

## O PEWNYM UOGÓLNIENIU METODY ORTOGONALIZACYJNEJ

SYLWESTER KALISKI (WARSZAWA)

### 1. Uwagi wstępne

W problemach teorii drgań zasadniczą rolę odgrywają metody przybliżone, w szczególności metody wariacyjne i ortogonalizacyjne. Należą do nich metody: RITZA, TREFFTZA i GALERKINA. Niemożliwość uzyskania ścisłych rozwiązań w wielu przypadkach zagadnień brzegowych doprowadziła do znacznego rozwoju wyżej cytowanych metod rozwiązań. Poza literaturą specjalną zostały one ujęte również w opracowaniach monograficznych, z których do podstawowych należą książki MICHLINA [1, 2].

Podstawową własnością metod Ritza, Trefftza i Galerkina jest fakt, że poszukując rozwiązania przybliżonego dynamicznego problemu brzegowego w postaci  $u = \sum_i a_i \varphi_i$  żądamy bądź spełnienia przez te funkcje warunków brzegowych (metoda Ritza, Galerkina), bądź równań (metoda Trefftza). Ponieważ metoda ortogonalizacyjna jest ogólniejsza (nie wymaga wprowadzenia pojęcia energii), zatem będziemy mówić w dalszym ciągu jedynie o niej. Również metodę Trefftza można przekształcić na ortogonalizacyjną, jeżeli warunki minimum kwadratów zastąpić na brzegu bądź warunkami ortogonalności operatora brzegowego rozwiązania względem funkcji  $\varphi_i$  bądź odpowiednich ich pochodnych. Należy tutaj jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że operując w metodach Ritza i Galerkina normą energii [1, 2] można zaniedbać, z teoretycznego punktu widzenia, spełnienie dynamicznych warunków brzegowych, tj. takich, które dla operatora różniczkowego rzędu  $2k$  zawierają kombinacje od  $k$ -tej do  $2k-1$  pochodnej z pozostałą funkcją i pochodnymi.

Wyniki otrzymane za pomocą układu funkcji nie spełniających dynamicznych warunków brzegowych stają się od tych warunków niezależne ściśle dopiero przy nieskończonej liczbie funkcji  $\varphi_i$ . Przy skończonej ich liczbie, szczególnie zaś przy małej liczbie, co ma najczęściej miejsce w praktyce, nieuwzględnienie tych warunków w metodzie Galerkina prowadzi do istotnych błędów. W praktyce jednakże, szczególnie dla bardziej złożonych problemów brzegowych, trudno częstokroć dobrać układy funkcji spełniających bądź równanie, bądź warunki brzegowe. Jeżeli nawet takie funkcje znajdzie się, to są one zwykle tak skomplikowane, że dalsze obliczenia w oparciu o nie są niewykonalne.

Nasuwa się więc pytanie, czy nie można by uogólnić metody ortogonalizacyjnej w taki sposób, aby dopuszczała ona przy określonych warunkach operowanie układem funkcji  $\varphi_i$  nie spełniających ani układu równań, ani warunków brzegowych

i prowadziła do dobrych wyników również w przypadkach, gdy operujemy małą liczbą funkcji, jak to ma miejsce w klasycznej metodzie Galerkina, gdy układ funkcji  $\varphi_i$  spełnia warunki brzegowe. Otóż niżej chcielibyśmy zaproponować tego rodzaju uogólnienie metody ortogonalizacyjnej, pozwalającej operować funkcjami nie spełniającymi równań i warunków brzegowych. Funkcje te jednakże nie będą zupełnie wolne od ograniczeń, mianowicie podlegać będą pewnemu wyborowi związanemu z potrzebą wprowadzenia małego parametru charakteryzującego odchylenie od spełnienia warunków klasycznych.

