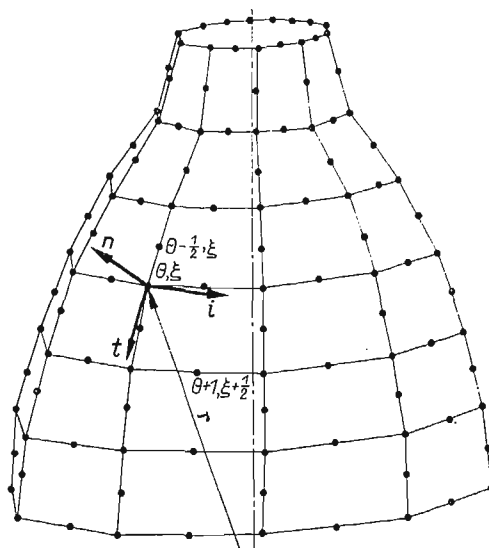


GEOMETRIA RÓŻNICOWA POWIERZCHNIOWEJ SIATKI PUNKTÓW

WITOLD GUTKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

W pracy zbadano geometrię różnicową zbioru punktów przedstawionych na rys. 1 (odcinki prostych łączące poszczególne punkty mają znaczenie jedynie graficzne). Konieczność zbudowania takiej geometrii wynika z zastosowania rachunku różnicowego do analizy regularnych siatek prętowych (wtedy odcinki prostych na rys. 1 odgrywają rolę prętów).



Rys. 1

Podstawą rozważań jest praca autora [3], w której zdefiniowano geometrię różnicową płaskiej siatki punktów w zastosowaniu do analizy prętów wielobocznych. Podobnie jak we wspomnianej pracy tak i tutaj korzystano wyłącznie z rachunku różnicowego przyjmując w nim następujące oznaczenia funkcji oraz operatorów sumy i różnicy:

$$\begin{aligned}
 y_x &= y, \\
 \nabla_x y &= y_{x+\frac{1}{2}} + y_{x-\frac{1}{2}}, & \Delta_x y &= y_{x+\frac{1}{2}} - y_{x-\frac{1}{2}}, \\
 \nabla_{x\pm\frac{1}{2}} y &= y_{x\pm 1} + y, & \Delta_{x\pm\frac{1}{2}} y &= \pm y_{x\pm 1} \mp y_x,
 \end{aligned}$$

x oznacza liczby całkowite. Tak więc jedynie przy funkcjach o argumentach przesuniętych (np. $y_{x-\frac{1}{2}}$) i nie będących pod znakiem operatorów ∇ czy Δ indeksów nie opuszczano.

2. Własności siatki

Niech będzie dana jednojednoznaczna funkcja wektorowa \mathbf{r} odwzorowująca w pewnym obszarze przestrzeni trójwymiarowej parę uporządkowaną $\{\alpha, \beta\}$ w zbiór wektorów o wspólnym początku. Końce tych wektorów nazwiemy przestrzenną siatką punktową. W parze uporządkowanej α i β są następującymi ciągami:

$$\alpha = \left(\theta - \frac{1}{2} \right), \theta, \left(\theta + \frac{1}{2} \right); \quad \beta = \left(\xi - \frac{1}{2} \right), \xi, \left(\xi + \frac{1}{2} \right),$$

gdzie θ i ξ są liczbami całkowitymi.

Ze wszystkich dowolnych zbiorów siatek rozpatrywać będziemy jedynie te, których własności będą następujące:

$$(2.1) \quad |\Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{r}| = h_1 = \text{const},$$

$$(2.2) \quad |\Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{r}| = h_2 = \text{const}, \quad |\Delta_{\xi} \mathbf{r}| = A_2 = \text{const},$$

$$(2.3) \quad \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_{\theta \pm \frac{1}{2}} = 0, \quad \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_{\xi \pm \frac{1}{2}} = 0,$$

$$(2.4) \quad \Delta_{\theta} [\Delta_{\theta} \mathbf{r} \times \Delta_{\theta}^2 \mathbf{r}] = 0, \quad \Delta_{\xi} [\Delta_{\xi} \mathbf{r} \times \Delta_{\xi}^2 \mathbf{r}] = 0.$$

$$(2.5) \quad \Delta_{\xi} \mathbf{r} \cdot \Delta_{\theta} \mathbf{r} = 0,$$

Związek (2.1) oznacza, że odległości pomiędzy punktami siatki przy dowolnym, ustalonym ξ i zmiennym θ są stałe i równe h_1 . Związki (2.2) oznaczają, że odległości pomiędzy punktami przy stałym θ i zmiennym ξ są stałe, a same punkty leżą w wierzchołkach lub w środkach boków wielokątów foremnych.

