MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 2 (1964)

ZWIĄZKI FIZYCZNE DLA MATERIAŁU SPRĘŻYSTEGO Z WIĘZAMI GEOMETRYCZNO-TERMICZNYMI

ZBIGNIEW WESOŁOWSKI (WARSZAWA)

Wiele materiałów zachowujących własności sprężyste również przy dużych odkształceniach wykazuje bardzo nieznaczną ściśliwość odpowiadającą współczynnikowi Poissona bliskiemu 0,5. Są to przede wszystkim tzw. materiały gumopodobne. Przy ich rozpatrywaniu wyprowadza się zwykle założenie o nieściśliwości, co zresztą znacznie upraszcza obliczenia.

Większość rozpatrzonych dotychczas zagadnień dotyczy przypadku, gdy proces odkształcenia jest izotermiczny. Przejście do innych procesów nie nastręcza trudności, jeśli przyjąć, że rozpatrywany nieściśliwy materiał nie wykazuje rozszerzalności termicznej. Jest to jednak założenie dość sztuczne. Jeśli natomiast materiał wykazuje rozszerzalność termiczną, to związki fizyczne przyjmują inną postać i zachodzą istotne różnice między procesem izotermicznym, a procesem nieizotermicznym.

W niniejszej pracy wskażemy na te różnice jak również na pewne wynikające z nich konsekwencje.

1. Geometria odkształcenia i związki fizyczne

Oznaczmy przez $\mathring{P}$ typowy punkt ciała nieodkształconego $\mathring{B}$. W procesie odkształcenia ciało $\mathring{B}$ przechodzi w ciało odkształcone B, a typowy punkt $\mathring{P}$ w punkt P. Temperaturę punktu $\mathring{P}$ oraz P oznaczymy odpowiednio przez $\mathring{T}$ oraz T. Wprowadźmy ustalony kartezjański układ współrzędnych oraz współrzędne konwekcyjne θ^i. Oznaczając przez x_i oraz y_i kartezjańskie współrzędne punktu $\mathring{P}$ oraz P mamy

$$\mathring{g}_{ij} = \frac{\partial x_m}{\partial \theta^i}\frac{\partial x_m}{\partial \theta^j}, \quad g_{ij} = \frac{\partial y_m}{\partial \theta^i}\frac{\partial y_m}{\partial \theta^j}, \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \mathring{g}_{ij}), \tag{1.2}$$

gdzie $\mathring{g}_{ij}$ oraz g_{ij} oznaczają tensory metryczne w $\mathring{B}$ oraz B, a ε_{ij} jest tensorem odkształcenia. Symetryczny tensor drugiego rzędu ε_{ij} ma 3 niezmienniki.

Dla naszych celów najdogodniejsze jest zdefiniowanie tych niezmienników związkami

(1.3) $$I_1 = \overset{\circ}{g}{}^{rs} g_{rs}, \quad I_2 = \overset{\circ}{g}_{rs} g^{rs} I_3, \quad I_3 = g/\overset{\circ}{g}.$$

Pierwiastek z niezmiennika I_3 jest stosunkiem gęstości $\overset{\circ}{\varrho}$ ciała $\overset{\circ}{B}$ do gęstości ϱ ciała B.

Stan naprężenia ciała B scharakteryzowany jest tensorem naprężenia τ^{ij} (odniesionym do jednostki powierzchni w ciele odkształconym B). Współrzędne siły **P** działającej na jednostkę powierzchni o normalnej **n** wyrażają się przez tensor τ^{ij} wzorem

(1.4) $$P^j = \tau^{ij} n_i.$$

Rozpatrujemy ciało sprężyste o dowolnej nieliniowej charakterystyce fizycznej. Stan ciała sprężystego określa siedem niezależnych parametrów stanu. Jak pokazano np. w [1], parametry te mogą być wybrane w sposób w zasadzie dowolny spośród 14 wielkości: sześciu współrzędnych tensora odkształcenia ε_{ij}, sześciu współrzędnych tensora naprężenia τ^{ij}, temperatury bezwzględnej T oraz odniesionej do jednostki masy ciała entropii S.

Do celów niniejszej pracy najdogodniejsze jest przyjęcie za niezależne parametry stanu współrzędnych tensora odkształcenia ε_{ij} oraz temperatury T. Zgodnie z pierwszą i drugą zasadą termodynamiki mamy tożsamość (por. np. [1])

(1.5) $$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} - \frac{\tau^{ij}}{\varrho}\right) d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial T} + S\right) dT = 0, \qquad F = F(\varepsilon_{ij}, T),$$

gdzie funkcja $F(\varepsilon_{ij}, T)$ jest energią swobodną, odniesioną do jednostki masy rozpatrywanego ciała.

Różniczki $d\varepsilon_{ij}$, dT można formalnie traktować jako wektory siedmiowymiarowej *przestrzeni wektorowej* V_7. *W przypadku gdy różniczki te są wzajemnie* niezależne, z (1.5) wynika

(1.6) $$\frac{\tau^{ij}}{\varrho} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad S = -\frac{\partial F}{\partial T}.$$

Związki (1.6) obowiązują w przypadku, gdy każda zmiana wielkości ε_{ij} oraz T jest kinematycznie dopuszczalna. Współrzędne tensora naprężenia τ^{ij} oraz entropia S są wtedy jednoznacznie[1] określone przez współrzędne tensora odkształcenia ε_{ij} i temperaturę T. Tak jednak nie jest, jeśli współrzędne te i temperatura nie są niezależne.

