

NIKTÓRE ZWIĄZKI WYCHYLEŃ SKRĘTNYCH I MOMENTÓW REAKCJI WAŁÓW
DRGAJĄCYCH JAKO PODSTAWA METODY DOŚWIADCZALNEGO WYZNACZANIA
ZMIENNYCH NAPRĘŻEŃ ŚCINAJĄCYCH

TADEUSZ A G O P S O W I C Z (GDAŃSK)

1. Wstęp

Spośród wielu szkodliwych objawów wymuszonych drgań skrętnych różnego rodzaju zespołów maszynowych (okrętowe zespoły napędowe, zespoły prądotwórcze, sprężarkowe itd.) na szczególną uwagę zasługują, jak wiadomo, zmienne naprężenia ścinające w wałach tych zespołów. Określenie wielkości tych naprężeń na drodze czysto teoretycznej jest zwykle bardzo uciążliwe, a wyniki obarczone są nieraz dużymi błędami. Wynika to zarówno ze skomplikowanej natury samych układów, jak i braku wystarczająco dokładnych danych ilościowych o niektórych ich parametrach.

Źródłem szczególnych trudności obliczeniowych jest zagadnienie tłumienia omawianych drgań. Pomijając nawet przypadki, w których nie znajdują zastosowania do celów technicznych modele teoretyczne z tłumieniem liniowym, można stwierdzić, że stosując konkretne wartości współczynników tłumienia musimy być przygotowani niejednokrotnie na obciążenie wyników nawet bardzo poważnymi błędami.

Badania doświadczalne dodatkowych naprężeń ścinających w wałach układów rzeczywistych stwarzają na ogół lepszą podstawę do uzyskania wystarczająco dokładnych wyników, a osiągnięcie tego celu uzależnione jest zarówno od stosowanej metody pomiarowej jak i sposobu przeprowadzenia obliczeń w oparciu o dane pomiarowe.

Najbardziej rozpowszechniona metoda doświadczalnego wyznaczenia omawianych naprężeń polega na pomiarze wychyleń skrętnych w jednym lub kilku przekrojach wału i na wykorzystaniu związków zachodzących między tymi wychyleniami (lub ich amplitudami) a momentami reakcji wału (lub ich amplitudami).

Za najbardziej celowe należy uznać stosowanie takich związków, które nie stwarzają konieczności wykonywania nadmiernie pracowitych obliczeń oraz zawierają możliwie najmniej parametrów mogących obciążyć wyniki poważnym błędem. Do parametrów takich w większości omawianych układów zaliczyć należy przede wszystkim wspomniane wyżej współczynniki tłumienia drgań.

W artykule niniejszym przedstawiono próbę wyprowadzenia takich związków w oparciu o określony model układu ciągłego oraz wykazania ich przydatności w zastosowaniu do układów rzeczywistych, w szczególności do okrętowych zespołów napędowych z silnikami tłokowymi.

Przytoczone w zakończeniu przykłady liczbowe uzasadniają i ilustrują przydatność praktyczną tych związków.

2. Podstawy teoretyczne

Rozpatrzmy układ (rys. 1) składający się z dwu mas o momentach bezwładności J_1 i J_2 , połączonych wałem o przekroju kołowym o długości L i o ciągłym rozmieszczeniu momentu bezwładności masy względem osi wału $O-x$, przy czym moment bezwładności masy jednostki długości wału względem jego osi wynosi j_1 . Obie masy poddane są działaniu momentów tłumiących drgania o wielkości odpowiednio T_1 i T_2 , proporcjonalnych do prędkości kątowych ruchu drgającego:

$$T_1 = -\varrho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \quad T_2 = -\varrho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t},$$

gdzie przez $\varrho_1 > 0$ oraz $\varrho_2 > 0$ oznaczono współczynniki tłumienia, przez φ_1 i φ_2 kąty skrętnego wychylenia mas o momentach bezwładności odpowiednio J_1 i J_2 , a przez t — czas.

Wymuszenie drgań skrętnych układu pochodzi od harmonicznego w czasie momentu $T_f = T_0 \exp(i\omega t)$ działającego na masę o momencie bezwładności J_2 .

Drgania skrętne opisanego wyżej układu określa równanie różniczkowe

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$(2.2) \quad \begin{aligned} GJ_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{(0,t)} &= J_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{(0,t)} + \varrho_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{(0,t)}, \\ -GJ_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{(L,t)} &= J_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{(L,t)} + \varrho_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{(L,t)} - T_0 e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

gdzie $\varepsilon^2 = GJ_0/j_1$, przy czym G jest modułem sprężystości wału na skręcanie, a J_0 biegunowym momentem bezwładności powierzchni przekroju poprzecznego wału.

Rozwiązanie równania (2.1) z warunkami brzegowymi (2.2) przedstawić można dla ruchu ustalonego w postaci

$$(2.3) \quad \varphi_{1,2}(x, t) = \frac{T_0}{\omega} \left[\left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2} \cos \omega t - \frac{ad-bc}{a^2+b^2} \sin \omega t \right) + \right. \\ \left. + i \left(\frac{ad-bc}{a^2+b^2} \cos \omega t + \frac{ac+bd}{a^2+b^2} \sin \omega t \right) \right],$$

gdzie

$$\begin{aligned} a &= \frac{\omega}{\varepsilon} GJ_0(J_1+J_2) \cos \frac{\omega L}{\varepsilon} - \left[J_1 J_2 \omega^2 - \left(\frac{GJ_0}{\varepsilon} \right)^2 - \varrho_1 \varrho_2 \right] \sin \frac{\omega L}{\varepsilon}, \\ b &= \frac{GJ_0}{\varepsilon} (\varrho_1 + \varrho_2) \cos \frac{\omega L}{\varepsilon} - \omega (J_1 \varrho_2 + J_2 \varrho_1) \sin \frac{\omega L}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

$$c = \frac{GJ_0}{\varepsilon} \cos \frac{\omega}{\varepsilon} x - J_1 \omega \sin \frac{\omega}{\varepsilon} x,$$

$$d = \varrho_1 \sin \frac{\omega}{\varepsilon} x.$$

Amplitudę wychyleń w postaci bezwymiarowej przedstawia zależność

$$(2.4) \quad \frac{\Phi}{\Phi_{st}} = \frac{a}{\Omega} \frac{\cos \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}}{\cos \frac{\Omega}{a}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - \Omega \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L} \right)^2 + \nu_1^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}}{\left[\frac{\Omega^2}{\beta^2} - \left(\Omega^2 \frac{\beta_1}{\beta} - \frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{\beta}{\beta_1} \nu_1 \nu_2 \right) \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \right]^2 + \left[\left(\nu_1 + \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} \nu_2 \right) - \frac{\beta_1}{\beta} (\nu_1 + \nu_2) \Omega \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \right]^2}},$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{p^2} = \frac{\omega^2}{K} \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}, \quad \Phi_{st} = \frac{T_0}{K},$$

$$a^2 = \frac{p_s^2}{p^2} = \frac{J_1 J_2}{J_s (J_1 + J_2)}, \quad \nu_1 = \frac{\varrho_1}{J_1 p}, \quad \nu_2 = \frac{\varrho_2}{J_2 p},$$

$$\beta^2 = \frac{p_2^2}{p^2} = \frac{J_1}{J_1 + J_2}, \quad \beta_1^2 = \frac{p_s^2}{p_2^2} = \frac{J_2}{J_s},$$

$$\gamma^2 = \frac{p_1^2}{p^2} = \frac{J_2}{J_1 + J_2}, \quad \gamma_1^2 = \frac{p_s^2}{p_1^2} = \frac{J_1}{J_s}.$$

W oznaczeniach tych przyjęto ponadto

$$p^2 = \frac{K(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}, \quad p_s^2 = K/J_s,$$

$$p_1^2 = K/J_1, \quad p_2^2 = K/J_2,$$

$$K = GJ_0/L, \quad J_s = j_1 L.$$

Wielkość momentu reakcji sprężystej wału drgającego \mathcal{T}_R wyznaczamy z zależności (2.3); ponieważ wiadomo, że

$$\mathcal{T}_R = GJ_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

więc

$$(2.5) \quad \mathcal{T}_{R1,2} = \frac{GJ_0 T_0}{\omega} \left[\left(\frac{c_1}{a^2 + b^2} \cos \omega t - \frac{d_1}{a^2 + b^2} \sin \omega t \right) + i \left(\frac{d_1}{a^2 + b^2} \cos \omega t + \frac{c_1}{a^2 + b^2} \sin \omega t \right) \right],$$

gdzie

$$c_1 = \frac{\partial}{\partial x}(ac+bd), \quad d_1 = \frac{\partial}{\partial x}(ad-bc).$$

