

## STATECZNOŚĆ RUCHU UKŁADU OSCYLATORÓW PORUSZAJĄCYCH SIĘ PO BELCE NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

SYLWESTER KALISKI (WARSZAWA)

### Wstęp

W pracy [1] rozważony został problem drgań samowzbudnych układu oscylatorów mechanicznych poruszających się po powierzchni półprzestrzeni sprężystej. Wyznaczono prędkości krytyczne oraz obszary niestateczności, wewnątrz których drgania oscylatorów mają charakter narastający. Praca [1] niezależnie od jej bezpośredniego znaczenia w mechanice stanowiła wstęp do znacznie ogólniejszego zagadnienia z dziedziny magnetosprężystości, dotyczącego samowzbudnego narastania drgań strumienia elektronów nad doskonałym przewodnikiem sprężystym w pierwotnym polu magnetycznym. Zagadnienie to stanowi temat odrębnej publikacji.

Jednakże w związku z pracą [1] nasuwa się podobne zagadnienie, mianowicie zagadnienie stateczności ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na podłożu sprężystym. Rozwiązanie tego zagadnienia stanowi cel niniejszej pracy.

Podobne zagadnienie było rozważane w pracy [2] przy badaniu ruchu masy poruszającej się po belce na podłożu sprężystym przy działaniu na masę okresowej siły wymuszającej. Rozważono tam również kwestię uresorowania masy jednakże pod kątem drgań wymuszonych, nie rozważano natomiast problemu drgań samowzbudnych. Problem ruchu masy po belce rozpatrzono w wielu pracach, których nie cytujemy tutaj (por. np. [3]).

Sformułowane wyżej zagadnienie posiada liczne bezpośrednie aspekty praktyczne, wspomnimy tutaj chociażby problem stateczności pojazdów uresorowanych na szynach itp. Prędkości krytyczne ruchu statecznego są w takich przypadkach dość wysokie, jednakże biorąc pod uwagę coraz to większe stosowane prędkości eksploatacyjne zagadnienie to nabiera coraz większej wagi praktycznej.

W pracy zastosujemy metodykę rozwiązania opracowaną w [1]. Poza tym ograniczymy się gwooli przejrzystości wywodów oraz otrzymania prostych wyników do przypadku najprostszego, tj. układu liniowych oscylatorów bez tłumików, rozłożonych równomiernie oraz poruszających się ze stałą prędkością  $U$ . Oczywiście uogólnienie rezultatów na przypadek oscylatorów rozłożonych gęsto na odcinku bądź oscylatora skupionego, jak również uwzględnienie tłumie-

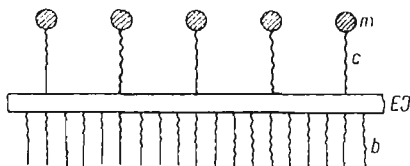
nia nie przedstawia przy stosowanej metodzie rozwiązania żadnych trudności. Wyniki jakościowe nie ulegają w zasadzie zmianie, pewne osobliwości wprowadza jedynie tłumienie, jeśli osiąga pewne wartości krytyczne.

Inaczej ma się oczywiście sprawa z oscylatorami nieliniowymi; tutaj pojawiają się trudności dodatkowe natury zasadniczej. Niektóre jednak przypadki szczególnie zarówno w [1] jak i w rozpatrywanym obecnie problemie można rozwiązać; odkładamy je do dalszych prac.

W punkcie drugim niniejszej pracy podajemy równania wyjściowe, w punkcie trzecim konstruujemy rozwiązania otrzymanych równań oraz dyskutujemy warunki niestateczności, w punkcie czwartym obliczamy parametry krytyczne i obszary niestateczności dla różnych przebiegów parametrów wyjściowych zadania, wreszcie w punkcie piątym podajemy uogólnione sformułowanie problemu na przypadek oscylatorów złożonych o kilku stopniach swobody.

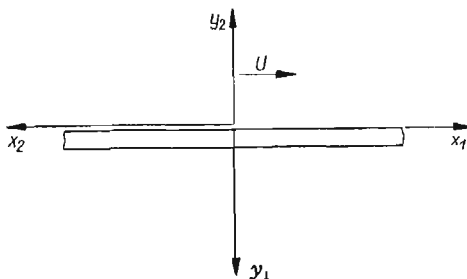
## 2. Równania ruchu

Rozważmy belkę na podłożu sprężystym, po której porusza się gęsto równomiernie rozłożony układ oscylatorów mechanicznych (rys. 1) o masie  $m$  oraz stałej sprężystej  $c$ , odniesionych do jednostki długości belki.



