii poślizgu można wyznaczyć również w prosty sposób wykreślony przez zbudowanie hodografu [6]. Na rysunku 3 przedstawiony jest plan prędkości dla pola ograniczonego punktami $ACDEF$. Trójkąt BEF porusza się jako ciało sztywne z prędkością odwzorowaną przez wektor OB' (rys. 3). Prędkości punktów należących do obszaru $BCDE$ są określone wektorami, których końce leżą na łuku $C'B'$. Na-

tomiał łuk $A'B'$ odpowiada zaokrąglonej części brzegu AB . Podczas całego procesu odkształcania hodograf jest ten sam.

Szerokość $2b$ części chwytowej musi być tak dobrana, aby nie został przekroczony warunek plastyczności w żadnym miejscu poza obszarem plastycznym. Dostateczną



Rys. 3

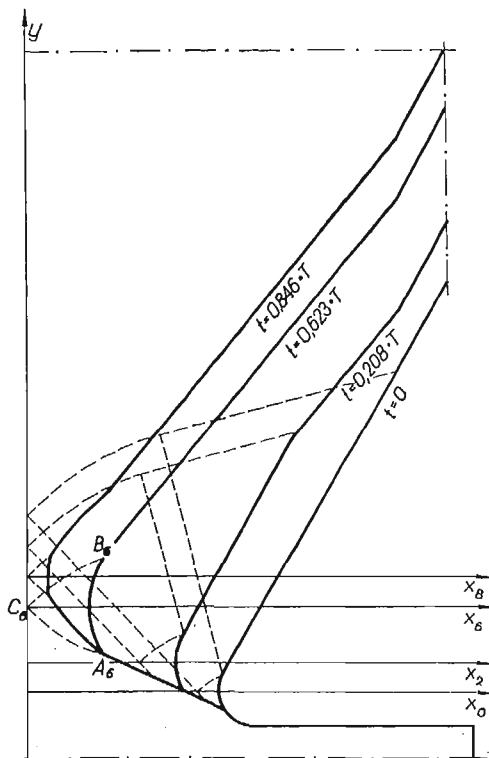
Rys. 4

zserokość $2b$ możemy uzyskać budując przedłużenie siatki linii poślizgu w obszar sztywny (rys. 4). Dla wycięcia o kącie $\gamma = \pi/6$ i wymiarach: $a = 1$, $r = 0,166$ teoretyczny stosunek będzie równy $b/a = 2,3$. Przedłużenie w obszar sztywny zostało wykonane dla pręta o takim samym kształcie wycięcia, jaki miały pręty użyte w doświadczeniu.

3. Proces odkształcenia

Dla teoretycznego określenia odkształceń naniesiono na pręt kwadratową siatkę. Cały czas procesu podzielony został na dziewięć etapów. Analizę odkształceń utrudnia fakt, że wraz z każdą zmianą położenia danego punktu zmienia się jego prędkość. Przyjmując odpowiednio małe przyrosty czasu możemy założyć, że prędkość punktu jest stała w czasie Δt . Dla każdego etapu za prędkość cząsteczki przyjmowano jej prędkość w chwili początkowej. Kołowa część brzegu była aproksymowana jako łuk koła w każdym etapie odkształcenia. Zmienia się zarówno promień tego koła jak i położenie jego środka na osi x . W pracy [8], w której analizowano odkształcenia prętów z karbem symetrycznym, wykazano, że przybliżenie takie dobrze odpowiada rozwiązaniu ścisłemu.

Na rysunku 5 pokazano kształt brzegu w drugim, szóstym i ósmym etapie. Rysunek ten został wykonany przy przyjęciu prędkości dolnej części pręta za zerową. Górna część pręta przesuwała się z prędkością $v = 2v_0$. Cały czas trwania procesu odkształcania aż do uzyskania szerokości $2a = 0$ został oznaczony przez T . Promień zaokrąglenia dna



Rys. 5

karbu powiększa się w miarę postępowania procesu i wzrasta obszar linii poślizgu utworzony przez spirale logarytmiczne. Prostoliniowa część brzegu BF zmniejsza się i przesuwa równolegle. Po czasie $t = 0,623 \cdot T$ obszar uplastyczniony zmniejsza się do trójkąta krzywoliniowego $A_6B_6C_6$. Dalsze prowadzenie procesu powoduje symetryczne odkształcenia względem chwilowej osi x .