Amplitudę momentu reakcji w postaci bezwymiarowej przedstawia, zgodnie z oznaczeniami wzoru (2.4), wyrażenie

$$(2.6) \quad \frac{T_R}{T_0} = \frac{\cos \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}}{\cos \frac{\Omega}{a}} \times \sqrt{\frac{\left(\Omega + \frac{\gamma}{\gamma_1} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}\right)^2 + v_1^2}{\left[\frac{\Omega^2}{\beta^2} - \left(\Omega^2 \frac{\beta_1}{\beta} - \frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{\beta}{\beta_1} v_1 v_2\right) \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a}\right]^2 + \left[\left(v_1 + \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} v_2\right) - \frac{\beta_1}{\beta} (v_1 + v_2) \Omega \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a}\right]^2}}$$

Aby przedstawić amplitudę momentu reakcji T_R jako funkcję amplitudy wychyleń Φ , dzielimy stronami zależności (2.4) i (2.6) otrzymując po przekształceniach

$$(2.7) \quad \frac{T_R}{T_0} = \frac{\Phi \Omega}{\Phi_{st} a} \sqrt{\frac{\left(\Omega + \frac{\gamma}{\gamma_1} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}\right)^2 + v_1^2}{\left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - \Omega \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}\right)^2 + v_1^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}}}$$

Warto zwrócić uwagę, że wyrażenie to jest niezależne od współczynnika tłumienia v_2 , a łatwo można wykazać, że jest ono niezależne również od współczynnika v_1 , jeżeli spełnione jest równanie

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - \Omega \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}\right)^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L} \left(\Omega + \frac{\gamma}{\gamma_1} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}\right)^2 = 0,$$

o pierwiastkach rzeczywistych

$$(2.8) \quad \left(\frac{x}{L}\right)_k = \frac{\gamma \gamma_1}{\Omega} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\frac{\gamma_1}{\gamma} \Omega \pm \sqrt{1 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \Omega^2}\right).$$

Interpretację fizyczną mają jednak tylko takie pierwiastki o wskaźniku i , które spełniają warunek

$$(2.9) \quad 0 \leq \left(\frac{x}{L}\right)_i \leq 1.$$

Jeżeli więc wartość amplitudy wychYLENIA Φ występująca we wzorze (2.7) określona została w przekroju wału o współrzędnej x_i , to wartość pierwiastka w tym wzorze jest niezależna od współczynnika tłumienia v_1 . Wobec tego można wybrać

taką wartość ν_1 , która spowoduje sprowadzenie wzoru (2.7) do możliwie najprostszej postaci. Przyjmijmy więc $\nu_1 = 0$, a wzór (2.7) przyjmie postać

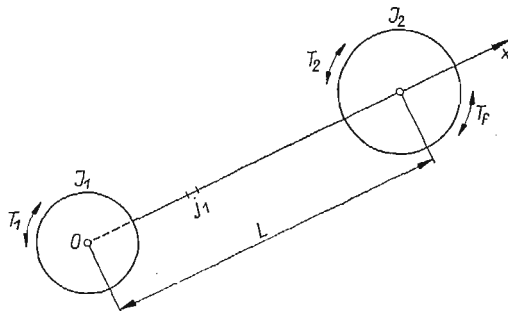
$$(2.10) \quad \frac{T_R}{T_0} = \frac{\Phi_i}{\Phi_{st}} \frac{\Omega}{\gamma\gamma_1} \frac{\Omega + \frac{\gamma}{\gamma_1} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \left(\frac{x}{L}\right)_i}{\frac{\gamma}{\gamma_1} - \Omega \operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \left(\frac{x}{L}\right)_i}$$

Wzór (2.10) przedstawia więc związek między względną amplitudą momentu reakcji wału i amplitudą wychyleń określonych przekrojów wału, a cechą charakterystyczną tego związku jest jego bezpośrednia niezależność od współczynników tłumienia ν_1 i ν_2 , a więc i od q_1 i q_2 .

Jeżeli we wzorze (2.10) uwzględnimy wyrażenie (2.8), to dochodzimy po przekształceniach do prostej zależności

$$(2.11) \quad T_R = \Phi \frac{K}{\gamma_1^2 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\Omega^2 \gamma_1^2} - 1}}$$

W zależności tej uwzględniono jedynie rozwiązania (2.8) z dodatnią wartością pierwiastka, ponieważ rozwiązania z ujemną wartością tego pierwiastka nie mają przeważnie określonej interpretacji fizycznej.



Rys. 1

Z szeregu badań teoretycznych i doświadczalnych wynika, że istnieje pokaźna grupa układów rzeczywistych, które reprezentowane być mogą przez model przedstawiony na rys. 1 z pominięciem jednak wpływu masy wału na takie parametry jego drgań, jak amplitudy wychyleń czy amplitudy momentów reakcji. Dla takich układów spełniony jest warunek $J_s \ll J_1$, $J_s \ll J_2$, co prowadzi do możliwości przyjęcia we wzorze (2.7) przybliżonej równości

$$\operatorname{tg} \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L} \approx \frac{\Omega}{a} \frac{x}{L}$$

Wynika to z faktu, że współczynnik a jest znacznie większy zarówno od stosunku x/L jak i od wartości Ω , która w interesującym nas najbardziej zakresie rezonansowym jest bliska jedności.

Przyjmując więc przytoczone wyżej uproszczenia wzór (2.7) przekształcić można do prostej postaci¹

$$(2.12) \quad T_R = \Phi_x \Omega K \sqrt{\frac{\Omega^2 + \nu_1^2}{\left(\gamma^2 - \Omega^2 \frac{x}{L}\right)^2 + \nu_1^2 \left(\Omega \frac{x}{L}\right)^2}}$$

Stosując obecnie warunek niezależności wartości pierwiastka we wzorze (2.12) od współczynnika tłumienia ν_1 otrzymamy warunek

$$(2.13) \quad \frac{x_0}{L} = \frac{\gamma^2}{2\Omega^2}$$

Jeżeli warunek (2.13) zostanie spełniony, to współczynnik ν_1 może przyjąć dowolną wartość rzeczywistą, a więc również wartość zera i z zależności (2.12) otrzymamy prosty wzór

$$(2.14) \quad T_R = \frac{2\Phi_0 K \Omega^2}{\gamma^2},$$

niezależny od współczynników tłumienia ν_1 i ν_2 .

Dla warunków rezonansowych przyjąć wolno w przybliżeniu $\Omega \approx 1$ i wzór (2.14) przyjmie jeszcze prostszą postać

$$(2.15) \quad T_{Rr} = \frac{2\Phi_0 K}{\gamma^2},$$

przy czym

$$(2.16) \quad \left(\frac{x_0}{L}\right)_r = \frac{\gamma^2}{2}.$$

Innego typu związek amplitudy momentu reakcji i amplitudy wychyleń skrętnych, ale również niezależny bezpośrednio od współczynników tłumienia, można wyprowadzić z zależności (2.12) dla przypadków, w których znane są wartości amplitud Φ_{x_1} i Φ_{x_2} w dwu przekrojach wału o różnych współrzędnych x_1 i x_2 . Wstawiając bowiem wartość x_1 i odpowiadającą jej Φ_{x_1} do zależności (2.12) otrzymujemy współczynnik tłumienia²

$$(2.17) \quad \nu_1^2 = \frac{\Phi_{x_1}^2 K^2 \Omega^4 - T_R^2 \left(\gamma^2 - \Omega^2 \frac{x_1}{L}\right)^2}{T_R^2 \Omega^2 \frac{x_1^2}{L^2} - \Phi_{x_1}^2 K^2 \Omega^2}.$$

¹ Wzór ten można wyprowadzić również w oparciu o równanie ruchu zwykłego układu dwumasyowego.

² Zależność (2.17) może stanowić podstawę doświadczalnego badania współczynnika tłumienia śrubowego ν_1 .

Stosując następnie to wyrażenie w zależności (2.12), ale odniesionej do wartości x_2 i odpowiadającej jej wartości Φ_{x_2} , otrzymujemy

$$(2.18) \quad T_R = K \sqrt{\frac{\Phi_{x_1}^2 \left(\gamma^2 - 2\Omega^2 \frac{x_2}{L} \right) - \Phi_{x_2}^2 \left(\gamma^2 - 2\Omega^2 \frac{x_1}{L} \right)}{\frac{x_1^2}{L^2} \left(\gamma^2 - 2\Omega^2 \frac{x_2}{L} \right) - \frac{x_2^2}{L^2} \left(\gamma^2 - 2\Omega^2 \frac{x_1}{L} \right)}}$$

Przystosowanie wzoru (2.18) do warunków rezonansowych następuje przez przyjęcie w nim przybliżonej wartości $\Omega = 1$.