Rys. 1

Układ oscylatorów porusza się w kierunku  $x_1$  ze stałą prędkością  $U$ . Rozważmy dwa układy współrzędnych, jeden związany z ruchomym układem oscylatorów, drugi z belką (rys. 2).



Rys. 2

Niech na belkę działa ruchome okresowe ciśnienie

$$(2.1) \quad p_1(x_1, t) = p e^{ik_1(x_1 - v_1 t)},$$

analogicznie na układ oscylatorów

$$(2.2) \quad p_2(x_2, t) = p e^{ik_2(x_2 - v_2 t)}.$$

Ciśnienie działające na układ oscylatorów działa na sprężyny oscylatorów w płaszczyźnie kontaktu z belką (rys. 1).

Równanie ruchu belki przyjmie w związku z tym postać

$$(2.3) \quad EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^4} + \rho \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + b y_1 = p_1(x_1, t),$$

gdzie  $EI$  oznacza sztywność belki,  $\rho$  masę belki na jednostkę długości,  $b$  stałą sprężystą podłoża na jednostkę długości belki.

Równania ruchu układu oscylatorów mają postać

$$(2.4) \quad m \ddot{y}_2 + c(y_2 - y_{20}) = 0,$$

gdzie  $y_{20}$  jest przemieszczeniem punktu styku oscylatora z belką. Funkcje  $y_2$  oraz  $y_{20}$  zależą od  $x_2$  i  $t$ .

Przy drganiach okresowych  $y_2$  wyrazi się oczywiście przez  $y_{20}$  za pomocą warunku brzegowego

$$(2.5) \quad c(y_2 - y_{20}) = -p_2(x_2, t).$$

Jeżeli oba układy współrzędnych, tj. dla belki i oscylatorów są związane ze sobą, wtedy muszą dodatkowo zachodzić związki zgodności przemieszczeń  $y_1$  i  $y_{20}$  oraz zgodności ciśnień  $p_1$ ,  $p_2$ :

$$(2.6) \quad p_1 = p_2, \quad y_1 = -y_{20}.$$

Warunki (2.6) są już zapisane w jednolitym układzie współrzędnych (związanym z belką).

Związki pomiędzy obu układami współrzędnych (rys. 2) są następujące:

$$(2.7) \quad x_1 + x_2 = Ut, \quad y_1 + y_2 = 0,$$

gdzie  $U$  jest prędkością przemieszczania się układu oscylatorów po belce.

Przytoczone wyżej oba układy równań oraz związki (2.6) i (2.7) określają w pełni nasz problem. Będziemy poszukiwali takich obszarów zmiany  $U$ , przy których rozwiązania zagadnienia w postaci fal bieżących przestaną być stateczne, tj. przy których amplitudy drgań będą narastać w czasie.

Przejdźmy obecnie do dyskusji rozwiązań powyższych równań oraz warunku niestateczności drgań.

### 3. Rozwiązanie równań i warunki niestateczności drgań

Rozwiązań równań (2.3) i (2.4) poszukiwać będziemy w postaci:

$$(3.1) \quad y_1 = A e^{ik_1(x_1 - v_1 t)}, \quad y_{20} = B e^{ik_2(x_1 - v_2 t)}, \quad y_2 = C e^{ik_3(x_2 - v_3 t)}.$$

Podstawiając (3.1) do układu równań (2.3) i (2.4) znajdujemy wykorzystując (2.1) i (2.2) oraz (2.5)

$$(3.2) \quad A = \frac{p}{EI k_1^4 - \rho k_1^2 v_1^2 + b} = \frac{p}{\rho k_1^2 (R - v_1^2)},$$

gdzie

$$R = \frac{1}{\rho} \left( EI k_1^2 + \frac{b}{k_1^2} \right)$$

oraz

$$(3.3) \quad B = - \frac{\alpha_0^2 - v_2^2}{v_2^2} \frac{p}{c} = - \frac{p}{m k_2^2} \frac{\alpha_0^2 - v_2^2}{\alpha_0^2 v_2^2},$$

$$(3.4) \quad C = - \frac{p}{c} \frac{\alpha_0^2}{v_2^2} = - \frac{p}{m k_2^2} \frac{1}{v_2^2},$$

gdzie  $\alpha_0^2 = c/mk_2^2$ .