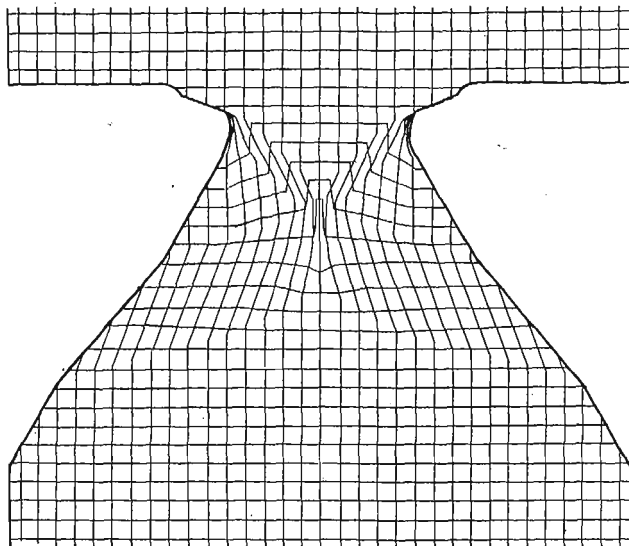
Na rysunkach 6, 7, 8 i 9 pokazano poszczególne etapy odkształcenia kwadratowej siatki. Prędkość górnej i dolnej części pręta wynosiła $v_0 = 1$. Łatwo zauważyć, że materiał w górnej części pręta, który doznał silnych odkształceń, zostaje odciążony i przesuwa się jako ciało sztywne. Natomiast w dolnej części pręta każdy następny obszar plastyczny obejmuje swoim zasięgiem jeszcze nieodkształcony materiał. Jak wynika z rys. 8 i 9 największe odkształcenia występują w pobliżu dna karbu.

Pręt wykonany z rzeczywistego materiału ulegnie zniszczeniu wcześniej, niż to przewiduje teoria ciała idealnie plastycznego. Jednak kształt utworzonej w procesie odkształcania krawędzi dolnej części pręta powinien mieć podobny charakter jak na rys. 9. Obserwacja złomów pozwala sprawdzić słuszność przyjętego pola prędkości.

[46]