Niżej przedstawimy formalny szkic metody. Ponieważ idea rozwiązania opiera się na wprowadzeniu małego parametru, żądać będziemy jedynie asymptotycznej zbieżności rozwiązań do rozwiązań metodą Galerkina i zmodyfikowaną metodą Trefftza przy  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Nie będziemy więc konstruować ogólnego dowodu zbieżności, lecz ograniczymy się do zbieżności asymptotycznej, co w praktyce, z uwagi na ograniczoną liczbę funkcji, jaką się operuje, jest na ogół wystarczające.

Warunki dostateczne rozwiązalności dla przypadków asymptotycznych granicznych, tj. rozwiązalności metody Galerkina i Trefftza, są znane [1, 2] i nie będziemy ich tutaj powtórnie przytaczać. Odnośnie założeń i warunków dostatecznych gwarantujących zbieżność tych metod przyjmujemy je identycznie z [1, 2 i 3].

W drugim punkcie niniejszej pracy naszkicujemy ideę metody, w trzecim zilustrujemy ją na przykładzie prostokątnej płyty drgającej, sprężyste utwierdzonej na obwodzie.

## 2. Idea metody

Proponowana metoda obejmuje zarówno równania wektorowe, jak i układy równań skalarnych oraz równania dowolnego rzędu charakteryzujące się układem warunków brzegowych. Dla jasności jednakże i skupienia uwagi przedstawimy ogólną ideę metody na najprostszym przypadku, tj. rozważymy równanie skalarne drugiego rzędu. W następnym natomiast punkcie rozważymy przykład równania wyższego rzędu. Uogólnienie tego sposobu postępowania na układy równań jest automatyczne.

Rozważmy dowolne liniowe równanie drugiego rzędu o dowolnej liczbie zmiennych niezależnych w postaci

$$(2.1) \quad Lu = f$$

z warunkiem brzegowym

$$(2.2) \quad Ku = P.$$

Warunek (2.2) może być dynamiczny, nienaturalny.

Jak wiadomo, sprowadzić można równanie (2.1) i warunek brzegowy (2.2) zawsze do takiej postaci, w której jedno z tych równań będzie jednorodne. Stosując metodę Galerkina można np. (2.2) sprowadzić do formy jednorodnej, tj. przy  $P=0$ .

Gdybyśmy chcieli zastosować do rozwiązania naszego problemu metodę Galerki-  
na, wówczas zakładając rozwiązanie w postaci

$$(2.3) \quad u = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i,$$

żądalibyśmy od funkcji  $\varphi_i$  spełnienia jednorodnych warunków brzegowych (2.2). Współczynniki  $a_i$  (bądź wartości własne) wyznaczylibyśmy z warunków ortogonalności operatora  $L$  od rozwiązania (2.3) względem funkcji  $\varphi_i$  w obszarze ograniczonym brzegiem. Natomiast w zmodyfikowanej metodzie Trefftza żądalibyśmy, aby  $\varphi_i$  spełniały równanie, zaś  $a_i$  wyznaczylibyśmy z warunków ortogonalizacji operatora  $K$  od (2.3) po brzegu względem funkcji  $\varphi_i$  (przy  $P \neq 0$  zaś  $f = 0$ ).

Obecnie przyjmiemy jako rozwiązania dwa układy zupełne funkcji  $\varphi_i$  oraz  $\psi_i$  linio-wo niezależne, z których oba nie czynią zadość ani równaniu, ani warunkom brzegowym. Jednakże układy funkcji  $\varphi_i, \psi_i$  podajemy pewnym dodatkowym założeniem. Mianowicie żądamy, aby funkcja  $\varphi_i$  pierwszego układu nie spełniając równania w ogóle, nie spełniała warunków brzegowych tylko «nieznacznie», tj. tak, aby np. amplituda operacji  $Ku$  «niewiele» różniła się od zera, mówiąc innymi słowy, aby można było wprowadzić mały parametr  $\varepsilon_1$  charakteryzujący stopień niezzerowania się  $Ku$ .