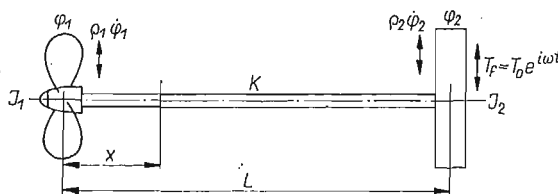
3. Zastosowanie do analizy wyników pomiarów wykonanych przyrządami typu sejsmicznego

Wyprowadzone w poprzednim punkcie zależności znaleźć mogą zastosowanie do badania amplitud naprężeń zmiennych, wywołanych drganiami skrętnymi wałów układów rzeczywistych. Zastosowania takie dotyczyć tu będą okrętowych zespołów napędowych, chociaż rozszerzyć je można łatwo na inne zespoły maszynowe poddane oddziaływaniu wymuszonych drgań skrętnych.

Przyjmujemy następujące założenia:

- 1) silnik napędowy reprezentowany jest przez jedną zastępczą masę skupioną,
- 2) pomija się wpływ masy wału na parametry drgań układu,
- 3) wymuszenie drgań jest harmoniczne w czasie i działa jedynie na masę zastępczą silnika; jest to jedna z głównych harmonicznym momentu wymuszającego o stałej amplitudzie,
- 4) tłumienie śrubowe jest proporcjonalne do prędkości ruchu drgającego,
- 5) tłumienie silnikowe można uważać jako równoważny moment proporcjonalny do prędkości ruchu drgającego.

Założenia wyżej wymienione są powszechnie stosowane w obliczeniach takich parametrów drgań skrętnych, jak częstość swobodnych drgań jednowęzłowych okrętowych zespołów napędowych, amplitudy wychyleń i momentów reakcji linii wałów okrętowych, a liczne doświadczenia potwierdzają wystarczającą w praktyce dokładność otrzymanych wyników [1–7 i 9].



Rys. 2

Model układu drgającego reprezentującego okrętowy zespół napędowy z uwzględnieniem poczynionych wyżej założeń przedstawia rys. 2

Symbole użyte do opisu modelu oznaczają:

- K sztywność skrętną linii wału,
- J momenty bezwładności mas,
- L długość zredukowaną wału o sztywności K ,

- p częstość drgań swobodnych,
 T_f harmoniczny w czasie moment o amplitudzie T_0 wymuszający drgania,
 T_R amplitudę harmonicznego w czasie momentu reakcji wału,
 φ wychylenia skrętne harmoniczne w czasie,
 Φ amplitudę wychyleń skrętnych harmonicznych w czasie,
 ϱ_1 współczynnik tłumienia śrubowego,
 ϱ_2 współczynnik tłumienia silnikowego,
 ω częstość kątową drgań wymuszonych,
 x odległość przekroju wału od masy śruby napędowej,
 t czas.

Powszechnie stosowana metoda doświadczalnego wyznaczania amplitud zmiennych momentów reakcji wału, a więc i dodatkowych zmiennych naprężeń ścinających, opiera się na pomiarze amplitud wychyleń skrętnych wału w dowolnym przekroju o współrzędnej x przeważnie za pomocą torsjografów typu sejsmicznego (Geiger, Sperry-M.I.T., Snubury itp.). Wykorzystując następnie związki zachodzące między amplitudami wychyleń a amplitudami momentów reakcji wyznacza się wartości tych ostatnich. W stosowanych wzorach reprezentujących te związki pojawia się często wpływ tłumienia śrubowego i silnikowego albo używa się współczynników tłumienia, których określenie z wymaganą dokładnością jest zwykle bardzo utrudnione [3, 7, 8, 10]. W obu przypadkach ostateczne wyniki obciążone bywają nieraz bardzo poważnym błędem. Zagadnienie to zostało szczególnie dokładnie naświetlone w artykule S. ARCHERA [4].

Optymalnym rozwiązaniem tego zawilego problemu byłoby zastosowanie takich zależności amplitud momentów reakcji od amplitud wychyleń, które byłyby niezależne bezpośrednio od współczynników tłumienia, a podlegały pomiarom jedynie przez amplitudy wychyleń.

Takie właśnie zależności wyprowadzono w poprzednim rozdziale; do określenia amplitud momentów reakcji wału (stałych na całej długości wału) używamy:

a) prostego wzoru (2.14) lub w warunkach rezonansu wzoru (2.15) z tym jednak, że amplitudy wychyleń wału muszą być mierzone w miejscu o współrzędnej x_0 określonej wzorem (2.13) lub (2.16);

b) wzoru (2.18), jeżeli są do dyspozycji wyniki pomiarów amplitud wychyleń Φ_{x_1} i Φ_{x_2} w dwu dowolnych miejscach linii wału oraz oczywiście współrzędnych tych punktów pomiarowych x_1 i x_2 .

Istotną rzeczą z punktu widzenia przydatności praktycznej tych zależności jest znajomość błędu wynikającego z pominięcia wpływu masy wału oraz z użycia wartości amplitud wychyleń pomierzonych nieściśle w odległości x_0 od masy śruby napędowej (przypadek a), a w odległości

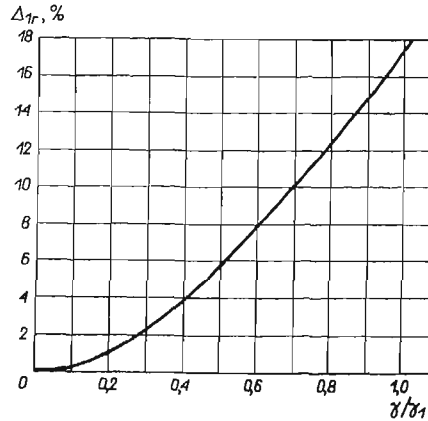
$$(3.1) \quad x_1 = x_0(1 + \delta),$$

gdzie δ spełniająca nierówność

$$-1 \leq \delta \leq \frac{2\Omega^2}{\gamma^2} - 1$$

jest wskaźnikiem błędu ustawienia przyrządu pomiarowego.

Wykres na rys. 3 ilustruje wpływ momentu bezwładności masy wału na błąd bezwzględny w określeniu amplitudy momentu reakcji wału w przekroju o współrzędnej x_0 i w warunkach rezonansu ($\Omega \approx 1$), czyli błąd wynikający z zastosowania wzoru (2.14) zamiast (2.11).

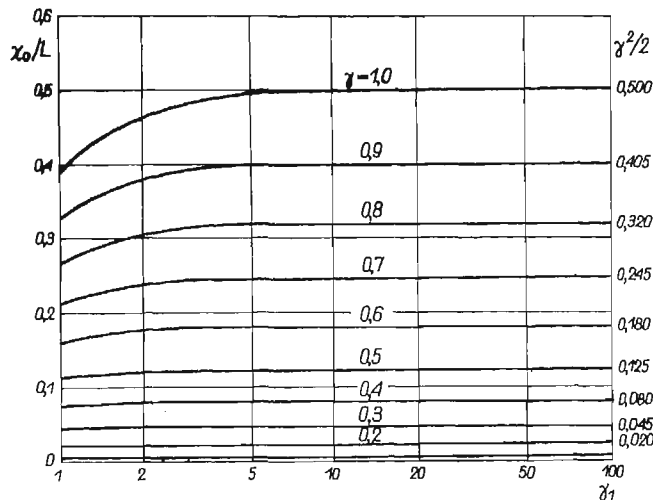


Rys. 3

Wielkość tego błędu wyraża się zależnością

$$(3.2) \quad \Delta_1 = \left[\frac{2\Omega}{\gamma^2/\gamma_1^2} \left(\sqrt{\Omega^2 + \frac{\gamma^2}{\gamma_1^2}} - \Omega \right) - 1 \right] 100 \%$$