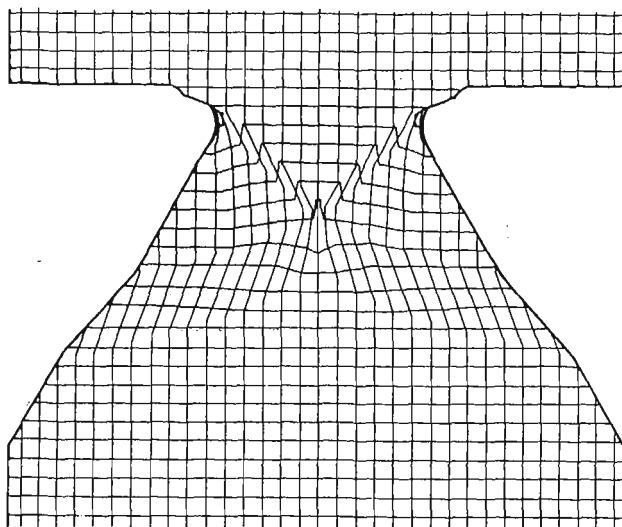
Rys. 7

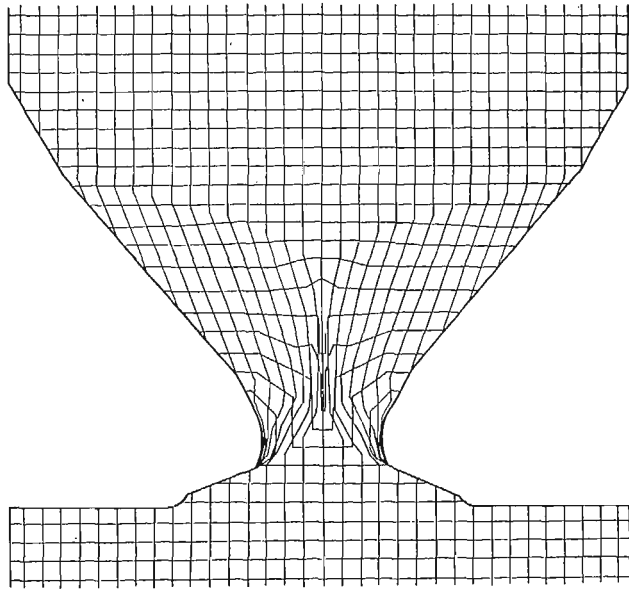
$l=0,32 \cdot T$



Rys. 6

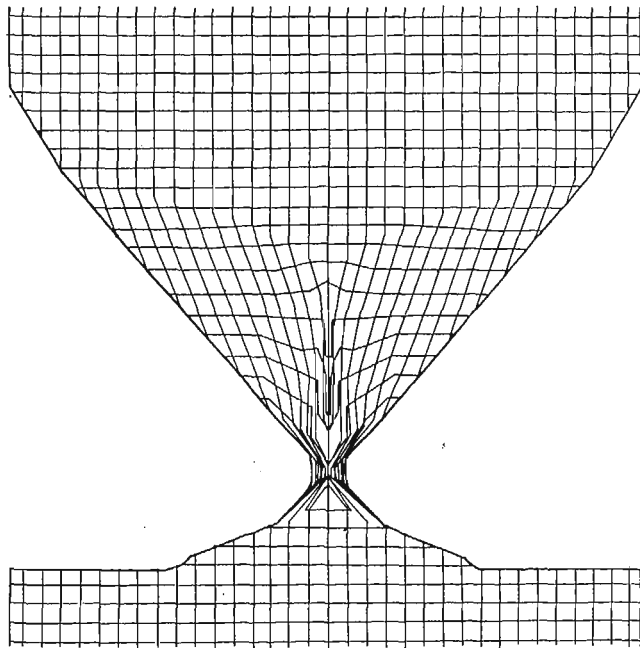
$l=0,208 \cdot T$





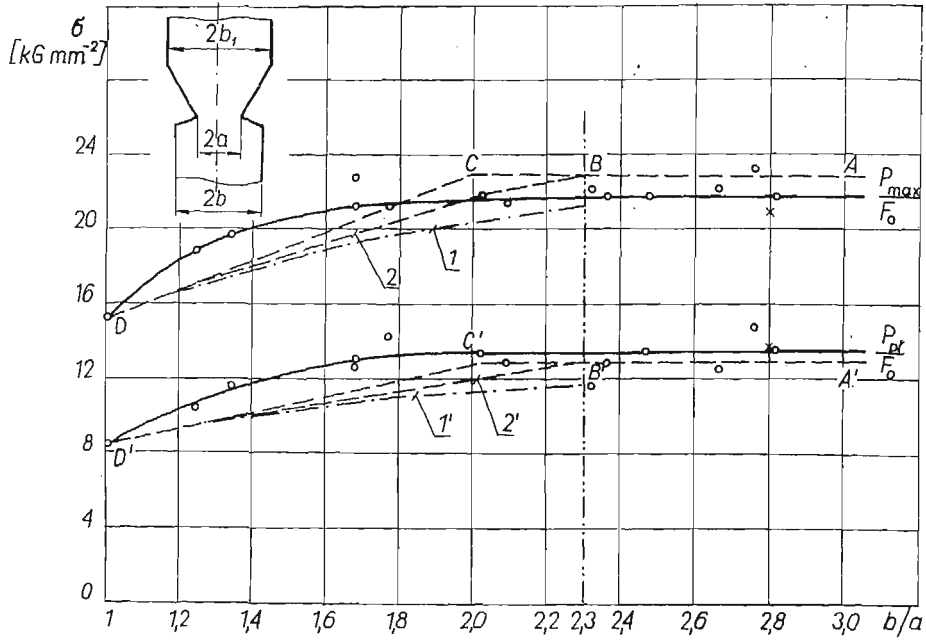
$$t=0,52 \cdot T$$

Rys. 8

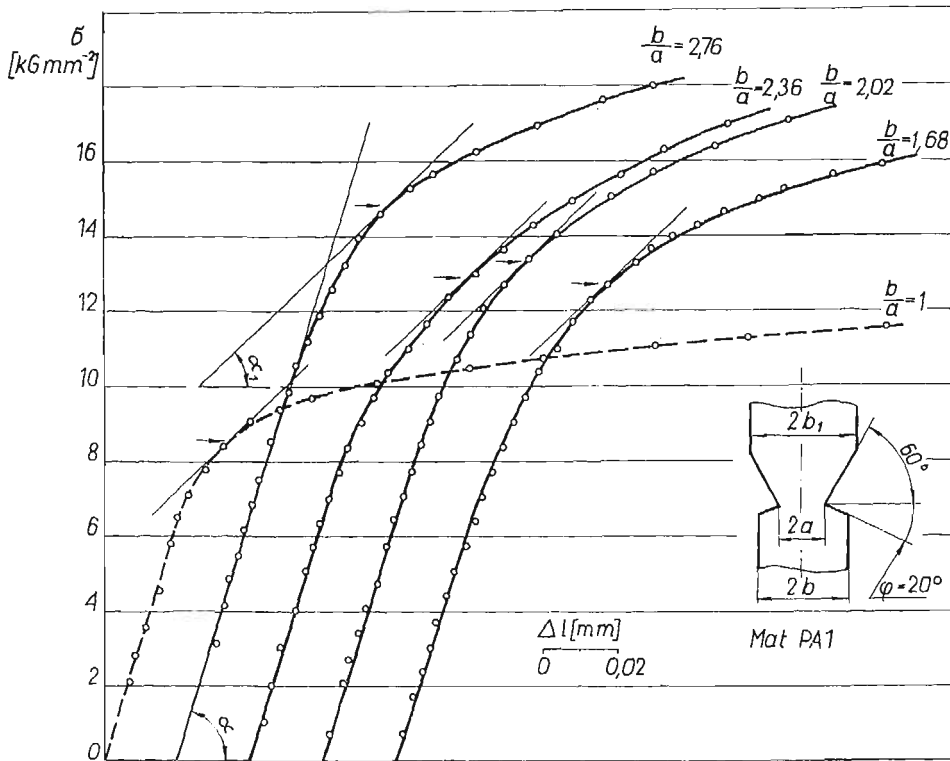


$$t=0,846 \cdot T$$

Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

4. Wyniki doświadczeń

Zbadano 16 próbek wykonanych z miękkiego stopu aluminium o wytrzymałości na rozzerwanie $R_r = 15,3 \text{ kG/mm}^2$. Stałe wymiary wynosiły: $2a = 6 \text{ mm}$, $2h = 20,4 \text{ mm}$, $2b_1 = 16 \text{ mm}$, $r = 0,5 \text{ mm}$, kąt $\gamma = \pi/6$. Wymiary $2b$ i kąt δ były różne. Próbki podzielono na trzy serie w zależności od kąta φ (rys. 11), który wynosił 0° , 20° , 40° . Każda seria składa się z czterech próbek o różnych stosunkach b/a .

Wszystkie próbki były rozciągane na hydraulicznej maszynie wytrzymałościowej, a odkształcenia mierzono za pomocą dwóch tensometrów czujnikowych umieszczonych po obu stronach próbki. Rozciąganie prowadzono aż do zerwania i notowano siłę P_{\max} .

Jako kryterium wyznaczania wartości naprężeń, przy których cały przekrój znajduje się w stanie plastycznym, przyjmowano umownie określoną zmianę modułu stycznego. Granica uplastycznienia jest punktem styczności wykresu z prostą, dla której $\text{tg} \alpha_1 = = 0,3 \text{ tg} \alpha$ (rys. 11).