Rozwiązania niestateczne, a więc drgania samowzbudne, wystąpią wtedy, gdy

$$(3.5) \quad \text{Im}(k_i v_i) > 0.$$

Dla otrzymania równania charakterystycznego, z którego wyznaczmy parametry krytyczne  $U$ , zwiążemy oba układy rozwiązań (3.2), (3.3) i (3.4) z warunkami (2.6) i (2.7). Mianowicie z pierwszego z warunków (2.6) przy wykorzystaniu również pierwszego z warunków (2.7) znajdujemy w jednolitym układzie współrzędnych

$$(3.6) \quad k_1 + k_2 = 0,$$

skąd przyjmujemy

$$(3.7) \quad k_1 = k, \quad k_2 = -k$$

oraz

$$(3.8) \quad v_1 + v_2 = U.$$

Następnie na podstawie drugiego z warunków (2.6) oraz (2.7) otrzymamy po wykorzystaniu (3.7) oraz pierwszego z warunków (2.6)

$$(3.9) \quad \frac{1}{\rho k^2 (R - v_1^2)} = \frac{1}{m k^2} \frac{\alpha_0^2 - v_2^2}{\alpha_0^2 v_2^2},$$

lub

$$(3.10) \quad v_1^2 = R - \frac{1}{\eta} \frac{\alpha_0^2 v_0^2}{\alpha_0^2 - v_2^2},$$

gdzie  $\eta = \rho/m$ .

Układ równań (3.8) i (3.10) stanowi ostateczny układ równań charakterystycznych względem  $v_1, v_2$ , z którego obliczyć możemy  $U_{kr}$  oraz obszary niestacności.

Wprowadzając oznaczenia

$$(3.11) \quad \bar{v}_i = \frac{v_i}{\sqrt{R}}, \quad \bar{U} = \frac{U}{\sqrt{R}}, \quad \alpha^2 = \frac{\alpha_0^2}{R}$$

możemy układy (3.8) i (3.10) sprowadzić do postaci następującej:

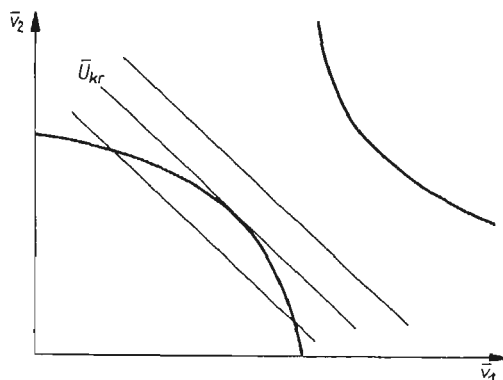
$$(3.12) \quad v_1 + \bar{v}_2 = \bar{U}, \quad \bar{v}_1^2 = 1 - \frac{1}{\eta} \frac{\alpha^2 \bar{v}_2^2}{\alpha^2 - \bar{v}_2^2}.$$

Układ (3.12) można eliminując np.  $\bar{v}_1$  sprowadzić do równania względem  $\bar{v}_2$  zależnego od parametru  $U$ , mianowicie

$$(3.13) \quad \bar{v}_2^4 - 2\bar{U}\bar{v}_2^3 + \left(\bar{U}^2 - \alpha^2 - 1 - \frac{\alpha^2}{\eta}\right)\bar{v}_2^2 + 2\alpha^2\bar{U}\bar{v}_2 + \alpha^2(1 - U^2) = 0.$$

Ze względu na fakt, że dyskusja równania (3.13) jest bardzo uciążliwa, będziemy w dalszym ciągu posługiwali się równaniami (3.12) oraz stosowali numeryczną metodę rozwiązania.

Aby rozstrzygnąć problem drgań samowzbudnych układu oscylatorów, należałoby rozwiązać układ równań (3.12) bądź równanie (3.13) i znaleźć takie zakresy zmiany  $\bar{U}$ , przy których otrzymalibyśmy dla  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  rozwiązania zespolone czyniąc zadość warunkom (3.5). Ponieważ jednakże rozwiązanie równania (3.13) w postaci jawnej, aczkolwiek teoretycznie możliwe, napotyka praktycznie na znaczne trudności rachunkowe, postąpimy inaczej. Mianowicie ponieważ wspólny obszar istnienia możliwych rzeczywistych rozwiązań  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  drugiego z równań (3.12) nie jest ograniczony, zatem kreśląc w płaszczyźnie  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  krzywe przedstawiające drugie z równań (3.12), będziemy szukali przecięć tych krzywych z prostą  $\bar{v}_2 = \bar{U} - \bar{v}_1$ .



Rys. 3

Jeżeli przy danym  $\bar{U}$  będą istniały pierwiastki rzeczywiste, to będą one odpowiadały drganiom statecznym. Jeżeli zaś począwszy od pewnego  $\bar{U} = \bar{U}_{kr}$  pierwiastki rzeczywiste  $\bar{v}_i$  przestaną istnieć, wtedy rozpocznie się obszar niestateczności — obszar drgań samowzbudnych układu oscylatorów (rys. 3)<sup>1</sup>.