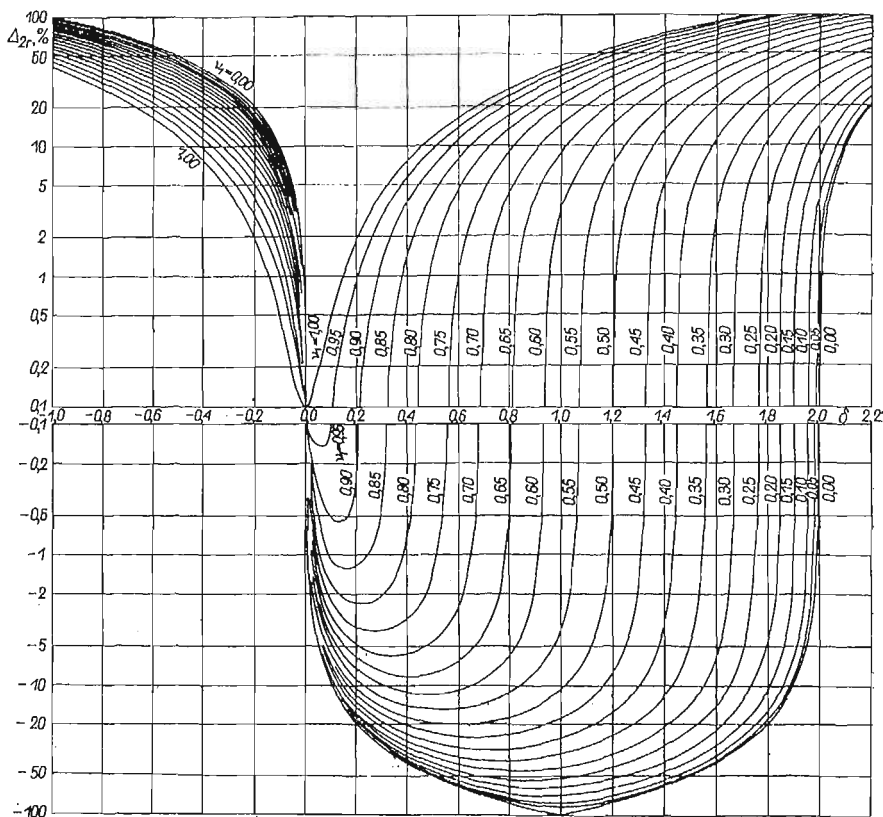
Łatwo się można przekonać dysponując odpowiednimi wartościami parametrów układów rzeczywistych, że błąd ten w odniesieniu do większości omawianych układów jest znikomy. I tak na przykład dla $\gamma/\gamma_1 < 0,2$ mamy $\Delta_{1r} < 1\%$.



Rys. 4

Wielkość momentu bezwładności masy wału może mieć również wpływ na wartość współrzędnej x_0 . Wpływ ten obrazuje wykres na rys. 4 i odnosi się do warunków

rezonansu ($\Omega = 1$), a oparty jest na wzorze wywodzącym się z zależności (2.8). I w tym przypadku, jak wynika ze wspomnianego wykresu, zastosowanie prostego wzoru (2.16) zamiast (2.8) (przy $\Omega = 1$) do omawianych tu układów jest w pełni dopuszczalne.



Rys. 5

Nieco inaczej przedstawia się sprawa wielkości błędu określenia amplitudy momentu reakcji wału w zależności od błędności ustawienia przyrządu pomiarowego δ . Wykres na rys. 5 ilustruje właśnie tę zależność, dla warunków rezonansowych $\Omega = 1$, i ma postać

$$(3.3) \quad \Delta_2 = \left[\sqrt{\frac{(1-\delta)^2 \Omega^2 + (1+\delta)^2 \nu_1^2}{\Omega^2 + \nu_1^2}} - 1 \right] 100 \%.$$

Warto zwrócić uwagę, że w przypadku gdy $\nu_1 \ll 1$ (co jest bardzo często spełnione w omawianych tu układach rzeczywistych) i wartość ν_1^2 można pominąć wobec jedności, wyrażenie (3.3) (dla $\Omega = 1$) przedstawić można w prostej postaci przybliżonej, bardzo użytecznej w zastosowaniu praktycznym

$$(3.4) \quad \Delta_{2r} = -100\delta \%.$$

Jest to więc zależność liniowa, która w praktyce wymaga niekiedy względnie dużej dokładności wyznaczenia miejsca pomiaru amplitud wychyleń skrętnych.

Wykresami na rys. 5 [lub wzorem (3.3)] można się również posługiwać przy określaniu amplitudy momentu reakcji wału w przypadku, gdy pomiar amplitud wychyleń został wykonany w dowolnym miejscu wału o współrzędnej x_1 , a więc gdy $x_1 \neq x_0$. Wymagana jest jednak wówczas znajomość współczynnika tłumienia ν_1 .

Jak wynika z przytoczonej wyżej analizy, posługiwanie się w praktyce obliczeniowej wzorem (2.14) lub (2.15) jest jedynie wówczas w pełni efektywne, jeżeli warunek przeprowadzenia pomiaru w miejscu określonym wzorem (2.13) lub (2.16) może być spełniony z dużą dokładnością. Dla innych przypadków z grupy (a) pozostawałaby alternatywa określania amplitud momentów reakcji drogą uprzedniego wyznaczenia współczynnika tłumienia śrubowego ν_1 albo wykonywania pomiarów w dwóch różnych miejscach wału (wzór 2.18), gdyby nie specjalna właściwość zależności (2.12) i (2.13). Przypuśćmy bowiem, że pomiar amplitud wychyleń skrętnych wykonany został nie w miejscu o współrzędnej x_0 , ale o współrzędnej $x_1 \neq x_0$, określonej wyrażeniem (3.1). Przypuśćmy następnie, że wartości x_1 i x_0 nie różnią się znacznie, co pozwala na przyjęcie, że pierwiastek we wzorze (2.12) jest niezależny od współczynnika tłumienia ν_1 .

Zakładając więc na przykład $\nu_1 = 0$ oraz używając wielkości x_1 jako współrzędnej miejsca rzeczywiście wykonanego pomiaru otrzymujemy ze wzoru (2.12)

$$(3.5) \quad T_R = \frac{\Phi_x K}{\frac{\gamma^2}{\Omega^2} - \frac{x_1}{L}}.$$

Okazuje się, że metoda oparta na wzorze (3.5) dopuszcza znacznie szerszy zakres tolerancji współrzędnej miejsca pomiaru x_0 . Wielkość tego zakresu uwarunkowana jest wielkością błędu wynikającego z zastosowania wzoru (3.5) zamiast wzoru (2.12).

Przyjmując, że $x_1 = f(\delta)$ zgodnie z zależnością (3.1), wspomniany wyżej błąd bezwzględny określa wzór

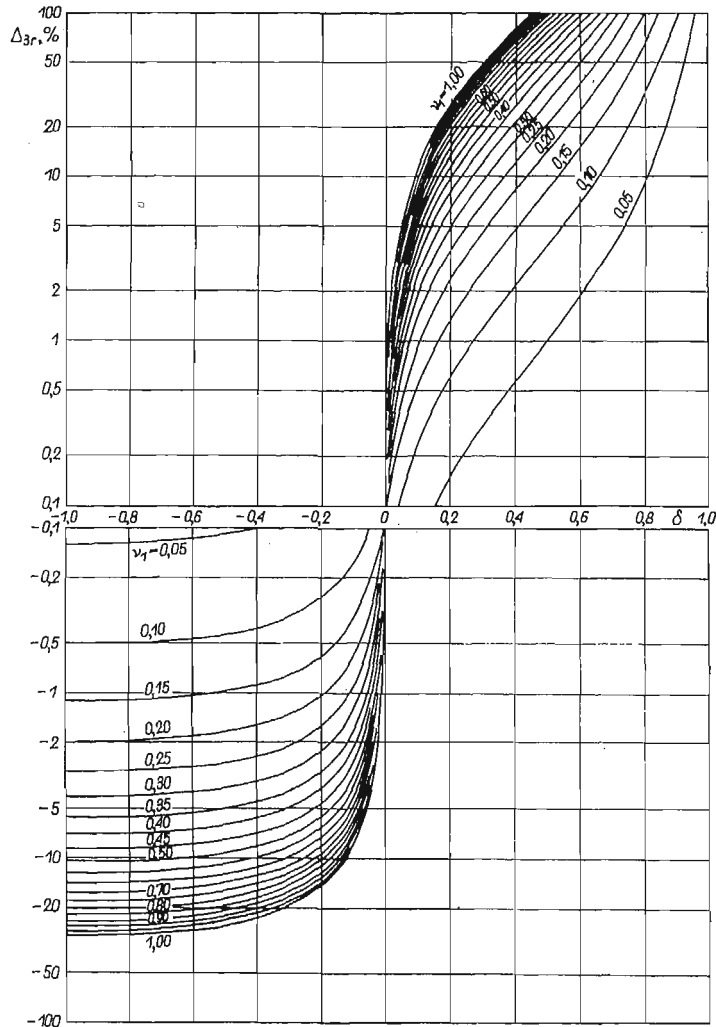
$$(3.6) \quad \Delta_3 = \left[\sqrt{\frac{\Omega^2 + \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^2 \nu_1^2}{\Omega^2 + \nu_1^2}} - 1 \right] 100 \ %.$$

Wykres na rys. 6 ilustruje zależność (3.6) przy $\Omega = 1$. Z analizy tej zależności wynika wniosek o dużym znaczeniu praktycznym dla układów, w których współczynnik tłumienia śrubowego jest mały, to znaczy przy $\nu_1 \ll 1$; warunek ten — jak już wspomniano — jest z reguły spełniony w zespołach okrętowych. Wniosek ten jest następujący: jeżeli pomiar amplitud wychyleń skrętnych wału wykonany został w miejscu, którego współrzędna spełnia warunek $0 \leq x_1 \leq x_0$, to wynik obliczenia amplitud momentu reakcji wału przy zastosowaniu wzoru (3.5) przy $\Omega = 1$ obarczony jest znikomym błędem. I tak na przykład dla układów, w których $\nu_1 \leq 0,20$, otrzymamy $\Delta_{3r} < 2 \ %$.