Podobnie dla funkcji  $\psi_i$  żądamy, aby nie spełniając warunków brzegowych w ogóle, były bliskie spełnienia równania jednorodnego (2.1), tak aby odchylenie od  $Lu = 0$  charakteryzowało się również małym parametrem  $\varepsilon_2$ . Oczywiście określenie: układ funkcji «w przybliżeniu» spełnia operator, odnosi się zawsze do równań (operatorów) jednorodnych. Te dodatkowe żądania odnośnie funkcji  $\varphi_i$  oraz  $\psi_i$  utrudniają oczywiście ich wybór, jednakże jest on znacznie łatwiejszy aniżeli w metodach klasycznych. Wielokrotnie inżynier badający dany problem potrafi na podstawie przesłanek intuicyjnych dobrać tego typu funkcje z dokładnością do małych odchyłek, a nie ściśle jak w metodach klasycznych. Układy funkcji  $\varphi_i, \psi_i$  powinny stanowić linio-wo niezależne układy zupełne tylko wtedy, gdybyśmy chcieli sprowadzić problem do nieskończonego układu równań i badać dążenie rozwiązania przybliżonego do ścisłego. W przypadku operowania skończoną liczbą funkcji z warunku zupełności można zrezygnować.

Rozwiązania naszego problemu będziemy zatem poszukiwać w postaci

$$(2.4) \quad u = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i + \sum_{i=1}^m b_i \psi_i,$$

przy czym niekoniecznie  $m=n$ . Liczby te zależą od fizycznie stawianych celów zadania (np. jeżeli istotniejszą rolę odgrywać będą warunki brzegowe  $m > n$  itp.). Poza tym funkcje  $\varphi_i$  i  $\psi_i$  spełniają omówione wyżej warunki.

Podstawiając (2.4) do (2.1) i (2.2) żądać będziemy ortogonalności operatora równania od rozwiązania (2.4) względem funkcji  $\varphi_i$ , operatora zaś warunków brzegowych względem  $\psi_i$  (lub względem ich pochodnych, jeżeli same funkcje zerują się tożsamościowo na brzegu). Taki tok postępowania pozwoli uzyskać  $n+m$  równań względem współczynników  $a_i$  i  $b_i$ . Zauważymy, że ponieważ  $L\left(\sum_{i=1}^m b_i \psi_i\right)$  oraz  $K\left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i\right)$  zawierają zgodnie z założeniem małe parametry, tzn.

$$(2.5) \quad L\left(\sum_{i=1}^m b_i \psi_i\right) = \varepsilon_2 \bar{L}\left(\sum_{i=1}^m b_i \psi_i\right), \quad K\left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i\right) = \varepsilon_1 \bar{K}\left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i\right),$$

to żądanie ortogonalności równania względem  $\varphi_i$ , warunku zaś brzegowego względem  $\psi_i$  jest podyktowane i uzasadnione tym, że żądamy spełnienia równania przez rozwiązanie  $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$  przy potraktowaniu małych członów  $\bar{L}(\sum_{i=1}^m b_i \psi_i)$  jako znanej części niejednorodnej tego równania. Analogicznie, ale na odwrót przebiega rozumowanie dla operatora warunków brzegowych.

Z matematycznego punktu widzenia żądamy, aby przy  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  rozwiązania dla klasycznych metod Galerkina i Trefftza, które otrzymujemy przy asymptotycznym przejściu z  $\varepsilon_i$  do zera — miały sens — istniały, były jednoznaczne i zbieżne. Jak już wspomnieliśmy we wstępie, dla metod klasycznych zakładamy, że są spełnione warunki dostateczne stosowalności (zbieżności) tych metod [1, 2].

Od rozwiązania przy  $\varepsilon_i \neq 0$  nie żądamy ogólnie zbieżności, lecz jedynie zbieżności asymptotycznej, tj. aby przy  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  rozwiązania zmierzały do znanych rozwiązań metody Galerkina czy Trefftza, których istnienie zapewniliśmy spełnieniem wyżej cytowanych warunków dostatecznych. Mamy tutaj sytuację podobną jak w metodzie Kryłowa-Bogolubowa w teorii drgań nieliniowych. Ponieważ w praktyce z reguły operujemy skończoną liczbą funkcji, zatem warunek zbieżności asymptotycznej dla małego parametru  $\varepsilon$  jest praktycznie wystarczający.