Fakt ten można uzasadnić bezpośrednio stosując rachunek zaburzeń. Do-

<sup>1</sup> Obszar niestateczności dla  $\bar{U}$  nazywać będziemy w dalszym ciągu zredukowanym obszarem niestateczności, zaś obszar dla samego  $U$  bezpośrednio obszarem niestateczności.

wodu tego nie przytoczymy tutaj, gdyż został on przedstawiony w pracy [1], sposób zaś postępowania w naszym przypadku będzie identyczny. Gdy  $\bar{U}$  wzrastając osiągnie ponownie wartości, przy których pojawiają się pierwiastki rzeczywiste, to będzie to górna granica  $\bar{U}$  przedziału (obszaru) niestateczności drgań.

Obszar badania rozwiązań we współrzędnych  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_2$  można ograniczyć dla  $\bar{v}_1$  do pierwszej ćwiartki płaszczyzny zespolonej, zaś dla  $\bar{v}_2$  do czwartej.

Z pierwszego z równań (3.12) wynika, że rozwiązania dla  $\bar{v}_i$  muszą mieć postać

$$(3.14) \quad \bar{v}_1 = r_1 + i\varepsilon, \quad \bar{v}_2 = r_2 - i\varepsilon.$$

Poza tym z drugiego z równań (3.12) wynika, że wielkości

$$(3.15) \quad \bar{v}_1 = -r_1 + i\varepsilon, \quad \bar{v}_2 = -r_2 - i\varepsilon$$

jak również

$$(3.16) \quad \bar{v}_1 = r_1 - i\varepsilon, \quad \bar{v}_2 = r_2 + i\varepsilon$$

czynią zadość układowi równań (3.12), przy czym dla (3.15) należy zamiast  $\bar{U}$  przyjmować  $-\bar{U}$ . Stąd więc wynika poprawność przyjętego uproszczenia i w dalszym ciągu będziemy badali układ dla postaci rozwiązań (3.14) przy  $r_1, r_2 > 0$  oraz  $\varepsilon > 0$ , tzn. stosując opisaną wyżej metodę określania  $\bar{U}_{kr}$  poprzez poszukiwanie krzywej  $\bar{v}_1 = f(\bar{v}_2)$  dla rzeczywistych  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  i punktów przecięcia z prostą  $\bar{v}_2 = \bar{U} - \bar{v}_1$ . Ograniczymy się do dodatnich  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ , tj. do pierwszej ćwiartki w płaszczyźnie zmiennych rzeczywistych  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ .

Przejdziemy obecnie do określenia liczbowego krytycznych prędkości oraz obszarów niestateczności rozwiązań dla różnych zakresów zmiany parametrów naszego układu, co wyczerpie możliwe praktyczne warianty rozwiązań problemu.

#### 4. Parametry krytyczne — obszary niestateczności

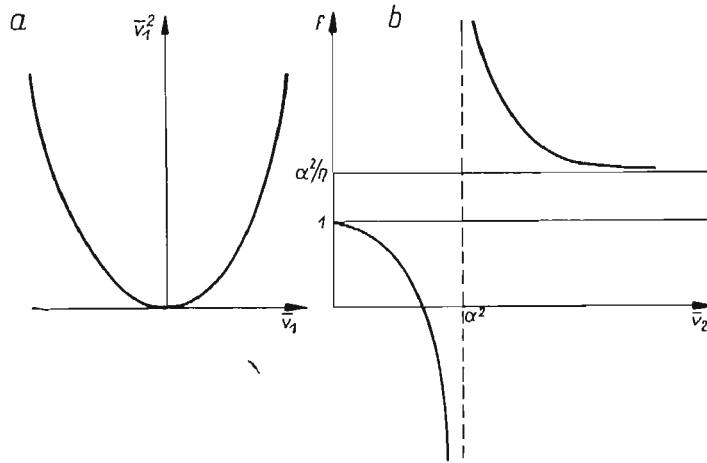
W celu liczbowego wyznaczenia prędkości krytycznych oraz obszarów niestateczności przy różnych parametrach zadania przeprowadzimy tabelaryzację równania (3.12) (drugiego) dla różnych  $a^2$ ,  $k$  oraz  $\eta$ , co pozwoli wyznaczyć numerycznie przebieg krzywych  $\bar{v}_1 = f(\bar{v}_2)$ , gdzie  $f^2(\bar{v}_2)$  jest prawą stroną drugiego z równań (3.12). Przy sporządzaniu tabeli stosowano dokładność możliwą do otrzymania na suwaku. Dane powyższe zestawione zostały w tablicy 1.