Dokładność wyników obliczeń, w których posługiwano się wzorem (2.18), nie wymaga pomiarów w ściśle określonym miejscu linii wału; postępowanie takie

nie komplikuje więc metod stosowanych dotąd dla doświadczalnego określenia dodatkowych naprężeń ścinających w wałach zespołów maszynowych.

Warto ponadto zwrócić uwagę na przydatność wzoru (2.18) do badania amplitud momentu reakcji w zakresie pozarezonansowym bez konieczności wyznaczenia



Rys. 6

ani wartości współczynnika tłumienia, ani też współrzędnych położenia przyrządów pomiarowych dla różnych częstości drgań. Znajomość tych amplitud jest często wymagana, a zwłaszcza dla warunków nominalnych pracy zespołów maszynowych.

4. Przykłady liczbowe

Przykład I. Temat do przykładu liczbowego zaczerpnięto z pracy [4] w wersji podanej w [1]. Wybór tego właśnie przykładu uzasadniony jest faktem, że przy-

tacza ono w nim wielkości pomierzonych amplitud wychyleń skrętnych w dwu miejscach wału oraz obliczono wartość amplitudy momentu reakcji w wale za pomocą własnej, szeroko uzasadnionej metody. Wielkości pomiarowe mogą więc służyć do obliczenia poszukiwanych wartości za pomocą wzorów wyprowadzonych w naszej pracy oraz do porównania wyników z wynikami uzyskanymi w [1].

Treść tematu w ujęciu pracy [1] jest następująca (oznaczenia przyjęto zgodnie ze stosowanymi w niniejszej pracy oraz podano wartości w układzie metrycznym): okrętowy zespół napędowy z silnikiem napędowym sześciocyndrowym, czterosuwowym, jednostronnego działania osiąga krytyczną liczbę obrotów trzeciego rzędu drgań jednowęzłowych przy $N_3 = 49$ obr/min. Pomiary drgań wykonano przy użyciu torsjografów Geigera w dwóch miejscach A i F na wale pośrednim. Należy określić naprężenia ścinające w wale pośrednim i śrubowym.

D a n e: Moment bezwładności mas silnika $J_2 = 444\,500$ kG cmsek.² (J_2 otrzymano z obliczeń metodą Holzera jako sumę iloczynów momentów bezwładności mas silnika przez odpowiadające im kwadraty amplitud wychyleń względnych). Moment bezwładności masy śrubowej napędowej $J_1 = 115\,250$ kG cm sek.² (łącznie z masą wody towarzyszącej). Częstość drgań swobodnych $f_1 = 147$ obr/min. (wartość pomierzona). Współczynnik sztywności wału $K = p_1^2 : (1/J_1 + 1/J_2) = 21,65 \cdot 10^6$ kGcm/rad., gdzie $p_1 = \frac{2\pi f_1}{60} = 15,4$ rad./sek. Współczynnik tłumienia śrubowego

$e_1 = 236\,700$ kG cm sek./rad., lub $\nu_1 = \frac{e_1}{I_1 p_1} = 0,1334$). Moment wymuszający

trzeciego rzędu $T_0 = T_3(\sum \vec{\lambda})_3 = 2,025 \cdot 10^6$ kGcm. Średnica wału pośredniego $D_e = 312$ mm. Średnica wału śrubowego $D_s = 349$ mm.

Torsjografy przystosowano do pomiarów przez zastąpienie ich normalnych bębnow (średnicy $D_T = 148$ mm) większymi aluminiowymi bębnami o średnicy $D_{T'}$ = 220 mm. Pomiary wykonano przy przełożeniu statycznym zapisu $m_s = 3$ i przy dynamicznym przełożeniu $m_d = 1$. Podwójne amplitudy zarejestrowane na taśmach wynosiły $h_F = 18,5$ mm na przyrządzie w położeniu F (bliżej silnika) i $h_A = 36,0$ mm na przyrządzie w położeniu A (bliżej śruby napędowej).

I.1. A m p l i t u d y w y c h y l e ń w a ł u w m i e j s c a c h p o m i a r u. Wielkość amplitud wychyleń może być określona za pomocą wzoru (1) w pracy [7] (str. 595), z którego wynika

$$\Phi = \frac{h}{D_e m_d m_s \cdot (D_T/D_{T'})} = 1,59 \cdot 10^{-3} h \text{ rad.}$$

Stosunek $D_T/D_{T'}$, uwzględnia fakt, że bęben napędowy torsjografu posiadał średnicę $D_{T'}$, różną od średnicy normalnej D_T .

Ostatecznie amplitudy wychyleń wału w obu miejscach pomiarowych są następujące:

$$\Phi_F = \pm 1,59 \cdot 10^{-3} \cdot 18,5 = 0,0294 \text{ rad.}$$

$$\Phi_A = \pm 1,59 \cdot 10^{-3} \cdot 36,0 = 0,0572 \text{ rad.}$$

I.2. Dodatkowe naprężenia ścinające w wale obliczone metodą S. Archera (wyniki obliczeń p. [7], str. 601)

$$T_{sh} = 21,65 \cdot 10^6 \cdot 0,181 = \pm 3,92 \cdot 10^5 \text{ kGcm};$$

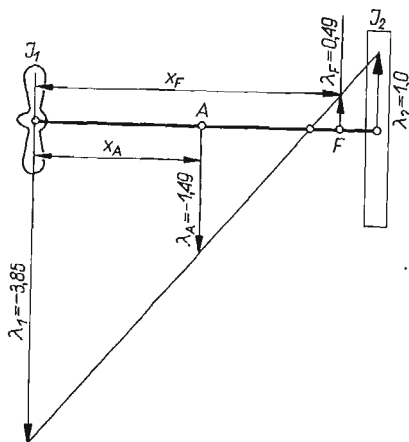
$$\text{wał pośrodkni } \tau'_{D_e} = T_{sh} / \left(\frac{\pi}{16} D_e^3 \right) = \pm 655 \text{ kG/cm}^2;$$

$$\text{wał śrubowy } \tau'_{D_s} = T_{sh} / \left(\frac{\pi}{16} D_s^3 \right) = \pm 473 \text{ kG/cm}^2.$$

I.3. Dodatkowe naprężenia ścinające w wale obliczone za pomocą wzorów wyprowadzonych w niniejszym artykule. Długość wału L wyznaczać można ze znanego wzoru na długość zredukowaną

$$L = \pi/32 = GD_e^4/K = 3583,0 \text{ cm}.$$

Tutaj przyjęto $G = 8,3 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$.



Rys. 7

Wartość x_A i x_F (odległości punktów pomiarowych od początku układu, to jest od masy śruby napędowej) wyznaczamy z prostych zależności geometrycznych wynikających z rys. 7:

$$x_A = 1741,0 \text{ cm lub } x_A/L = 0,486,$$

$$x_F = 3230,0 \text{ cm lub } x_F/L = 0,901.$$

Współrzędna miejsca na wale, w którym powinny być przeprowadzone pomiary tak, aby można było zastosować wzór (2.15), obliczamy na podstawie warunku (2.16)

$$x_0/L_r = 0,397 \quad \text{lub} \quad x_{0r} = 1422,0 \text{ cm}.$$

Pomiary zostały więc wykonane w miejscach o współrzędnych różniących się znacznie od x_{0r} . Wskaźniki błędów ustawienia przyrządów wyznaczone z zależności (3.1) wynoszą $\delta_A = 0,227$; $\delta_F = 1,270$.

a. Na podstawie wzoru (2.12) w warunkach rezonansu ($\Omega = 1$) mamy $T_{RrA} = 3,97 \cdot 10^6 \text{ kGcm}$, $T_{RrF} = 3,98 \cdot 10^6 \text{ kGcm}$.