Oczywiście można próbować dowieść, podobnie jak w niektórych zagadnieniach metody Kryłowa-Bogolubowa, poza zbieżnością asymptotyczną również zbieżność rozwiązań przy  $\varepsilon_i \neq 0$ . Dowód taki dla dostatecznie małych  $\varepsilon_i$  nie nastęrcza trudności. Nie przytaczamy go tutaj, gdyż dla przypadków, w których operujemy skończoną liczbą funkcji, nie przedstawia on istotniejszego praktycznego znaczenia, strona praktyczna zaś zagadnienia jest zasadniczym celem niniejszego artykułu. Tutaj natomiast otwartą pozostaje kwestia, na ile w ogóle istnieje konieczność wprowadzenia małych parametrów lub w jakim stopniu. Zagadnienie to stanowi poważny problem matematyczny i wymaga głębokiej analizy. Nie będziemy poruszać go na obecnym etapie ograniczając się do założenia zbieżności asymptotycznej. Zgodnie z tym co powiedzieliśmy wyżej, warunki ortogonalności w naszym problemie kształtować się będą przy uwzględnieniu (2.5) następująco:

$$(2.6) \quad \int_V \left\{ L \left( \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right) + \varepsilon_2 \bar{L} \left( \sum_{i=1}^m b_i \psi_i \right) - f \right\} \varphi_k dV = 0, \quad k = 1, 2 \dots n,$$

$$\int_S \left\{ \varepsilon_1 \bar{K} \left( \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right) + K \left( \sum_{i=1}^m b_i \psi_i \right) - P \right\} \psi_k^* dS = 0, \quad k = 1, 2 \dots m,$$

gdzie  $V$  oznacza całkowanie po obszarze,  $S$  — po konturze, przy czym zamiast  $\psi_k^*$  mogą wejść bądź same funkcje  $\psi_k$ , bądź pochodne normalne do konturu, o ile same funkcje zerują się tożsamościowo na brzegu (w przypadku równań wyższych rzędów mogą to być również odpowiednio wyższe pochodne). Układ równań (2.6) pozwala na wyznaczenie współczynników  $a_i$ ,  $b_i$  bądź też wartości własnych, gdy  $f = P = 0$ . Równania (2.6) można rozwiązywać bezpośrednio, można jednak uprościć rozwiązywanie pełnego układu równań wykorzystując metodę małego parametru. Mianowicie przyjmując przy operowaniu rzędami wielkości  $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2 \approx \varepsilon$

$$(2.7) \quad a_i = a_{0i} + \varepsilon a_{1i} + \varepsilon^2 a_{2i} + \dots, \quad b_i = b_{0i} + \varepsilon b_{1i} + \varepsilon^2 b_{2i} + \dots$$

i podstawiając do (2.6) oraz przyrównując do siebie wielkości odpowiednich rzędów małości względem  $\varepsilon$  znajdujemy

$$\begin{aligned}
 & \int_V \left\{ L \left( \sum_{i=1}^n a_{0i} \varphi_i \right) - f \right\} \varphi_k dV = 0, \\
 & \int_V \left\{ L \left( \sum_{i=1}^n a_{1i} \varphi_i \right) + \bar{L} \left( \sum_{i=1}^m b_{0i} \psi_i \right) \right\} \varphi_k dV = 0, \\
 & \int_V \left\{ L \left( \sum_{i=1}^n a_{2i} \varphi_i \right) + \bar{L} \left( \sum_{i=1}^m b_{1i} \psi_i \right) \right\} \varphi_k dV = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \\
 (2.8) \quad & \int_S \left\{ K \left( \sum_{i=1}^m b_{0i} \psi_i \right) - P \right\} \psi_k^* dS = 0, \\
 & \int_S \left\{ \bar{K} \left( \sum_{i=1}^n a_{0i} \varphi_i \right) + K \left( \sum_{i=1}^m b_{1i} \psi_i \right) \right\} \psi_k^* dS = 0, \\
 & \int_S \left\{ \bar{K} \left( \sum_{i=1}^n a_{1i} \varphi_i \right) + K \left( \sum_{i=1}^m b_{2i} \psi_i \right) \right\} \psi_k^* dS = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