Związki (2.3) oznaczają, że punkty wyznaczone końcem wektora \mathbf{r} przy argumentach $\theta \pm \frac{1}{2}$ i $\xi \pm \frac{1}{2}$ leżą w połowie odległości pomiędzy punktami a argumentach $\theta - 1$, θ i $\theta + 1$.

Związki (2.4) oznaczają, że zbiory punktów o stałym ξ lub odpowiednio stałym θ leżą na jednej wspólnej płaszczyźnie (skręcenie równe zero). I wreszcie związek (2.5) mówi, że płaszczyzny dla stałego θ i stałego ξ są nawzajem prostopadłe. Reasumując stwierdzamy, że rozpatrywany przez nas zbiór składa się z siatek o co najmniej jednej osi symetrii prostopadłej do płaszczyzny $\theta = \text{const}$.

3. Wektory jednostkowe i działania nad nimi

Wszystkie wektory będące funkcjami położenia punktu siatki będziemy dawać w rzutach na dwa kierunki styczne i kierunek normalny do siatki w rozpatrywanym punkcie.

Przez kierunki styczne będziemy rozumieli kierunki zgodne z wektorami jednostkowymi:

$$(3.1) \quad t = \frac{1}{A_1} \Delta_\theta \mathbf{r}, \quad i = \frac{1}{A_2} \Delta_\xi \mathbf{r},$$

a kierunek normalny zgodny z kierunkiem wektora jednostkowego:

$$(3.2) \quad \mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{i}.$$

Wielkości A_1 i A_2 podobnie jak również później stosowane B_1 i B_2 wyznaczamy z następujących związków:

$$(3.3) \quad |\Delta_\theta \mathbf{r}|^2 = A_1^2, \quad |\Delta_\xi \mathbf{r}|^2 = A_2^2,$$

$$(3.4) \quad |\nabla_\theta \mathbf{r} - 2\mathbf{r}|^2 = B_1^2 = \left(\frac{h_1^2}{2R_1} \right)^2, \quad |\nabla_\xi \mathbf{r} - 2\mathbf{r}|^2 = B_2^2 = \left(\frac{h_2^2}{2r_2} \right)^2.$$

Wielkości R_1 i r_2 są promieniami krzywizny płaskich siatek i zostały zdefiniowane w pracy autora [3].

Poszukiwanie wszelkich przyrostów i sum dowolnych wektorów, będących funkcjami położenia punktu siatki, związane jest z uprzednim wyznaczeniem przyrostów i sum wektorów jednostkowych \mathbf{t} , \mathbf{i} , \mathbf{n} , dlatego też rozpatrzono poniżej przyrosty i sumy wektorów jednostkowych kolejno dla θ , ξ oraz dla $\theta \pm \frac{1}{2}$ i $\xi \pm \frac{1}{2}$.

Wektor \mathbf{t} . Ze względu na symetrię obrotową rzut jego przyrostu na kierunek wektora \mathbf{i} równy jest zeru. Na podstawie definicji podanych w pracy [3] rzut tegoż przyrostu na kierunek \mathbf{t} również jest równy zeru. I wreszcie na podstawie tychże samych definicji rzut na kierunek normalnej wynosi:

$$(3.5) \quad (\Delta_\theta \mathbf{t})_n = -\frac{h_1}{R_1} \mathbf{n}.$$

Podobnie za pomocą związków z wyżej wspomnianej pracy możemy określić rzuty sumy $\nabla_\theta \mathbf{t}$:

$$(3.6) \quad \nabla_\theta \mathbf{t} = 2 \frac{A_1}{h_1} \mathbf{t}.$$

Rzuty tego wektora na pozostałe osie są równe zeru.