Zgodnie z dyskusją, przeprowadzoną w poprzednim punkcie, drgania układu oscylatorów są niestateczne w obszarze, w którym układ równań (3.12) nie posiada rozwiązań rzeczywistych. Granice tego obszaru wyznaczamy badając układ równań (3.12) dla zmiennych rzeczywistych  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  i poszukując takich  $\bar{U} = \bar{U}_{kr}$ , przy których prosta  $\bar{v}_2 = \bar{U} - \bar{v}_1$  jest styczną do krzywej  $\bar{v}_1 = f(\bar{v}_2)$ . Zauważmy jeszcze, że po wyznaczeniu na podstawie układu równań (3.12)  $\bar{U}_{kr}$ , samo  $U_{kr}$  obliczamy ze stosunku (3.11), pamiętając że  $R$  zależy również od  $k$ ,

Tablica 1

$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$										
	$a^2 = 1,0$ $R = 10^8$ $\eta = 10^{-1}$	1,0 $10^8$ 10,0	1,0 $10^8$ 10,0	1,0 $10^8$ 10,0	10,0 $10^8$ 1,0	$10^2$ $10^8$ 1,0	$EI = 2 \cdot 10^{11}$	$b = 20$	$c = 2 \cdot 10^2$	$q = 2 \cdot 10^{-2}$	
0,1	0	0,89	0,99	1,0	0,89	0,90	$k^2 = 10^{-7}$ 0,89	$10^{-6}$ 0,89	$10^{-5}$ 0,90	$10^{-4}$ $\infty$	$10^{-3}$ 1,0011
0,2		0,75	0,97	0,998	0,80	0,80	0,80	0,79	0,79	$10^{-1}$ 1,20	$10^{-3}$ 1,20
0,3		0,57	0,96	0,996	0,69	0,70	0,69	0,69	0,68	1,15	1,15
0,4		0,33	0,93	0,993	0,58	0,60	0,58	0,58	0,58	1,13	1,13
0,5		0,0	0,90	0,99	0,48	0,50	0,48	0,48	0,45	1,125	1,125
0,6			0,85	0,985	0,36	0,40	0,36	0,36	0,32	1,12	1,12
0,7			0,77	0,979	0,25	0,30	0,25	0,25	0,19	1,116	1,116
0,8			0,60	0,96	0,13	0,20	0,13	0,13	0,05	1,114	1,114
0,9			0,10	0,91	0,10	0	0,10	0,10		1,112	1,112
1,0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$					1,111	1,111
2,0	21,0	3,0	1,2	1,02							
3,0	16,0	2,5	1,15	1,015					$\infty$		
4,0	14,3	2,33	1,13	1,013					11,0		
5,0	13,5	2,25	1,12	1,012					7,66		
10,0	12,1	2,11	1,11	1,011	$\infty$		$\infty$	$\infty$	6,0		
20,0	11,5	2,05	1,05	1,05	21,0	101,0	21,0	21,0			
$\infty$	11,0	2,0	1,1	1,01	11,0	101,0	11,0	11,0		1,1	1 001

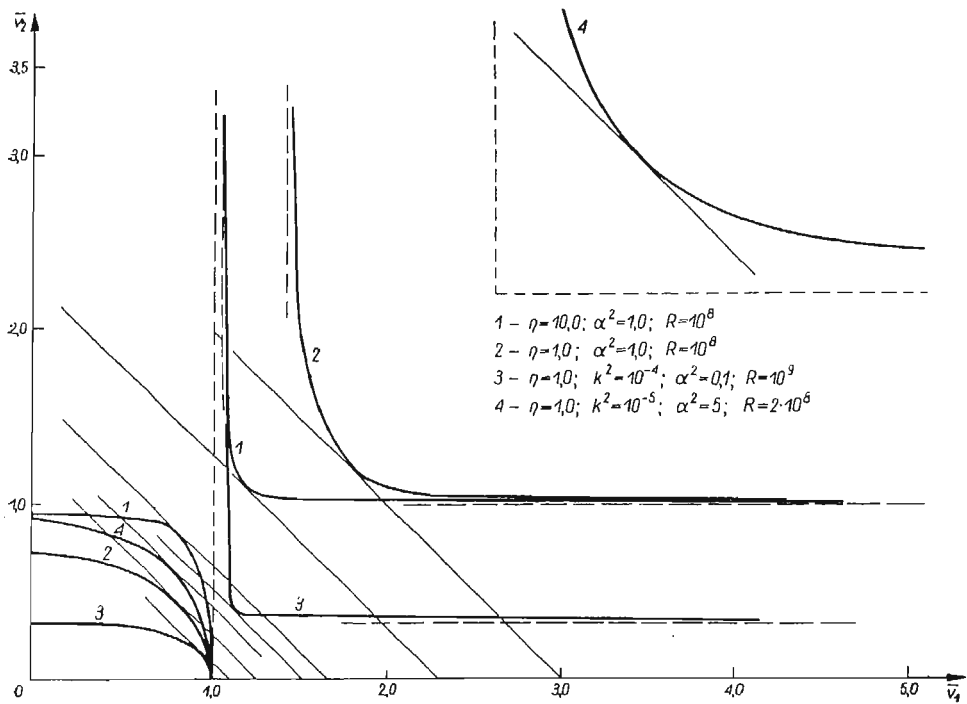
tn. od długości fali. Ogólna postać wykresów lewej i prawej strony drugiego z równań (3.12) podana jest na rys. 4.