W praktyce można korzystać bądź z układu równań (2.6), bądź (2.7) i (2.8). Ze względu na wyższą dokładność przy badaniu prostszych układów [gdzie łączny układ (2.6) nie jest zbyt skomplikowany] warto stosować bezpośrednio układ równań (2.6). Gdy równanie jest wyższego rzędu (lub mamy układ równań), wówczas rozwiązanie (2.4) musi zawierać większą kombinację funkcji. Na przykład gdy mamy jedno równanie i dwa warunki brzegowe, trzeba wprowadzić trzy układy funkcji  $\varphi_i$ ,  $\psi_i$ ,  $\theta_i$ , z których każdy nie spełnia tylko jednego z trzech operatorów (równania i dwóch warunków brzegowych) w ogóle, a pozostałe spełnia z dokładnością do małego parametru. Wówczas układ równań buduje się z warunków ortogonalności każdorazowo danego operatora względem tego układu funkcji, który nie spełnia go «w ogóle». Jeżeli układ funkcji spełniałby np. jeden z warunków brzegowych, wówczas mimo że równanie jest czwartego rzędu, rozwiązanie (2.4) przyjmiemy w postaci układu dwóch funkcji. Procedurę tę można w taki sam sposób rozszerzyć na dowolny rząd równania i dowolny układ równań. Sposób konstrukcji rozwiązania zilustrujemy na przykładzie.

### 3. Przykład

Jako przykład rozważymy drgania własne płyty prostokątnej sprężysto utwierdzonej na obwodzie. Rozwiązanie takiego problemu w postaci zamkniętej, jak wiadomo, nie jest znane. Zakładać będziemy, że funkcje  $\varphi_i$  i  $\psi_i$  spełniać będą warunek ugięcia równego zero na obwodzie płyty, tj. pierwszy warunek brzegowy, nie będą spełniać natomiast drugiego warunku brzegowego, tj. sprężystego utwierdzenia. W przykładzie tym wprowadzimy mały parametr tylko do operatora brzegowego. Przekonamy się, że i w tym przypadku uzyskamy bardzo dobre wyniki.

Mimo że drugi nie spełniony przez  $\varphi_i, \psi_i$  warunek brzegowy należy do dynamicznych, to jak już wspomnieliśmy, korzystając z małej liczby funkcji jego niespełnienie w metodzie Galerkiną prowadzioby do istotnych błędów.

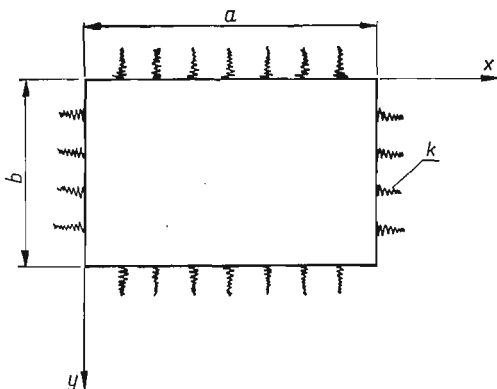
Rozważmy płytę prostokątną (w konkretnych rachunkach założymy płytę kwadratową). Równanie drgań swobodnych płyty ma postać

$$(3.1) \quad \nabla^4 w - \alpha^2 w = 0, \quad \alpha^2 = \frac{\rho \omega^2}{D}$$

z warunkami brzegowymi (rys. 1) na obwodzie

$$(3.2) \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \pm k \frac{\partial w}{\partial n},$$

gdzie  $n$  jest pochodną normalną do konturu płyty, przy czym dla  $x, y = 0$  bierzemy  $+k$ , dla  $x, y = a$  bierzemy  $-k$ .