Rozpatrzmy z kolei przyrost i sumę tegoż wektora względem ξ . Ze względu na obrotową symetrię przyrost ma tylko jedną składową w kierunku osi \mathbf{i} . W tym celu rozpatrzmy tożsamość

$$\Delta_\xi (\Delta_\theta \mathbf{r}) = \Delta_\theta (\Delta_\xi \mathbf{r})$$

lub

$$\Delta_\xi (A_1 \mathbf{t}) = \Delta_\theta (A_2 \mathbf{i}).$$

Po zróżnicowaniu ostatniej równości stronami otrzymamy

$$\Delta_\xi A_1 \nabla_\xi \mathbf{t} + \nabla_\xi A_1 \Delta_\xi \mathbf{t} = \Delta_\theta A_2 \nabla_\theta \mathbf{i} + \nabla_\theta A_2 \Delta_\theta \mathbf{i}$$

ze względu na symetrię $\Delta_\xi A_1 = 0$ jak i $\Delta_\theta \mathbf{i} = 0$. Tak więc po przekształceniach otrzymamy

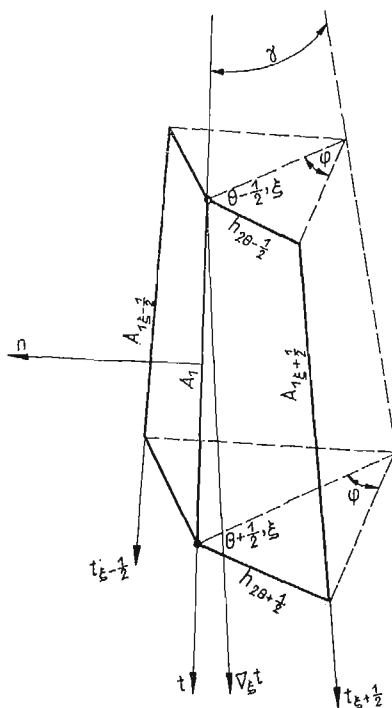
$$(3.7) \quad \Delta_\xi \mathbf{t} = 2 \frac{\Delta_\theta A_2}{\nabla_\xi A_1} \mathbf{i}.$$

Po przejściu do granicy przy jednoczesnym podzieleniu przez element łuku otrzymaną znaną zależność z teorii powierzchni (por. np. [1]):

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta} \mathbf{i}.$$

Z kolei przejdźmy do wyznaczenia składowych sumy $\Delta_\xi t$. Ze względu na obrotową symetrię wielkość ta może mieć wyłącznie składowe skierowane wzdłuż osi \mathbf{t} i \mathbf{n} . Rzut na oś \mathbf{n} jest widoczny bezpośrednio z rys. 2:

$$(3.8) \quad (\nabla_\xi t)_n = -2 \frac{\Delta_\theta h_2}{\nabla_\xi A_1} \sin \varphi \cos \gamma.$$



Rys. 2

Uwzględniając jednak, że $\sin \varphi = h_2/2r_2$ oraz wprowadzając oznaczenie $R_2 = r_2/\cos \gamma$ otrzymujemy

$$(3.9) \quad (\nabla_\xi t)_n = - \frac{\Delta_\theta h_2}{\nabla_\xi A_1} \frac{h_2}{R_2}.$$

Z tego rysunku otrzymamy rzut poszukiwanego wektora na oś \mathbf{t} :

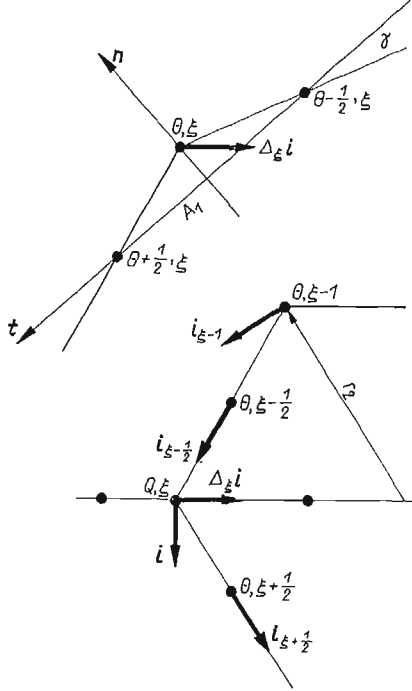
$$(3.10) \quad (\nabla_\xi t)_t = \frac{\nabla_\xi A_1}{A_1}.$$