Wielkość błędu bezwzględego, jakim obarczone są te wyniki względem wartości otrzymanej metodą Archera w p. 1.2, wynoszą odpowiednio $\delta_{r_A}' = 1,3 \%$, $\delta_{r_F}' = 1,6 \%$. Przyjmując, że $T_{Rr} = 3,975 \cdot 10^6$ kGcm, obliczamy dodatkowe naprężenia ścinające w wale pośrednim $\tau_{D_e}' = 666$ kG/cm² i w wale śrubowym $\tau_{D_s}' = 475$ kG/cm².

b. Na podstawie wzoru (2.15)

$$T_{Rr} = \frac{2 \cdot 21,65 \cdot 10^6}{0,794} \Phi = 54,58 \cdot 10^6 \cdot \Phi \text{ kG cm},$$

$$T_{RrA} = 54,58 \cdot 10^6 \cdot 0,0572 = 3,120 \cdot 10^6 \text{ kG cm},$$

$$T_{RrF} = 54,58 \cdot 10^6 \cdot 0,0294 = 1,605 \cdot 10^6 \text{ kG cm}.$$

Posługując się wykresami na rys. 5 określamy wielkości błędu, jakimi obarczone są wyniki względem wartości wynikających ze wzoru (2.12). Dla $\delta_A = 0,227$ $\Delta_{2rA} = -20 \%$, a dla $\delta_F = 1,270$ $\Delta_{2rF} = -59 \%$.

c. Na podstawie wzoru (3.5) otrzymujemy $T_{RrA} = 4,02 \cdot 10^6$ kGcm, a $T_{RrF} = 5,95 \cdot 10^6$ kG cm.

Posługując się wykresami na rys. 6 określamy wielkości błędu, jakimi obarczone są te wyniki względem wartości wynikających ze wzoru (2.12). Dla $\delta_A = 0,227$ $\Delta_{3rA} = +1,2 \%$, a dla $\delta_F = 1,270$ $\Delta_{3rF} = +50 \%^1$.

d. Na podstawie wzoru (2.18) obliczamy $T_{RrAF} = 3,98 \cdot 10^6$ kG cm.

Błąd obliczony względem wyniku otrzymanego przy zastosowaniu metody Archera wynosi tu $\Delta_{rAF} = 0,1 \%$.

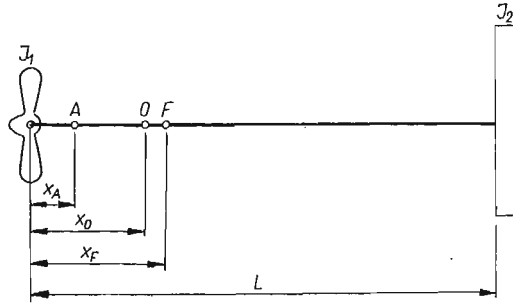
Przykład II. Statek drobnicowy 9500 TDW z silnikiem napędowym wysoko-
prężnym sześciocyndrowym, dwusuwowym, jednostronnego działania, o mocy efektywnej 7200 KM. Krytyczna liczba obrotów drgań skrętnych jednowęzłowych zespołu napędowego $N_6 \approx 32,5$ obr/min. Pomiary drgań skrętnych wykonano przy użyciu dwu torsjografów Geigera w miejscach *A* i *F* (rys. 8) na wale pośrednim. Należy określić największe dodatkowe naprężenia w wale pośrednim i śrubowym.

D a n e. Zastępczy moment bezwładności mas silnika $J_2 = 2,2035 \cdot 10^6$ kGcmsek². Moment bezwładności masy śruby napędowej $J_1 = 1,1544 \cdot 10^6$ kGcmsek.² (łącznie z masą wody towarzyszącej). Częstość drgań swobodnych $f_1 = 197,0$ okr/min. (wartość pomierzona). Współczynnik sztywności wału $K = P_1^2 : (1/J_1 + 1/J_2) = 32,53 \cdot 10^6$ kG cm/rad., gdzie $p_1 = 2\pi f_1/60 = 20,68$ rad./sek. Współczynnik tłumienia śrubowego $\varrho_1 = 171\,900$ kGcm sek./rad. (obliczony metodą Archera) lub $\nu_1 = \varrho_1/J_1 p_1 = 0,0716$. Średnica wału pośredniego $D_e = 370$ mm. Średnica wału śrubowego $D_s = 440$ mm.

Torsjografy przystosowano do pomiarów w ten sposób, aby przełożenie statyczne zapisu wychyleń było $m_s = 1$. W tym celu zastąpiono w miejscu pomiarowym *A* normalną dźwignię masy wirującej torsjografu dźwignią dającą przełożenie zapisu trzy razy mniejsze. Natomiast w miejscu *F* zastąpiono normalny bęben przyrządu

¹ Wartość obliczona ze wzoru (3.6).

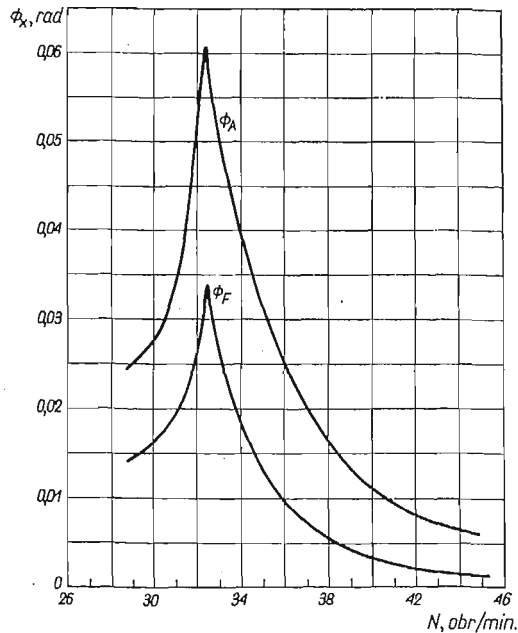
(o średnicy $D_T = 148$ mm) bębnem o trzykrotnie większej średnicy $D_{T'} = 444$ mm. Dynamiczne przełożenie zapisu było $m_d = 1$ (miękkie sprężyny masy wirującej i rysika).



Rys. 8

II.1. Amplitudy wychyleń skrętnych wału w miejscach pomiarów. Wielkości tych amplitud odczytać można z wykresów na rys. 9. Wykresy te wykonano na podstawie wyników 12 pomiarów przeprowadzonych na każdym stanowisku w zakresie

$$29 \text{ obr./min.} \leq N \leq 45 \text{ obr./min.}$$



Rys. 9

Wartości amplitud Φ obliczono przy użyciu wzoru

$$\Phi = h/D_e m_s m_d = 2,7 \cdot 10^{-3} \cdot h \text{ rad,}$$

gdzie h oznacza wielkość w mm zarejestrowanych podwójnych amplitud wychyleń.

Największe amplitudy wychyleń w miejscach pomiarów A i F przy $N = 32,8$ obr./min. odczytane z wykresów wynoszą odpowiednio $\Phi_{rA} = 0,0605$ rad., $\Phi_{rF} = 0,0340$ rad.

II.2. Parametry położenia miejsc pomiarów. Długość wału zredukowana na średnicę wału pośredniego

$$L = \frac{\pi}{32} \frac{GD_e^4}{K} = 4,7 \cdot 10^3 \text{ cm},$$

gdzie G jest modułem sprężystości na skręcanie materiałów wału (stal); przyjęto $G = 8,3 \cdot 10^5$ kG/cm².

Współrzedną x_F (odległość miejsca pomiaru F od masy śruby napędowej) ustalono na podstawie wzoru (2.16) dla x_{0r}

$$x_{0r} = \frac{220 \ 350 \cdot 4,7 \cdot 10^3}{2(115 \ 440 + 220 \cdot 350)} = 1546 \text{ cm}.$$

Jak łatwo sprawdzić, miejsce na wale określone tą współrzedną znajduje się tuż przy złączeniu dwu odcinków wału pośredniego. Pomiar przeprowadzono więc za złączem w miejscu o współrzednej $x_F = 1590$ cm lub $x_F/L = 0,3384$.

Położenie miejsca pomiaru A określono w zasadzie w sposób dowolny. Kierowano się jednak chęcią sprawdzenia słuszności tezy wynikającej z dyskusji błędu przy zastosowaniu wzoru (3.5). Przyrząd A umieszczono więc możliwie blisko masy śruby napędowej, a dogodne warunki techniczne do ustawienia przyrządu istniały w miejscu o współrzednej $x_A = 436$ cm lub $x_A/L = 0,0929$.

Wskaźniki błędu ustawienia przyrządów wyznaczono z zależności (3.1): $\delta_{rA} = -0,7175$, $\delta_{rF} = 0,0280$.