Na rysunku 10 przedstawiono wyniki doświadczeń. Ciągła krzywa górna reprezentuje punkty odniesione do maksymalnej siły. Krzywa dolna przedstawia zależność $P_{p1}/F_0 = = f(b/a)$. Teoretyczna wartość stosunku $b/a = 2,3$ dobrze odpowiada rzeczywistemu zachowaniu się materiału zarówno w odniesieniu do granicy uplastycznienia, jak i do siły P_{\max} .

Wyniki uzyskane dla tych samych stosunków b/a , ale różnych kątów φ nie wskazują na jakościowy wpływ zmiany tego kąta na nośność graniczną. Niewielkie różnice w wartościach naprężeń mieszczą się w granicach rozrzutu.

5. Ocena nośności granicznej

Dla wystarczającej szerokości $2b$ części chwytowej nośność graniczną określamy za pomocą wzoru (2.1), z którego można obliczyć współczynnik zwiększenia nośności granicznej dla tego typu karbu. Następnie możemy podać teoretyczne obciążenie graniczne zarówno w odniesieniu do granicy uplastycznienia, jak i do granicy wytrzymałości na zerwanie R_r . Linie przerywane AB i $A'B'$ (rys. 10) przedstawiają uzyskane stąd rozwiązanie. Odpowiednie wartości granicy uplastycznienia oraz R_r wzięto z rzeczywistego wykresu rozciągania dla pręta bez karbu (linia przerywana na rys. 11).