Rys. 1

Rozwiązanie (2.4) przyjmujemy w postaci

$$(3.3) \quad w = a_1 \varphi + b_1 \psi,$$

$$(3.4) \quad \varphi = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \quad \psi = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a}\right).$$

Funkcja  $\varphi$  spełnia warunki brzegowe swobodnego podparcia, zaś  $\psi$  pełnego utwierdzenia. Obie funkcje nie spełniają równania <sup>(1)</sup> i drugiego warunku brzegowego.

Jeżeli liczba  $k$  charakteryzująca stopień utwierdzenia płyty na brzegu jest bardzo duża, tzn. płyta jest bliska płyty utwierdzonej, wówczas funkcja  $\psi$  «prawie» spełnia drugi warunek brzegowy nie spełniając równania.

Jeżeli  $k$  jest bardzo małe, funkcja  $\varphi$  spełnia z małym parametrem drugi warunek brzegowy nie spełniając równania.

W ostatnim więc przypadku równanie będziemy ortogonalizować za pomocą funkcji  $\varphi$ , warunek zaś brzegowy za pomocą funkcji  $\psi$  (zgodnie z oznaczeniami

<sup>(1)</sup> Funkcja  $\varphi$  dla swobodnie podpartej płyty jest funkcją własną.

poprzedniego paragrafu). W pierwszym natomiast przypadku należy odwrotnie ortogonalizować równanie za pomocą funkcji  $\psi$ , warunek zaś brzegowy za pomocą  $\varphi$ , gdyż mały parametr dla warunku brzegowego związany jest teraz z funkcją  $\psi$ . Dla zachowania oznaczeń poprzedniego paragrafu należałoby dla tego przypadku przemianować funkcje  $\varphi$  i  $\psi$ . Rozważymy oba warianty. Rozpocznemy od małego  $k$ .

1. Dla małego  $k$  równanie (2.6) po wykorzystaniu własności symetrii dla pierwszej częstości harmonicznej przyjmie postać następującą:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a \int_0^a \left\{ a_1 \left( 4 \frac{\pi^4}{a^4} - \alpha^2 \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + b_1 \frac{\pi^4}{a^4} \left[ -16 \cos \frac{2\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 32 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} - 16 \cos \frac{2\pi y}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right] - \right. \\
 & \quad \left. - b_1 \alpha^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} dx dy = 0, \\
 (3.5) \quad & \int_0^a \left\{ \left[ -a_1 \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + b_1 \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - k a_1 \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} - k b_1 \frac{2\pi}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \right] \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left[ - \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] \right\}_{x=0} dy = \\
 & = \int_0^a \left\{ b_1 \frac{4\pi^2}{a^2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right)^2 - k a_1 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \right\} dy = 0.
 \end{aligned}$$

Po scałkowaniu znajdziemy:

$$(3.6) \quad a_1 \left( 1 - \alpha^2 \frac{a^4}{4\pi^4} \right) + b_1 \left( \frac{640}{9\pi^2} - \alpha^2 \frac{64a^4}{9\pi^6} \right) = 0, \quad a_1 = \frac{9\pi^2}{4ka} b_1,$$

skąd

$$(3.7) \quad \alpha^2 = 4 \frac{\pi^4}{a^4} \frac{1 + \frac{2560a}{81\pi^4} k}{1 + \frac{1024a}{81\pi^4} k}.$$

Rozwiązanie (3.7) jest ważne dla małych  $k$  ( $k$  — mały parametr). Gdy  $k \rightarrow 0$ , to

$$(3.8) \quad \alpha^2 = 4 \frac{\pi^4}{a^4}, \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{\rho} \frac{2\pi^2}{a^2}},$$

co pokrywa się z rozwiązaniem ścisłym. Wynika to stąd, że jak już wspomnieliśmy, funkcja  $\varphi$  jest funkcją własną dla częstości podstawowej płyty swobodnie podpartej.