Wektor \mathbf{i} . Ze względu na symetrię obrotową i ortogonalność płaszczyzn dla $\theta = \text{const}$ i $\xi = \text{const}$ od razu otrzymamy

$$(3.11) \quad \Delta_\theta \mathbf{i} = 0, \quad \nabla_\theta \mathbf{i} = 2\mathbf{i}, \quad \nabla_\xi \mathbf{i} = 2 \frac{A_2}{h_2} \mathbf{i}.$$

Składowe wektora $\Delta_{\xi} \mathbf{i}$ można łatwo wyznaczyć bezpośrednio z rys. 3 pamiętając, że sam wektor jest prostopadły do osi i . Tak więc mamy

$$(3.12) \quad \Delta_{\xi} \mathbf{i} = -\frac{\Delta_{\theta} h_2}{A_1} \mathbf{t} - \frac{h_2}{R_2} \mathbf{n}.$$



Rys. 3

Wektor \mathbf{n} . Wielkości rzutów sum i różnic dla tego wektora otrzymamy z definicji (3.2). Po podstawieniu znalezionych uprzednio wielkości i po przekształceniach otrzymamy odpowiednie zależności przy zmiennym θ :

$$(3.13) \quad \Delta_{\theta} \mathbf{n} = \frac{h_1}{R_1} \mathbf{t},$$

$$(3.14) \quad \nabla_{\theta} \mathbf{n} = 2 \frac{A_1}{h_1} \mathbf{n}.$$

Bardziej złożone są przekształcenia dla przyrostu i sumy względem ξ :

$$\Delta_{\xi} \mathbf{n} = \frac{h_2}{2 R_2 A_1 \nabla_{\xi} A_1} [(\nabla_{\xi} A_1)^2 + (\Delta_{\theta} h_2)^2] \mathbf{i},$$

ponieważ zaś

$$(\nabla_{\xi} A_1)^2 + (\Delta_{\theta} h_2)^2 = 4 A_1^2,$$

przeto ostatecznie otrzymamy

$$(3.15) \quad \Delta_{\xi} \mathbf{n} = 2 \frac{A_1 h_2}{\nabla_{\xi} A_1 R_2} \mathbf{i}.$$

Z kolei

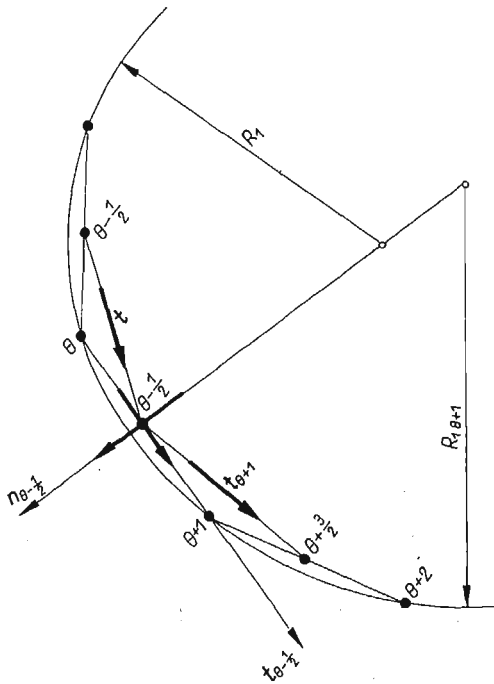
$$\nabla_{\xi} \mathbf{n} = \frac{1}{R_2 \nabla_{\xi} A_1} (A_2 \Delta_{\theta} h_2 - h_1 \Delta_{\theta} A_2) \mathbf{t} + \frac{A_2 (\nabla_{\xi} A_1)^2 + \Delta_{\theta} A_2 h_2 \Delta_{\theta} h_2}{\nabla_{\xi} A_1 A_1 h_2} \mathbf{n}.$$