Na uwagę zasługuje fakt, że teoretyczny współczynnik zwiększenia nośności granicznej odnosi się w naszym przypadku również i do maksymalnych naprężeń, jakie mogą być przeniesione. Podobny efekt stwierdzono również w pracy [2].

Przy niewystarczającej szerokości $2b$ części chwytowej możemy z wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością ocenić nośność graniczną przez podanie jej dolnego i górnego oszacowania. Zakładając dowolny kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcenia porównujemy pracę wykonaną przez naprężenia z pracą sił zewnętrznych. Otrzymana w ten sposób wartość obciążenia granicznego nie jest mniejsza od ścisłego rozwiązania. Można przyjąć, że zniszczenie nastąpi przez poślizg w płaszczyźnie pod kątem 45° do osi pręta (rys. 12). Dla takiego schematu odkształcenia maksymalna siła określona z warunku równości prac będzie

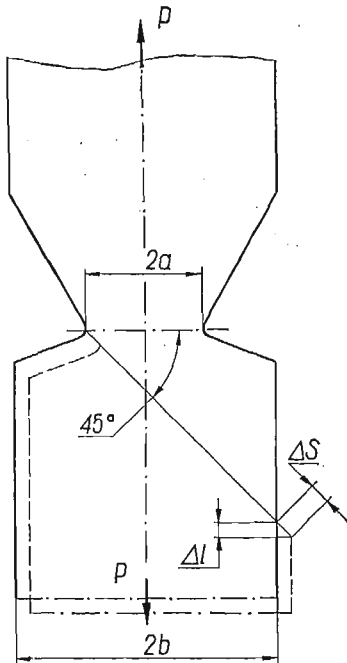
$$P = 2k \cdot 2h(a+b)$$

i stąd naprężenia:

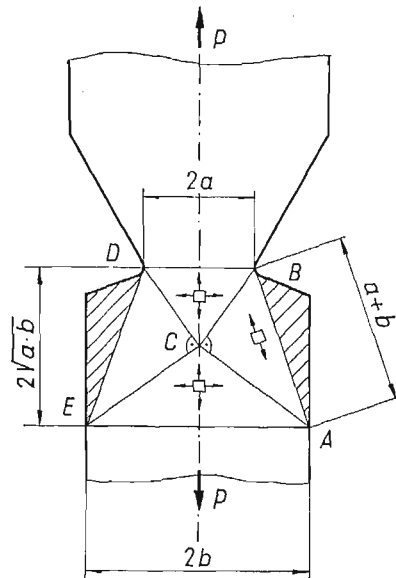
$$\sigma = k \left(1 + \frac{b}{a} \right).$$

Dla różnych wartości stosunków b/a otrzymujemy linie CD i $C'D'$ (rys. 10). W zakresie $b/a = 2-3$ lepszą ocenę uzyskujemy ze schematu odkształcenia podanego przez R. HILLA, który jest również kinematycznie dopuszczalny.

Dolną ocenę nośności granicznej otrzymujemy ze statycznie dopuszczalnego pola naprężeń. Otrzymane obciążenie nie jest większe od rozwiązania ścisłego. Dla pola na-



Rys. 12



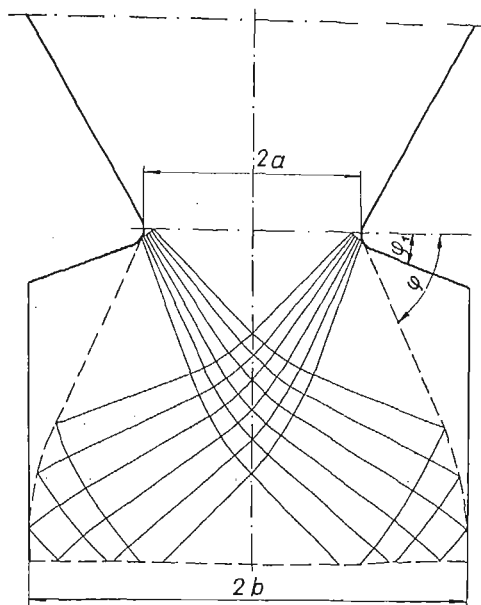
Rys. 13

prężen przedstawionego na rys. 13 uzyskujemy największą wartość obciążenia granicznego w przypadku, jeśli we wszystkich czterech trójkątach będzie osiągnięty stan plastyczny. Z kół Mohra, przy spełnieniu warunków ciągłości, otrzymujemy wzór na maksymalne naprężenia w postaci