Gdy  $k \rightarrow \infty$ , wówczas  $k$  przestaje być małym parametrem i wynik powinien być obarczony pokaźnym błędem. Rzeczywiście dla  $k \rightarrow \infty$ , mamy  $\alpha^2 = 16 \frac{\pi^4}{a^4}$

$$(3.9) \quad \omega = \frac{40.0}{a^2} \sqrt[3]{\frac{D}{\rho}},$$

co daje w stosunku do znanej wartości znalezionej na innej drodze  $\omega = \frac{36,1}{a^2} \sqrt[3]{\frac{D}{\rho}}$  błąd rzędu ponad 10%. Błąd taki dla częstości uważa się za duży. Błąd dla amplitud będzie w takim przypadku znacznie większy. Rozważmy teraz przypadek dużego  $k$ .

2. W przypadku dużego  $k$  należy zamienić rolami funkcje  $\varphi$  i  $\psi$  (mały parametr  $1/k$ ). Układ równań (2.6) przyjmie teraz postać różną od (3.5)

$$(3.10) \quad \int_0^a \int_0^a \left\{ a_1 \left( 4 \frac{\pi^4}{a^4} - \alpha^2 \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + b_1 \frac{\pi^4}{a^4} \left[ -16 \cos \frac{2\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 32 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} - 16 \cos \frac{2\pi y}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right] - \right. \\ \left. - b_1 \alpha^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \right\} \times \\ \times \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) dx dy = 0, \\ \int_0^a \left[ b_1 \frac{4\pi^2}{a^2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) - k a_1 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \right] \sin \frac{\pi y}{a} dy = 0.$$

Po scałkowaniu znajdujemy

$$(3.11) \quad a_1 \left( \frac{256}{9} \frac{\pi^2}{a^2} - \frac{64}{9} \frac{a^2}{\pi^2} \alpha^2 \right) + b_1 \left( 32 \frac{\pi^4}{a^2} - \frac{9}{4} a^2 \alpha^2 \right) = 0, \quad a_1 = \frac{64}{3ak} b_1,$$

stąd

$$(3.12) \quad \alpha^2 = \frac{128}{9} \frac{\pi^4}{a^4} \frac{1 + \frac{512}{27} \frac{1}{\pi^2 ak}}{1 + \frac{16384}{243} \frac{1}{\pi^2 ak}}.$$

Rozwiązanie jest ważne dla bardzo dużych  $k$ . Gdy

$$(3.13) \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{to} \quad \alpha^2 = \frac{128}{9} \frac{\pi^4}{a^4} \quad \text{oraz} \quad \omega = \sqrt[3]{\frac{D}{\rho}} \frac{36,9}{a^2},$$

co różni się nieznacznie od wartości ścisłej  $\frac{36,1}{a^2} \sqrt[3]{\frac{D}{\rho}}$ .

Gdy  $k \rightarrow 0$ , błąd ogólnie biorąc powinien być znaczny, analogicznie jak w poprzednim skrajnym przypadku. Jednakże tak miałaby się rzecz, gdyby funkcja  $\varphi$  nie była akurat pierwszą funkcją własną dla płyty swobodnie podparte.



W naszym natomiast przypadku, gdy  $k \rightarrow 0$ .

$$(3.14) \quad \alpha^2 = \frac{128}{9} \frac{\pi^4}{a^4} \frac{512 \cdot 243}{27 \cdot 16384} = 4 \frac{\pi^4}{a^4},$$

co pokrywa się ze ścisłą wartością. Gdyby  $\varphi$  nie była akurat pierwszą funkcją własną płyty swobodnie podpartej, lecz inną funkcją spełniającą analogiczne warunki brzegowe, wówczas błąd byłby znaczny, podobnie jak w pierwszym przypadku. Gdy natomiast  $k \neq 0$ , lecz jest małe, wówczas poprawki otrzymane dla  $\omega^2$  ze wzoru (3.7) będą bardzo bliskie rzeczywistych, otrzymane zaś ze wzoru (3.12) będą nieściśle. Tym samym ogólnie biorąc rozwiązanie typu (3.12) zachowuje moc dla dużego  $k$ . Oczywiście wyniki można by znacznie uściślić, gdyby pod uwagę wziąć nie dwie a np. cztery funkcje  $\varphi_i, \psi_i$ . W wielu przypadkach metoda powyższa prowadzi do celu również i wtedy, gdy nie wprowadzi się małego parametru. Jednakże ogólne rozstrzygnięcie tej kwestii nie jest proste i dlatego w pracy niniejszej nie wykraczamy poza metodę asymptotyczną.