Uwzględniając że

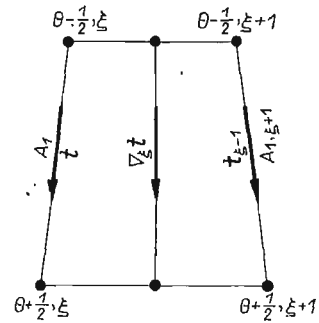
$$A_2 \Delta_{\theta} h_2 = h_2 \Delta_{\theta} A_2,$$

otrzymujemy zależność

$$(3.16) \quad \nabla_{\xi} \mathbf{n} = 2 \frac{A_1 A_2}{h_2 \nabla_{\xi} A_2} \mathbf{n}.$$



Rys. 4



Rys. 5

Pozostaje jeszcze wyznaczyć przyrosty i sumy wektorów jednostkowych przy $\alpha = \theta \pm \frac{1}{2}$ i $\beta = \xi \pm \frac{1}{2}$. Rozpocznijmy od wektora \mathbf{i} . Ze względu na symetrię obrotową otrzymujemy bezpośrednio

$$(3.17) \quad \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{i} = 0, \quad \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{i} = 2 \mathbf{i}_{\theta \pm \frac{1}{2}}, \quad \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{i} = 2 \frac{A_2}{h_2} \mathbf{i}_{\xi \pm \frac{1}{2}},$$

natomiast z rys. 3 można wywnioskować, że:

$$(3.18) \quad \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{i} = -2 \frac{A_2}{h_2} \frac{1}{\nabla_{\xi} A_1} \Delta_{\theta} h_1 \mathbf{t}_{\xi \pm \frac{1}{2}} - 2 \frac{A_2}{\nabla_{\xi} R_2} \mathbf{n}_{\xi \pm \frac{1}{2}}.$$

Wektor \mathbf{t} . Z twierdzeń pomocniczych [3] jak i z rys. 4 wynika bezpośrednio, że

$$(3.19) \quad \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{t}_\theta = -\frac{h_1}{2} \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{R_1} \right) \mathbf{n}_{\theta \pm \frac{1}{2}} + \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{A_1}{h_1} \right) \mathbf{t}_{\theta \pm \frac{1}{2}},$$

$$(3.20) \quad \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{t} = \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{A_1}{h_1} \right) \mathbf{t}_{\theta \pm \frac{1}{2}} - \frac{h_1}{2} \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{R_1} \right) \mathbf{n}_{\theta \pm \frac{1}{2}},$$

a z rys. 5

$$(3.21) \quad \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{t} = \frac{\Delta_\theta h_2}{A_2} \mathbf{j}_{\xi \pm \frac{1}{2}}, \quad \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{t} = \frac{\nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} A_1}{A_1} \mathbf{t}_{\xi \pm \frac{1}{2}},$$

Wektor \mathbf{n} . Odpowiednie wielkości dla \mathbf{n} uzyskamy jak i poprzednio z iloczynu wektorowego $\mathbf{t} \times \mathbf{i}$:

$$(3.22) \quad \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{n} = \frac{h_1}{2} \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{R_1} \right) \mathbf{t}_{\theta \pm \frac{1}{2}} + \frac{1}{h_1} \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} (A_1) \mathbf{n}_{\theta \pm \frac{1}{2}},$$

$$(3.23) \quad \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{n} = \frac{1}{h_1} \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} (A_1) \mathbf{n}_{\theta \pm \frac{1}{2}} + \frac{h_1}{2} \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{R_1} \right) \mathbf{t}_{\theta \pm \frac{1}{2}},$$

$$(3.24) \quad \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{n} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\nabla_\xi A_1}{\nabla_\xi R_2} \mathbf{j}_{\xi \pm \frac{1}{2}},$$

$$(3.25) \quad \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{n} = -\frac{A_2}{A_1} \frac{\Delta_\theta h_2}{\nabla_\xi R_2} \mathbf{t}_{\xi \pm \frac{1}{2}} + \frac{4A_1 A_2}{h_2 \nabla_\xi A_1} \mathbf{n}_{\xi \pm \frac{1}{2}}.$$

Jak już wspomniano, powyższe zależności umożliwiają wyznaczenie przyrostów i sum wektorów w dowolnym punkcie siatki. Niemniej jednak ze wzorów tych nie wynikają związki pomiędzy A_1 , A_2 i promieniami krzywizny R_1 i R_2 . Związki te można otrzymać na podstawie podobnego rozumowania jak i w geometrii różniczkowej. Weźmy w tym celu pod uwagę drugi, mieszany przyrost wektora \mathbf{n} :

$$\Delta_\xi (\Delta_\theta \mathbf{n}) = \Delta_\theta (\Delta_\xi \mathbf{n}).$$