II.3. Największe amplitudy momentu reakcji od drgań skrętnych w wale (warunki rezonansowe). a. Na podstawie wzoru (2.15) mamy

$$T_{Rr} = 2\Phi_{x0}K/\gamma^2 = 98,95 \cdot 10^6 \Phi_{x0}.$$

$$T_{RrA} = 98,95 \cdot 10^6 \cdot 0,0605 = 5,990 \cdot 10^6 \text{ kGcm},$$

$$T_{RrF} = 98,95 \cdot 10^6 \cdot 0,0340 = 3,364 \cdot 10^6 \text{ kGcm}.$$

Wielkość błędu, jakim obarczona jest wartość T_{RrF} , obliczyć można ze wzoru (3.4) wiedząc, że współczynnik tłumienia jest wielkością bardzo małą ($\nu_1 \ll 1$),

$$\Delta_{2rF} = -100\delta_F = -2,8\%,$$

co można stwierdzić również na wykresie rys. 5. Wobec tego skorygowana wartość amplitudy momentu reakcji wału wynosi $T_{Rr} = 3,460 \cdot 10^6$ kGcm.

Błąd bezwzględny tkwiący w obliczonej wartości T_{RrA} (przyjmując T_{Rr} jako wartość ścisłą) wynosi $\Delta_{2rA} = 73,1\%$.

b. Na podstawie wzoru (2.12) w warunkach rezonansu ($\Omega = 1$) (używając współczynnika tłumienia ν_1 obliczonego metodą Archera) mamy

$$T_{RrA} = 0,0605 \cdot 32,53 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{1+0,0716^2}{(0,6575-0,0929)^2+(0,0716 \cdot 0,0929)^2}} = 3,490 \cdot 10^6 \text{ kGcm},$$

$$T_{RrF} = 0,0340 \cdot 32,53 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{1+0,0716^2}{(0,6575-0,3384)^2+(0,0716 \cdot 0,3384)^2}} = 3,460 \cdot 10^6 \text{ kGcm}.$$

Błąd bezwzględny, jakim obarczone są te wartości w odniesieniu do wartości T_{Rr} , obliczonej w punkcie (a) tego przykładu, wynosi $\Delta_{rA} = 1,0\%$, $\Delta_{rF} = 0,0\%$.

c. Na podstawie wzoru (3.5) otrzymujemy

$$T_{RrA} = \frac{0,0605 \cdot 32,53 \cdot 10^6}{0,6575-0,0929} = 3,485 \cdot 10^6 \text{ kGcm},$$

$$T_{RrF} = \frac{0,0340 \cdot 32,53 \cdot 10^6}{0,6575-0,3384} = 3,463 \cdot 10^6 \text{ kGcm}.$$

Wielkości błędów, jakimi obarczone są te wyniki w odniesieniu do wartości T_{Rr} , obliczonej w p. (a) tego przykładu wynoszą

$$\Delta_{rA} = 0,8\%, \quad \Delta_{rF} = 0,1\%.$$

d. Na podstawie wzoru (2.18) dla warunków rezonansowych $T_{RrAF} = 3,460 \cdot 10^6$ kGcm, tak więc wielkość błędów względem wartości T_{Rr} obliczonej w p. (a) wynosi $\Delta_{rAF} = 0,0\%$.

e. Wartość dodatkowych naprężeń ścinających w wale pośrednim i śrubowym obliczamy na podstawie wzoru

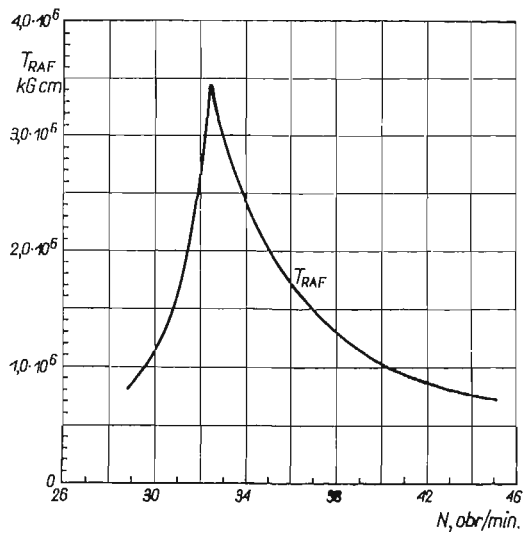
$$\tau' = T_{Rr}/W,$$

gdzie T_{Rr} oznacza wartości amplitud momentu reakcji wyznaczone w p. (a)–(d) tego przykładu, a W — wskaźnik przekroju na skręcanie wału pośredniego względnie śrubowego.

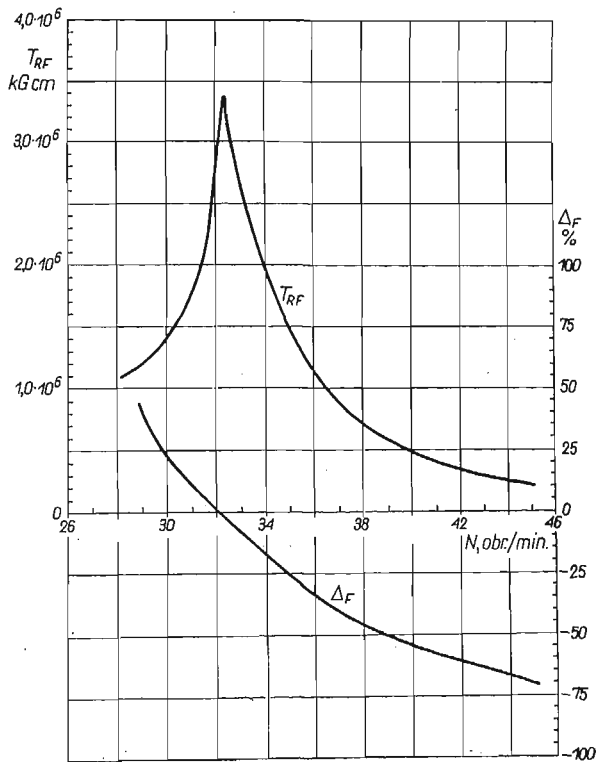
II. 4. Amplitudy momentu reakcji w całym badanym zakresie ilości obrotów (29 obr./min. $\leq N \leq 45$ obr./min.).

a. Rzędne wykresu na rys. 10, przedstawiające wartości amplitud momentu reakcji w podanym wyżej zakresie, obliczono za pomocą wzoru (2.18). Należy tu podkreślić, że wartości te nie są obciążone błędami ani pochodzącymi od współczynników tłumienia, ani od nieprawidłowego ustawienia przyrządów [rozumianego w sensie wyrażenia (3.1)], a jedynie błędami pomiarowymi (łącznie z analizą zapisów na taśmach pomiarowych). Nie bierzemy tu pod uwagę błędów wynikających z zastosowania uproszczonego modelu układu drgającego.

b. Wykresy na rys. 11 i 12 ilustrujące wartości amplitud momentu reakcji w badanym zakresie liczb obrotów obliczono odpowiednio według wzorów (2.14) i (3.5) oraz wielkości błędów bezwzględnych, jakim obarczone są te wartości. Wartości amplitud przedstawione na wykresie na rys. 10 przyjęto za ścisłe.

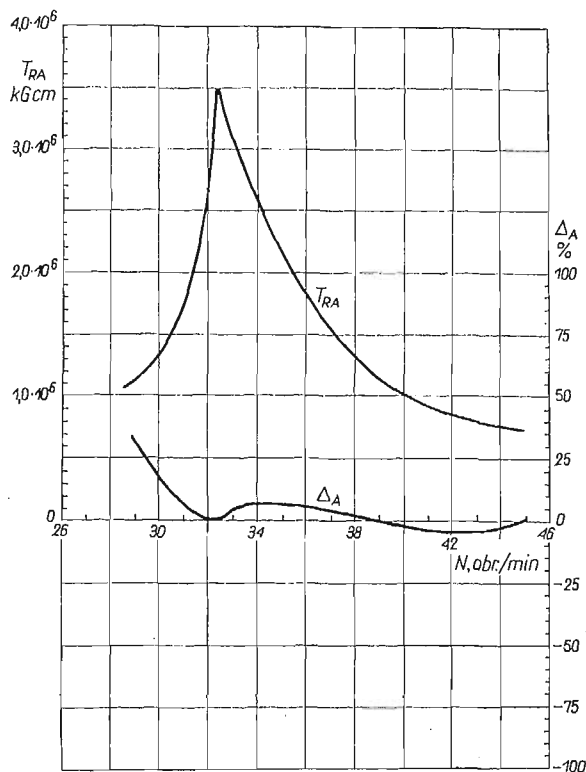


Rys. 10



Rys. 11

Interpretacja omawianych wykresów nie nastęrcza większych trudności, warto jednak zwrócić uwagę na potwierdzenie przytoczonego w p. 2.2 wniosku o przydatności praktycznej stosowania metody opartej na wzorze (3.5) głównie ze względu na dopuszczalność względnie dużej tolerancji w określaniu położenia przyrządu



Rys. 12

pomiarowego. Natomiast metoda oparta na wzorze (2.14) wymaga w znacznie większym stopniu przestrzegania warunku (2.12), co w praktyce sprowadza się do zmiany usytuowania przyrządu pomiarowego oraz zmiany częstości drgań.