$$\sigma = 2k \cdot \frac{2b}{a+b}.$$

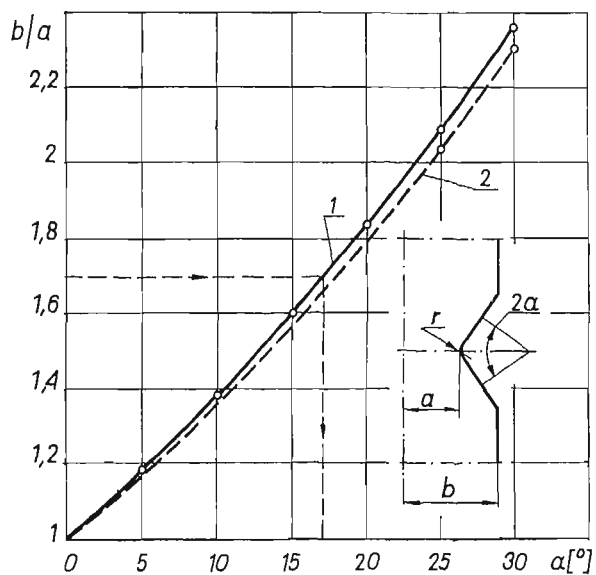
Zależność ta jest przedstawiona liniami 1 i 1' (rys. 10).

Ocenę dolną możemy również określić wykorzystując przedłużenie w obszar sztywny. Jest to bowiem statycznie dopuszczalne pole naprężeń, które spełnia równania równowagi i warunki brzegowe, a warunek plastyczności nie jest nigdzie przekroczony. Z jednego z podstawowych twierdzeń teorii plastyczności wynika, że dodanie materiału nie może



Rys. 14

zmniejszyć nośności granicznej. Na tej podstawie możemy stwierdzić, że nośność graniczna pręta z karbem o kącie φ_1 (rys. 14) nie może być mniejsza od nośności pręta z karbem o kącie φ . Ścisłe rozwiązanie dla pręta z wycięciem o kącie φ można przyjąć jako dolną



Rys. 15

ocenę nośności granicznej pręta o kącie φ_1 . Na podstawie wykonanych przedłużeń w obszar sztywny sporządzono wykres zależności $b/a = b/a(\alpha)$ (rys. 15). Linia ciągła przedstawia

karb ostry, a przerywana karb z zaokrągleniem o promieniu $r = 0,166a_0$. Mając dany stosunek b/a możemy określić z wykresu kąt α , dla którego istnieje ściśle rozwiązanie. Przy małych promieniach zaokrąglenia można korzystać z krzywej 1 bez obawy popełnienia dużego błędu. Wzór na współczynnik zwiększenia nośności granicznej dla karbu ostrego ma postać

$$f = 1 + \alpha.$$

Ocena dolna określona w ten sposób jest bardziej zbliżona do rozwiązania ścisłego. Dla różnych stosunków b/a oszacowanie od dołu będzie teraz określała linia 2 i 2' (rys. 10). Przy wartości $b/a = 2,3$ ocena dolna staje się rozwiązaniem ścisłym.

Maksymalne odchylenie otrzymanej oceny od krzywej uzyskanej na drodze doświadczalnej wynosi:

1) dla nośności granicznej odniesionej do granicy uplastycznienia przy $b/a = 1-2,3$ 14% i przy $b/a > 2,3$ 3,8%;

2) dla nośności granicznej odniesionej do wytrzymałości na zerwanie przy $b/a = 1-2,3$ 9% i przy $b/a > 2,3$ 4,8%.

6. Wnioski

Przeprowadzone doświadczenia potwierdzają słuszność teoretycznego rozwiązania, z którego wynika, że nośność graniczna dla pręta z niesymetrycznym karbem (rys. 1) będzie taka sama jak dla pręta o analogicznym wycięciu symetrycznym. Na rysunku 10 punkty oznaczone gwiazdkami odnoszą się właśnie do symetrycznego karbu. Kąt φ nie wpływa na wartość granicznych naprężeń.