Wstawiając zamiast $\Delta_\theta \mathbf{n}$ i $\Delta_\xi \mathbf{n}$ wyrażenia (3.13) i (3.15) otrzymujemy

$$\Delta_\xi \left(\frac{h_1}{R_1} \mathbf{t} \right) = 2\Delta_\theta \left(\frac{A_1 h_2}{\nabla_\xi A_1 R_2} \mathbf{i} \right),$$

a po przekształceniach

$$\Delta_\xi \left(\frac{h_1}{R_1} \right) \frac{\nabla_\xi A_1}{A_1} \mathbf{t} + 2 \left[\frac{\Delta_\theta A_2}{\nabla_\xi A_1} \nabla_\xi \left(\frac{h_1}{R_1} \right) - 2\Delta_\theta \frac{A_1 h_2}{\nabla_\xi A_1 R_2} \right] \mathbf{i} - \frac{h_2}{R_2} \frac{\Delta_\theta h_2}{\nabla_\xi A_1} \Delta_\xi \frac{h_1}{R_1} \mathbf{n} = 0.$$

Z równości tej wynika, że poszczególne składowe w kierunku \mathbf{t} , \mathbf{i} i \mathbf{n} powinny być równe zeru. Pierwsza i trzecia składowe są równe zeru tożsamościowo, gdyż ze względu na symetrię obrotową

$$\Delta_\xi \left(\frac{h_1}{R_1} \right) = 0.$$

Z przyrównania współczynnika przy \mathbf{i} otrzymujemy zależność wiążącą ze sobą wielkości A_1 , A_2 , h_1 , h_2 , R_1 , R_2 :

$$(3.26) \quad \frac{\Delta_\theta A_2}{\nabla_\xi A_1} \nabla_\xi \left(\frac{h_1}{R_1} \right) = 2\Delta_\theta \left(\frac{A_1 h_2}{\nabla_\xi A_1 R_2} \right).$$

Nie trudno wykazać, że przy przejściu do granicy otrzymamy znany związek Codazziego dla powierzchni obrotowej (por. np. [2]):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}.$$

Rozpatrzmy z kolei tożsamość

$$\Delta_\theta \Delta_\xi \mathbf{t} = \Delta_\xi \Delta_\theta \mathbf{t}.$$

Wstawiając zamiast $\Delta_\xi \mathbf{t}$ i $\Delta_\theta \mathbf{t}$ zależności (3.7) i (3.5) otrzymujemy

$$\Delta_\theta \left(2 \frac{\Delta_\theta A_2}{\nabla_\xi A_1} \mathbf{i} \right) = \Delta_\xi \left(-\frac{h_1}{R_1} \mathbf{n} \right),$$

a po przekształceniach

$$(3.27) \quad 2\Delta_\theta \left(\frac{\Delta_\theta A_2}{\nabla_\xi A_1} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\nabla_\xi h_1 \nabla_\xi R_1 A_1 h_2}{R_1 \nabla_\xi A_1} \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Jak poprzednio tak i w tym przypadku nie trudno sprawdzić, że wyrażenie to w granicy przechodzi do znanego z teorii powierzchni [1] związku Gaussa dla powierzchni obrotowej.

4. Geometria siatki odkształconej

Przyjmijmy jak w paragrafach poprzednich, że punkty siatki określone są współrzędnymi θ i ξ . Ponadto przyjmijmy, że dowolny punkt naszej siatki doznał przemieszczenia \mathbf{u} jako funkcji tychże współrzędnych θ i ξ . Rozłóżmy teraz to przemieszczenie \mathbf{u} na trzy podstawowe kierunki zgodne z kierunkami wektorów jednostkowych \mathbf{t} , \mathbf{i} i \mathbf{n} . W rezultacie tego nowe położenie punktu wyznaczone zostanie końcem wektora ρ będącego sumą wektorową

$$(4.1) \quad \rho = \mathbf{r} + \mathbf{u} = \mathbf{r} + u\mathbf{t} + v\mathbf{i} + w\mathbf{n}.$$