Rys. 4

Przebieg krzywych  $\bar{v}_1 = f_1(\bar{v}_2)$  oraz wartości  $\bar{U}_{kr}$  dla kilku wybranych układów parametrów  $\alpha^2$ ,  $k$  i  $\eta$  z tablicy 1 przedstawiony jest na rys. 5.

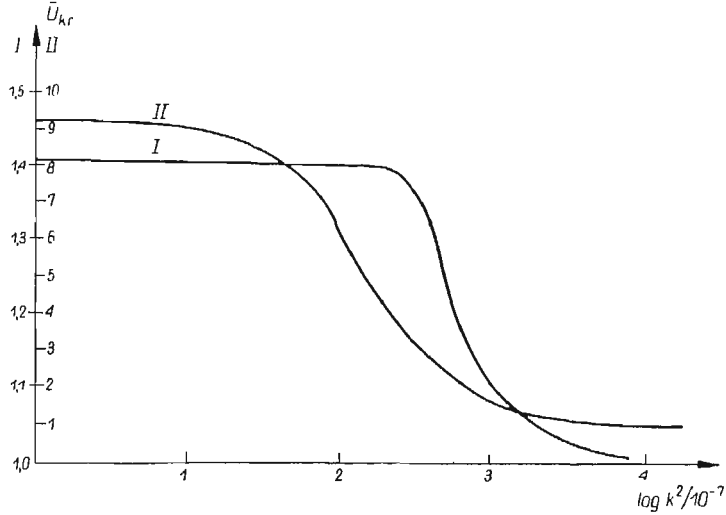
Jeżeli powtórzyć konstrukcję wyznaczania  $\bar{U}_{kr}$  przedstawioną na rys. 5 dla zagęszczonych wartości parametrów  $k$ , przy ustalonym  $\eta$  oraz danych  $c$ ,  $EI$ ,  $b$ ,



Rys. 5

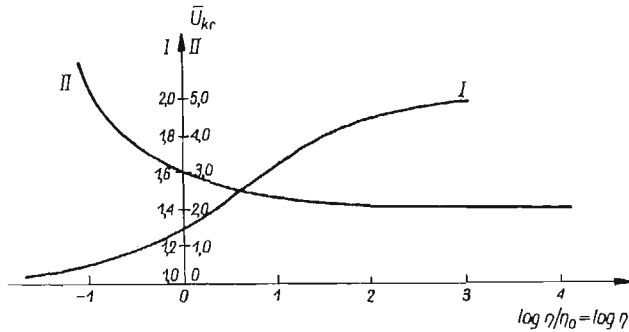


wtedy można zbudować wykres zależności dolnej ( $\bar{U}_{kr}$ ) i górnej granicy zredukowanego obszaru niestateczności od  $k$ . Wykres taki w skali logarytmicznej przedstawiony został na rys. 6, przy czym przyjęto różną skalę pionową dla dolnej



Rys. 6

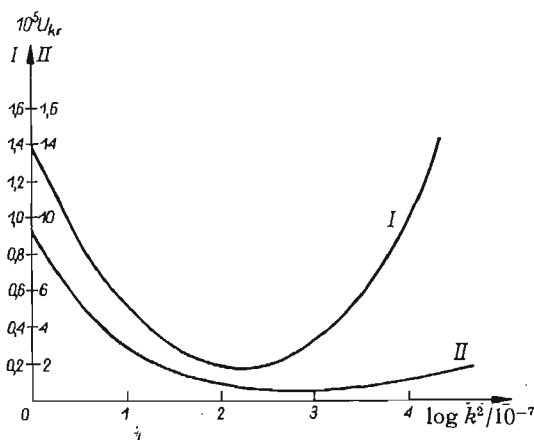
i górnej granicy zredukowanego obszaru niestateczności. Poza tym przyjęto pewne  $k^2$  charakterystyczne, mianowicie  $k^2 = 10^{-7}$  jako wielkość odniesienia. Wielkość ta została przyjęta dowolnie, tak aby odpowiadała pewnym typowym danym praktycznym.