Natomiast dodany materiał (zakreskowane pole na rys. 1) utrudnia plastyczne odkształcenia dolnej części pręta. Wpływa to w istotny sposób na realizowane pole prędkości. W przypadku pręta z niesymetrycznym wycięciem pole to jest określone jednoznacznie. Z obserwacji złomów próbek wynika, że pole prędkości przedstawione na rys. 2 jest słuszne. Wydaje się, że wartość kąta φ będzie miała wpływ na charakter pola prędkości. Doświadczalne określenie tego wpływu nastęrcza jednak duże trudności.

Literatura cytowana w tekście

1. В. С. ЖУКОВСКИЙ, *Деформированное состояние и прочность плоских надрезанных стержней произвольной толщины*, Расчеты на прочность, Вып. 9, Машгиз., Москва 1963, 231-252.
2. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIĄSTKOWSKI, *Doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganych płaskich prętów z karbem*, Rozpr. Inżyn., **13** (1965), 637-652.
3. W. N. FINDLEY, D. C. DRUCKER, *An experimental study of plane plastic straining of notched bars*, J. Appl. Mech., **32** (1965), 493-503.
4. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1956.
5. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, J. Wiley, New York 1951.
6. W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie*, Basel 1955.
7. W. SZCZEPIŃSKI, *Przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych prętów z karbem*, Mech. Teoret. Stos., **3** (1965).
8. A. J. WANG, *Plastic flow in a deeply notched bar with semicircular root*, Quart. Appl. Math., **11** (1954), 427-438.

9. E. H. LEE, *Plastic flow in a rectangularly notched bar subjected to tension*, J. Appl. Mech., **21** (1954), 140-146.
10. E. H. LEE, *Plastic flow in a V-notched bar pulled in tension*, J. Appl. Mech., **1** (1952), 331-336.
11. L. GARR, E. H. LEE, A. J. WANG, *The pattern of plastic deformation in a deeply notched bar with semicircular roots*, J. Appl. Mech., **23** (1956), 56-58.

Р е з ю м е

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СТЕРЖНЕЙ, ПОДВЕРГАЕМЫХ РАСТЯЖЕНИЮ, ОСЛАБЛЕННЫХ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ВЫТОЧКОЙ

В работе исследуется деформация и несущая способность стержней с несимметричной выточкой (рис. 1). На основе жестко-идеально пластического анализа исследуются деформации первоначально квадратной сети, нанесенной на стержень. На рисунках 6, 7, 8 и 9 показаны отдельные этапы этого процесса.

В экспериментальной части работы стержни с различными отношениями b/a и углами φ подвергались растяжению вплоть до разрыва. Результаты приведены на диаграмме 10. Они сравниваются с теоретической оценкой несущей способности.

Используя продолжение поля напряжений в жесткую область можно получить нижнюю оценку несущей способности. Эта оценка более близка точному значению, чем та, которую можно получить при применении статически допустимого поля напряжений, предложенного В. ПРАГЕРОМ.

Из приведенных результатов вытекает, что несущая способность для стержня с несимметричной выточкой (рис. 1) будет равной несущей способности аналогичного стержня с симметричной выточкой. Добавленный за счет асимметрии материал существенно влияет на характер поля скорости.

S u m m a r y

THE THEORETICAL AND EXPERIMENTAL YIELD POINT LOAD ANALYSIS FOR NONSYMMETRICALLY NOTCHED BARS PULLED IN TENSION

The study on strain and yield point load for non-symmetrically notched bars (Fig. 1) is presented. The deformation of the initially quadratic net drawn on the bar was studied under the assumption that the material is rigid-perfectly plastic. In Figs. 6-9 the stages of this process are shown.

In the experimental part of the study, the non-symmetrically notched bars of different ratio b/a and different angles were pulled in tension until fracture. The results are shown in Fig. 10. The comparison of the results with the theoretical yield point load is given.

By extending stress field into the rigid part, the lower bound of the yield point load may be obtained with a better degree of accuracy to the exact solution than the solution with the application of the statically permissible stress field proposed by W. PRAGER.

It follows from the analysis that the yield point load for non-symmetrically notched (Fig. 1) is the same as for a similar bar with symmetric notch. However, the significant influence on the character of the velocity field is caused by the additional material.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 lutego 1966 r.