Rozpatrzmy teraz wektor $\frac{1}{A_1} \Delta_\theta \rho$. Po zróżnicowaniu prawej strony równania (4.1) i podstawieniu poprzednio wyznaczonych wyrażeń na przyrost i sumy wektorów jednostkowych otrzymamy

$$(4.2) \quad \frac{1}{A_1} \Delta_\theta \rho = \left(1 + \frac{\Delta_\theta u}{h_1} + \frac{B_1}{A_1} \frac{\nabla_\theta w}{h_1} \right) \mathbf{t} + \frac{\Delta_\theta v}{A_1} \mathbf{i} + \left(\frac{\Delta_\theta w}{h_1} - \frac{B_1}{A_1} \frac{\nabla_\theta u}{h_1} \right) \mathbf{n}.$$

Jeżeli oznaczymy podobnie jak w teorii powłok [2]

$$(4.3) \quad \varepsilon_\theta = \left(\frac{\Delta_\theta u}{h_1} + \frac{B_1}{A_1} \frac{\nabla_\theta w}{h_1} \right),$$

$$\omega = \frac{\Delta_\theta v}{A_1}, \quad -\vartheta_\theta = \left(\frac{\Delta_\theta w}{h_1} - \frac{B_1}{A_1} \frac{\nabla_\theta u}{h_1} \right),$$

to otrzymamy

$$(4.4) \quad \frac{1}{A_1} \Delta_{\theta} \rho = (1 + \varepsilon_{\theta}) \mathbf{t} + \omega_{\theta} \mathbf{i} - \vartheta_{\theta} \mathbf{n}.$$

Podobnie możemy wyznaczyć względny przyrost wektora ρ względem ξ . Rozumując jak poprzednio otrzymamy po przekształceniach

$$(4.5) \quad \frac{1}{A_2} \Delta_{\xi} \rho = \omega_{\xi} \mathbf{t} + (1 + \varepsilon_{\xi}) \mathbf{i} - \vartheta_{\xi} \mathbf{n},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= \frac{\Delta_{\theta} A_2}{\nabla_{\xi} A_1} \frac{\nabla_{\xi} u}{A_2} + \frac{1}{h_2} \Delta_{\xi} v + \frac{A_1 h_2}{A_2 R_2 \nabla_{\xi} A_1} \nabla_{\xi} w, \\ \omega_{\xi} &= \frac{1}{2} \frac{\nabla_{\xi} A_1}{A_1 A_2} \Delta_{\xi} u - \frac{1}{2} \frac{\Delta_{\theta} h_2}{A_2 A_2} \nabla_{\xi} v, \\ -\vartheta_{\xi} &= -\frac{B_2 \Delta_{\theta} h_2}{A_2 h_2 \nabla_{\xi} A_1} \Delta_{\xi} u - \frac{B_2}{A_2 h_1} \nabla_{\xi} v + 2 \frac{A_1}{h_2 \nabla_{\xi} A_1} \Delta_{\xi} w. \end{aligned}$$

Następnie wyznaczmy przyrosty wektora ρ przy argumentach przesuniętych, a więc

$$\Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \rho \quad \text{i} \quad \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \rho.$$

Sposób postępowania jest taki sam jak wyżej, dlatego nie podając przekształceń zapiszemy

$$(4.6) \quad \frac{1}{h_1} \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \rho = [1 + \varepsilon_{\theta \pm \frac{1}{2}}] \mathbf{t}_{\theta \pm \frac{1}{2}} + \omega_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\theta \pm \frac{1}{2}} - \vartheta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\theta \pm \frac{1}{2}},$$

gdzie

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{\theta \pm \frac{1}{2}} &= \frac{1}{h_1^2} \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} (A_1 u) + \frac{1}{2} \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{w}{R_1} \right), \\ \omega_{\theta \pm \frac{1}{2}} &= \frac{\Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} v}{h_1}, \\ -\vartheta_{\theta \pm \frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2} \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{u}{R_1} \right) + \frac{1}{h_1^2} \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} (A_1 \omega). \end{aligned}$$