Rys. 7

Wykres na rys. 6 sporządzono dla ustalonego  $\eta$ , mianowicie  $\eta_0 = 1$ . Aby mieć pełny obraz przebiegu zjawiska na rys. 7, sporządzono wykresy przebiegu obu granic zredukowanego obszaru niestateczności w funkcji  $\eta$  (w skali logarytmicznej) przy ustalonych  $c$ ,  $EI$ ,  $b$  i  $k$  lub inaczej przy ustalonych wartościach  $a^2$  i  $R$ . Budując wykresy przy danych parametrach  $a^2$  i  $R$  nie trzeba specyfikować wzajemnych związków pomiędzy  $c$ ,  $EI$ ,  $b$  i  $k$ . Jednakże dla wyznaczenia przebiegu  $\bar{U}_{kr}$  jako funkcji  $k$  (rys. 6) trzeba było przyjąć ustalone wartości

$c$ ,  $EI$ ,  $b$ . Wykresów oddzielnych dla różnych wzajemnych stosunków  $c$ ,  $EI$ ,  $b$  nie przytaczamy, mieszczą się one w tablicy 1 przy uzależnianiu  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_2$  według parametrów  $\alpha^2$  oraz  $R$ . Z rysunku 7 wynika, że przy rosnącym  $\eta$  (przy ustalonych pewnych wartościach pozostałych parametrów) dolna i górna granica zredukowanego obszaru niestateczności zbiegają się, tzn. obszar niestateczności maleje do zera, przy malejącym natomiast  $\eta$  na odwrót rośnie do nieskończoności. Nie omawialiśmy rys. 6, gdyż przedstawia on  $\bar{U}_{kr}$  dolne i górne w zależności od  $k$ , nie zaś samo  $U_{kr}$ . Korzystając ze związku (3.11) sporządzono na rys. 8 wykres przebiegu  $U_{kr}$  dolne i górne jako funkcję  $k$ , tj. zmianę w funkcji  $k$  dolnej i górnej granicy obszaru niestateczności. Wykres sporządzono w oparciu o wykres i dane z rys. 6. Z rysunku 8 wynika, że przy zmiennych  $k$



Rys. 8

i pewnych ustalonych wartościach pozostałych parametrów  $U_{kr}$  dolne i górne posiadają minima, przy czym oba minima na ogół nie pokrywają się, leżą natomiast blisko siebie.

Na podstawie tablic i wykresów przytoczonych w niniejszym punkcie można w zasadzie prześledzić przebieg  $U_{kr}$  i obszaru niestateczności w zależności od zmiany i wzajemnego stosunku wchodzących w rozwiązanie parametrów w zakresach ich praktycznej zmienności. Z rozwiązań tych wynikają następujące wnioski:

1. Przy ustalonych  $k$ ,  $EI$ ,  $b$ ,  $c$  w zależności od  $\eta = m/q$  dolna granica obszaru niestateczności rośnie z  $\eta$  do pewnej asymptoty, górna zaś rośnie z malejącym  $\eta$  począwszy od pewnej wartości asymptotycznej do nieskończoności. Obszar niestateczności maleje przy rosnącym  $\eta$  do zera i rośnie przy malejącym do nieskończoności.

2. Przypadek ruchu sztywnej masy po belce otrzymamy przy danych  $\eta$ ,  $k$ ,  $EI$ ,  $b$ , jeżeli przyjąć  $c \rightarrow \infty$ , tj.  $\alpha^2 \rightarrow \infty$ . Wtedy

$$(4.1) \quad \bar{v}_1^2 = 1 - \frac{\bar{v}_2^2}{\eta}$$

i górna granica obszaru niestateczności dąży do nieskończoności, dolna zaś zmierza do asymptoty zależnej od pozostałych parametrów (por. tablica 1). Stąd wniosek, że przy przekroczeniu  $U_{kr}$  ruch będzie niestateczny dla dolnego  $U$ .

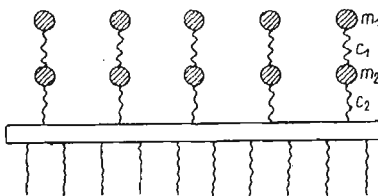
3. Przy ustalonych  $\eta$ ,  $EI$ ,  $b$ ,  $c$  górna i dolna granica obszaru niestateczności posiadają minimum względem  $k$ . Minima te są na ogół położone blisko siebie, nie pokrywają się jednak.