Wyżej rozważyliśmy problem własny. Równie dobre wyniki otrzymuje się i dla przypadku poszukiwania amplitudy lub problemów statycznych. Na przykład, jeżeli rozważyć płytę z niniejszego przykładu przy pominięciu sił bezwładności i nieskończenie rozległą w kierunku osi  $y$  oraz obciążoną w środku skupioną siłą rozłożoną liniowo (stała) w kierunku  $y$  przy danych małych kątach  $\varphi$  na obu krańcach  $x = 0, a$ , to wówczas ugięcie pod siłą wyniesie: dla  $\varphi = 0$

$$(3.15) \quad w_m = \frac{Pa^2}{192D},$$

dla  $\varphi \neq 0$  według rozwiązania ścisłego

$$(3.16) \quad w_m = \frac{1}{D} \left( \frac{Pa^3}{192} + 0,25\varphi a \right),$$

dla  $\varphi \neq 0$  według metody proponowanej w pracy przyjmując  $\varphi$  i  $\psi$  dla zmiennej  $x$  identycznie jak w niniejszym przykładzie

$$(3.17) \quad w_m = \frac{1}{D} \left( \frac{Pa^3}{194} + 0,28\varphi a \right).$$

Jak widać, wyniki są dobre już przy najprostszej postaci przyjętego przybliżenia.

#### 4. Uwagi końcowe

Reasumując wydaje się, że zaproponowana metoda daje możliwość konstrukcji przybliżonych rozwiązań metodą ortogonalizacji za pomocą układu funkcji nie spełniających równań i warunków brzegowych, jeżeli udaje się wprowadzić mały parametr. Przy tym żąda się tylko zbieżności asymptotycznej do znanych rozwiązań Galerkinia i Trefftza. Metodę stosuje się do problemów z naturalnymi i dynamicznymi warunkami brzegowymi, przy czym w przypadku naturalnych warunków brzegowych odgrywa również istotną rolę, gdyż jak wiadomo, operując małą liczbą funkcji metoda Galerkinia prowadzi w takich przypadkach na ogół do istotnych

błędów. Metoda daje niekiedy również wyniki, nawet jeżeli nie uwzględnić małego parametru, jednakże ta sprawa stanowi problem otwarty, nie poruszony w pracy niniejszej. Zagadnienie to stanowi poważny problem natury ogólniejszej i nie było rozważane w pracy niniejszej.

#### Literatura cytowana w tekście

1. С. Г. МИХЛИН, *Прямые методы в математической физике*, 1950.
2. С. Г. МИХЛИН, *Вариационные методы в математической физике*, 1957.
3. В. А. МЕДВЕДЕВ, *О сходимости метода Бубнова-Галеркина*, Прикл. Мат. Мех., 6, 27 (1963).

#### Р е з ю м е

#### О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ ОРТОГОНАЛИЗАЦИОННОГО МЕТОДА

В работе обобщается ортогонализационный метод на случай системы функций, неудовлетворяющих дифференциальному уравнению ни краевым условиям. Метод основывается на введении малого параметра отклонений, а также на асимптотической сходимости.

#### S u m m a r y

#### ON A GENERALIZATION OF THE METHOD OF ORTHOGONALIZATION

In the paper the author discusses a generalization of the method of orthogonalization on the case of a system of functions which satisfy neither the differential equation nor the boundary conditions. The method rests upon the introduction of the small parameter deviations and the asymptotic convergence.

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 września 1964 r.*

---