Podobnie przy zmiennym ξ

$$(4.8) \quad \frac{1}{h^2} \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \rho = \omega_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{t} + (1 + \varepsilon_{\xi \pm \frac{1}{2}}) \mathbf{i} - \vartheta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{n},$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\xi \pm \frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} u \frac{\Delta_{\theta} h_2}{h_2 A_1} + \frac{A_2}{h_2^2} \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} v + \frac{A_2 \nabla_{\xi} A_1}{A_1 h_2 \nabla_{\xi} R_2} \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} w, \\
 \omega_{\xi \pm \frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \frac{\nabla_{\xi} A_1}{A_1 h_2} \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} u - \frac{\Delta_{\theta} A_2}{h_2 \nabla_{\xi} A_1} \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} v - \frac{A_2 \Delta_{\theta} h_2}{2 h_2 A_1 \nabla_{\xi} R_2} \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} w, \\
 -\vartheta_{\xi \pm \frac{1}{2}} &= -\frac{A_2}{h_2 \nabla_{\xi} R_2} \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} u + 2 \frac{A_1 A_2}{h_2^2 \nabla_{\xi} A_1} \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} w.
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Wyznamy teraz wektory jednostkowe odkształconej siatki oznaczając je przez \mathbf{t}^* , \mathbf{i}^* i \mathbf{n}^* . Rozumując analogicznie jak w teorii powierzchni (por. np. [2]) dochodzimy przy założeniu, że odkształcenia są małe, do następujących zależności:

$$\begin{aligned}
 A_1^* &\approx A_1(1 + \varepsilon_{\theta}), & A_2^* &\approx A_2(1 + \varepsilon_{\xi}), \\
 \mathbf{t}^* &\approx \mathbf{t} + \omega_{\theta} \mathbf{i} - \vartheta_{\theta} \mathbf{n}, \\
 \mathbf{i}^* &\approx \omega_{\xi} \mathbf{t} + \mathbf{i} - \vartheta_{\xi} \mathbf{n}, \\
 \mathbf{n}^* &\approx \vartheta_{\theta} \mathbf{t} + \vartheta_{\xi} \mathbf{i} + \mathbf{n}.
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Za pomocą powyższych zależności określimy odkształcenie postaciowe ω siatki jako iloczyn skalarny:

$$\omega = \mathbf{t}^* \mathbf{i}^* = \omega_{\xi} + \omega_{\theta} + \vartheta_{\theta} \vartheta_{\xi}.$$

Przy małych odkształceniach odrzucając iloczyn $\vartheta_{\theta} \vartheta_{\xi}$ jako małą wyższego rzędu otrzymamy ostatecznie

$$\omega = \omega_{\theta} + \omega_{\xi}.$$

Literatura cytowana w tekście

1. П. К. РАШЕВСКИЙ, *Курс дифференциальной геометрии*, Москва 1956.
2. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория тонких оболочек*, Судпромгиз, Ленинград 1962.
3. W. GUTKOWSKI, *Plane polygonal bars*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 9, 12 (1964).

Резюме

РАЗНОСТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ СЕТКИ ТОЧЕК

В работе представлена разностная геометрия множества точек, определенных зависимостями (2.1)–(2.5) и расположенных на произвольной поверхности вращения (рис. 1). В п. 3 дается определение отдельных характеристических сеток, а также действий над тремя единичными ортогональными векторами. Кроме того приводятся геометрические зависимости соответствующие соотношениям Кодаци-Гаусса в дифференциальной геометрии. В п. 4 выводятся соотношения, описывающие деформированную сетку. Эти соотношения могут быть использованы, между прочим, при исследовании поверхностных стержневых сеток.

S u m m a r y

DIFFERENCE GEOMETRY OF THE POINT SURFACES

The object of the paper is to present the difference geometry of a set of points defined by relations (2.1)–(2.5) and located on an arbitrary surface of revolution (Fig. 1). In Sec. 3 of the paper, the characteristic parameters of the surface as well as operations on the dextral set of mutually perpendicular unit-vectors are considered. Besides the geometrical relations analogous to the Codazzi-Gauss relations in the differential geometry are given. In the last Sec. of the paper, the deformed surface is considered. The relations thus obtained can be applied, among others, to the analysis of the regular sets of rods.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 listopada 1964 r.