### 5. Oscylatory o kilku stopniach swobody

Na zakończenie niniejszej pracy rozważmy jeszcze pokrótce przypadek bardziej złożonego układu oscylatorów poruszających się po belce, mianowicie układu złożonego z oscylatorów o kilku stopniach swobody. Tok ogólny rozwiązania pozostaje taki sam jak poprzednio, zmieni się jedynie postać prawej strony równania (3.9). Na przykład dla oscylatora o dwóch stopniach swobody (rys. 9) przyjmie ona postać

$$(5.1) \quad \frac{1}{\rho k^2 (R - v_1^2)} = \frac{1}{c_2} \frac{1}{\frac{(c_1 - k^2 v_2^2 m_1) c_2}{(c_1 - k^2 v_2^2 m_1) (c_1 + c_2 - k^2 v_2^2 m_2 - c_1)}}$$

Obraz jakościowy rozwiązań zachowuje się w tym przypadku podobnie jak dla układu oscylatorów o jednym stopniu swobody z tym, że obecnie dojdą pewne osobliwości związane z dodatkowymi częstościami drgań własnych oscylatorów. Poza tym przy specjalnie dobranych związkach pomiędzy parametrami zadania wynika szereg specjalnych związków dotyczących wzajemnego stosunku amplitud mas i belki itp. Zagadnienia tego nie będziemy rozważali oddzielnie, ponieważ w toku rozwiązania nie zachodzą żadne istotne zmiany.



Rys. 9

To samo dotyczy kwestii tłumienia (tłumiki oscylatorów i tłumienie w belce) oraz ograniczonego układu oscylatorów bądź oscylatora pojedynczego. Przy uwzględnieniu tłumienia metoda konstrukcji rozwiązania pozostaje niezmienną, natomiast zmianie ulegają wyniki ilościowe. Jakościowe różnice otrzymuje się przy pewnych (stosunkowo bardzo dużych) krytycznych wartościach tłumienia. Aby nie komplikować obrazu dodatkowymi parametrami, w pracy rozważaliśmy najprostszы układ. Tok rozwiązania, jak stwierdziliśmy, nie ulega zmianie. Rozwiązanie komplikuje się w sposób istotny i zmienia się metoda postępowania, gdy mamy do czynienia z oscylatorami nieliniowymi.

Niektóre jednakże przypadki nieliniowych oscylatorów poruszających się po belce dają się stosunkowo prosto rozwiązać. Zagadnienie to będzie tematem osobnego komunikatu.

#### Literatura cytowana w tekście

[1]. S. KALISKI, *Self-excited vibrations of an oscillator system moving on the surface of an elastic half-space*, Proc. Vibr. Probl., w druku.

[2]. Е. Г. ГОЛОСКОКОВ, А. П. ФИЛИПОВ, *Установившиеся колебания балки на упругом основании при движении груза с постоянной скоростью*, Тр. Лабор. гидравл. машин, АН УССР, в. 10, 1962.

[3]. В. М. МУЧНИКОВ, *Некоторые методы расчёта упругих систем на колебания при подвижной нагрузке*, Издат. Лит. Стр. Арх., Москва 1953.

#### Резюме

### УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ДВИЖУЩИХСЯ ПО БАЛКЕ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассмотрена задача о движении системы линейных осцилляторов по балке покоящейся на упругом основании. Показано, что в этом случае существуют области скоростей движения системы осцилляторов, при которых появляются колебания с самовозбуждением, следовательно движение неустойчиво. Определены критические скорости для нижней и верхней границы области неустойчивости. Даны диаграммы зависимости критических скоростей от разных переменных параметров системы. Обсужден ряд предельных случаев, напр. движение жесткой, неупруго подвешенной массы, весьма большой массы и т. п.

#### Summary

### STABILITY OF THE MOTION OF A SYSTEM OF OSCILLATORS MOVING ON A BEAM ON ELASTIC FOUNDATION

In the paper the problem of the motion of a system of linear oscillators moving on a beam on elastic foundation has been considered. It is shown that for such a motion there exist domains of velocity of the motion of a system of oscillators for which selfvibrations appear, thus the motion is unstable. The critical velocities are determined for the upper and lower boundaries of the unstable domain. The diagrams of the critical velocities as the functions of different parameters of the system are plotted and several limit cases as, for example, a motion of a rigid mass without springing or a motion of a very large mass are discussed.

ZAKŁAD BADAŃ DRGAŃ  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 października 1963 r.*