Wnioski

Wychodząc z równania różniczkowego drgań skrętnych wału jako układu ciągłego oraz z warunków brzegowych określających obciążenie obu jego końców wyprowadzono związek, zachodzący między amplitudą momentu reakcji a amplitudą wychyleń skrętnych w dowolnym przekroju wału. Związek ten charakteryzuje się głównie niezależnością od współczynnika tłumienia drgań jednej z mas, a w przekrojach wału o określonych współrzędnych jest on niezależny również od współczynnika tłumienia drgań drugiej masy.

Wyprowadzone zależności wolne od współczynników tłumienia otrzymują bardzo prostą i szczególnie dogodną w praktycznym zastosowaniu postać dla przy-

padków, w których możliwe jest pominięcie wpływu masy wału. W każdym takim przypadku istnieje wprawdzie jeden tylko przekrój wału, w którym amplitudy momentu reakcji nie są zależne bezpośrednio (a jedynie poprzez amplitudy wychyleń) od współczynników tłumienia drgań obu mas, ale wyznaczenie wartości tych amplitud w jednym przekroju jest wystarczające, ponieważ wiadomo, że są one stałe na całej długości wału. Zakres stosowalności najistotniejszego z wyprowadzonych związków, uproszczonego przez pominięcie wpływu masy wału, wynika z przytoczonej funkcji błędu (przedstawionej również graficznie).

Okazuje się ponadto, że prostą i niezależną bezpośrednio od współczynników tłumienia postać zależności amplitud momentu reakcji i amplitud wychyleń uzyskać można dla przypadków, w których pomiary amplitud wychyleń wykonano w dwu dowolnych przekrojach wału.

Warto tu wreszcie zwrócić uwagę, że chociaż omawiane związki w postaci uproszczonej dotyczą układu dyskretnego, to najwygodniejsza droga ich wyprowadzenia prowadzi poprzez równania ruchu drgającego układu ciągłego.

Zależności przedstawione w części teoretycznej stanowią podstawę dla dogodnych w praktyce metod doświadczalnego określania wielkości dodatkowych naprężeń ścinających od wymuszonych drgań skrętnych w wałach różnego typu układów rzeczywistych, a w szczególności okrętowych zespołów napędowych, które mogą być przedstawione w postaci dwumasowego modelu układu dyskretnego. Na uwagę zasługują w szczególności trzy grupy przypadków:

a. Znany jest współczynnik tłumienia drgań masy, na którą nie działa moment wymuszający. Zastosowanie znajduje wzór (2.12), przy czym ważne jest, że pomiar amplitud wychyleń wału może być wykonany w dowolnym miejscu wału (w odległości x_1 od masy o momencie bezwładności J_1).

b. Nie znane są wartości współczynnika tłumienia (nawet w przybliżeniu);

b') pomiar amplitud wychyleń wału musi być wykonany w określonej wzorem (2.13) odległości od masy o momencie bezwładności J_1 , a do określenia amplitudy momentu reakcji znajduje zastosowanie wzór (2.14);

b'') pomiar amplitud wychyleń musi być wykonany w dwu dowolnych miejscach wału, a amplitudy momentu reakcji określa wówczas wzór (2.18).

c. Wiadomo, że współczynnik tłumienia drgań masy, na którą nie działa moment wymuszający, jest wielkością małą, $\nu_1 \ll 1$.

Pomiar amplitud wychyleń wału może być wykonany w dowolnym miejscu, którego współrzędną ogranicza nierówność

$$0 \leq x_1 \leq \frac{L\nu^2}{2\Omega^2},$$

amplitudę momentu reakcji wyznacza wtedy wzór (3.5).

Warto w zakończeniu podkreślić, że istotnym walorem metody stosowanej w przypadkach (b) i (c) jest brak konieczności używania do obliczeń takich współczynników empirycznych jak współczynniki tłumienia drgań. Pomiar amplitud wychyleń wału nabiera wówczas sensu bardziej ogólnego i staje się w pełni uzasadniony.

Literatura cytowana w tekście

1. T. AGOPSOWICZ, *Analiza teoretyczna i doświadczalna nieliniowych drgań skrętnych wału pośredniego i śrubowego holownika 300 KM m/s „Bogdan”*, Budownictwo Okrętowe.
2. T. AGOPSOWICZ, *Drgania wymuszone pewnych układów sprężystych z tarciem suchym i analiza możliwości zastosowań do badania drgań śruby okrętowej*, Zesz. Nauk. Pol. Gdańskiej, Budown. Okrętowe 5, 1965.
3. S. ARCHER, *Torsional vibration damping coefficients for marine propellers*, Engineering, 13 May 1955, 594–598.
4. S. ARCHER, *Contribution to improved accuracy in the calculation and measurement of torsional vibration stresses in marine propeller shafting*, Proc. Inst. Mech. Engrs., 164, London 1951.
5. S. ARCHER, *Screwshaft casualties. The influence of torsional vibration and propeller immersion*, Trans. Instn. Nev. Arch., 91 (1949).
6. R. W. S. MITCHELL, *The design office problem in the estimation of the resonance characteristics of small marine*, Propulsion Units, Proc. Inst. Mech. Engrs, 149, London.
7. E. J. NESTORIDES, *A Handbook on Torsional Vibration*, Cambridge 1958.
8. J. NALESZKIEWICZ, *Drgania kadłubów okrętowych*, Wydawnictwa Morskie, Gdańsk 1951.
9. В. П. ТИЕРСКИХ, *Расчеты крутильных колебаний силовых установок*, Машгиз, 1954.
10. S. TIMOSHENKO, *Vibration Problems in Engineering*, Second Edition, N. York 1947.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ЗАВИСИМОСТИ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ И РЕАКТИВНЫХ
МОМЕНТОВ ВАЛОВ КАК ОСНОВА МЕТОДА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

После критической оценки применяемых методов экспериментального определения величин переменных касательных напряжений в валах различного рода силовых установок (судовые силовые установки, электрические, компрессорные и насосные агрегаты и т.п.), на которые действуют вынужденные крутильные колебания, выводятся зависимости амплитуд крутильных отклонений и амплитуд реактивных моментов в вале определенной модели упругой системы (вал с распределенной массой, закончен двумя сосредоточенными массами, с учетом вязкого сопротивления обеих масс и с гармоническим возбуждением, действующим на одну из них).

Эти зависимости характерны так своей простой формой, как и непосредственной независимостью от коэффициентов демпфирования колебаний, что специально существенно в практических применениях.

Анализ возможности применений выведенных зависимостей для экспериментального определения переменных касательных напряжений в валах производится для судовых силовых установок с поршневыми двигателями, обращая внимание на возможность избежания серьезных ошибок, связанных с применением методов, в которых необходимо пользоваться коэффициентами демпфирования колебаний.

В заключительной части приводятся два численных примера из практики, один из которых основан на результатах измерений, опубликованных в английской технической литературе, второй же происходит из собственных испытаний, произведенных на одном из судов польского торгового флота.

S u m m a r y**SOME RELATIONS OF TORSIONAL VIBRATORY SWING AND TORQUE AS A BASE OF EXPERIMENTAL METHOD OF DETERMINING VIBRATION STRESSES IN SHAFTS**

The author presents a critical review of the methods of experimental determination of the torsional vibration stresses in shafting of diverse types of engine systems (marine propeller shafting systems, engines coupled to generators, compressors or pumps, etc.) subjected to forced torsional vibration. Relations have been established for torsional vibration amplitudes and amplitudes of vibration torque in shaft of the definite model of elastic system (a continuous shaft with two concentrated masses at its tips, consideration being given to viscous damping, both of the masses and a harmonic exciting torque acting on one of them). These relations are characterized by a simple form and direct independence of the vibration damping coefficients; therefore, they are very useful in practical application.

An analysis of the possibilities of applying these relations in practice has been performed on marine propeller shafting systems with piston engine installations; it has been pointed out that the possibility exists of avoiding serious errors resulting from the application of methods which require the use of vibration damping coefficients.

The concluding part of the paper gives two numerical examples: one of them is based on the results of experiments published in British technical periodical, the other one on the tests carried out on one of the Polish merchant ships.

**KATEDRA KONSTRUKCJI OKRĘTÓW
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ**

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1965 r.