Załóżmy, że w rozpatrywanym ciele istnieją więzy geometryczno-termiczne. W szczególnych przypadkach mogą one wyrażać warunek nieściśliwości, ograniczenie odkształcenia przez struny zanurzone w materiale itp. Przyjmiemy, że więzy te wyrażają się związkami

(1.7) $$\begin{aligned} &f_K(\varepsilon_{ij}, T, \tau^{ij}, S) = 0, \qquad K = 0, 1, 2, \ldots, M, \qquad M < 7, \\ &f_0(\varepsilon_{ij}, T, \tau^{ij}, S) \equiv 0. \end{aligned}$$

[1] Pewnemu stanowi odniesienia, np. stanowi $\overset{\circ}{B}$, przypisujemy entropię $\overset{\circ}{S} = 0$. W ten sposób przechodzimy do operowania tylko przyrostami entropii.

Sześć współrzędnych tensora odkształcenia ε_{ij} oraz temperaturę T traktujemy jako zmienne niezależne, a τ^{ij} oraz S jako ich funkcje. Związki (1.7) stanowią więc pewne więzy narzucone na ε_{ij} oraz T. To usprawiedliwia nazwę *więzy geometryczno-termiczne*. Obliczając różniczkę zupełną (1.7) mamy

(1.8)
$$\left(\frac{\partial f_K}{\partial \varepsilon_{ij}}+\frac{\partial f_K}{\partial \tau^{rs}}\frac{\partial \tau^{rs}}{\partial \varepsilon_{ij}}+\frac{\partial f_K}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)d\varepsilon_{ij}+\left(\frac{\partial f_K}{\partial T}+\frac{\partial f_K}{\partial \tau^{rs}}\frac{\partial \tau^{rs}}{\partial T}+\frac{\partial f_K}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial T}\right)dT=0.$$

W tym przypadku różniczek $d\varepsilon_{ij}$, dT nie można więc traktować jako wektory niezależne. Rozwiązaniem (1.5) jest teraz[2]

(1.9)
$$\begin{aligned}\frac{\tau^{ij}}{\varrho}&=\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}+\sum_{K=1}^{M}p_K\left(\frac{\partial f_K}{\partial \varepsilon_{ij}}+\frac{\partial f_K}{\partial \tau^{rs}}\frac{\partial \tau^{rs}}{\partial \varepsilon_{ij}}+\frac{\partial f_K}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}}\right),\\ S&=-\frac{\partial F}{\partial T}-\sum_{K=1}^{M}p_K\left(\frac{\partial f_K}{\partial T}+\frac{\partial f_K}{\partial \tau^{rs}}\frac{\partial \tau^{rs}}{\partial T}+\frac{\partial f_K}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial T}\right).\end{aligned}$$

Związki (1.9) pozwalają wyznaczyć współrzędne tensora naprężenia τ^{ij} oraz entropię S jako funkcje współrzędnych tensora odkształcenia ε_{ij} oraz temperatury T. określone są z dokładnością do M skalarnych parametrów p_K, które mogą być interpretowane jako mnożniki Lagrange'a. Dla $M=0$ związki (1.9) przechodzą w związki dla materiału bez więzów (1.6).

W następnych rozdziałach zostaną rozpatrzone pewne przypadki szczególne związków (1.7) i wynikających z nich związków fizycznych (1.9).

2. Przypadek szczególny więzów geometryczno-termicznych

Zajmiemy się tutaj pewnym szczególnym przypadkiem więzów geometryczno-termicznych (1.7). Założymy mianowicie, że temperatura i odkształcenie są związane związkiem jawnym, a nie za pośrednictwem naprężenia i entropii.

[2] Równanie wektorowe

$$\sum_k x_k \mathbf{r}^k=0,\quad k=1,2,\dots,n,$$

przy spełnionych $N<n$ niezależnych związkach

$$\sum_k a^K_{\cdot k}\mathbf{r}^k=0,\quad K=1,2,\dots,N,$$

ma rozwiązanie

$$x_k=\sum_K p_K a^K_{\cdot k},$$

gdzie p_K są wzajemnie niezależnymi skalarnymi mnożnikami.

Podczas gdy więzy (1.7) zależały od prawa fizycznego, więzy rozpatrywane w niniejszym rozdziale od tego prawa nie zależą.

Dla uproszczenia rozważań chwilowo założymy, że konwekcyjny układ współrzędnych θ^i pokrywa się w $\mathring{B}$ z układem x_i. Zgodnie z (1.1) oraz (1.2) jest

$$\mathring{g}_{ij} = \delta_{ij}, \quad g_{ij} = \frac{\partial y_m}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y_m}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} - \delta_{ij}\right). \tag{2.2}$$

Powstaje pytanie, jaką postać ma najogólniejszy związek pomiędzy temperaturą a odkształceniem. Ograniczając się do przypadku, gdy temparatura zależy tylko od odkształcenia (a nie od prędkości odkształcenia, przyśpieszenia itd.), taką najogólniejszą postacią jest

$$T = H(\partial y_i/\partial x_j). \tag{2.3}$$

Zależność (2.3) jest naturalnym uogólnieniem wprowadzanych często więzów geometrycznych, których najprostszym przykładem jest równanie nieściśliwości. W szczególnym przypadku więzy (2.3) mogą wyrażać rozszerzalność objętościową zależną tylko od temperatury. Funkcja H może w sposób istotny zależeć od położenia ciała $\mathring{B}$ względem układu x_i. Tak jest np. w przypadku, gdy ciało $\mathring{B}$ wykazuje anizotropię.

Gradienty odkształcenia zgodnie z (2.2) określają całkowicie tensor odkształcenia ε_{ij}. Tensor odkształcenia ε_{ij} nie określa jednak jednoznacznie gradientów odkształcenia. Zdawać by się więc mogło, że postulowana zależność (2.3) jest ogólniejsza od zależności $T = T(\varepsilon_{ij})$. Niżej wykażemy, że tak nie jest.

Załóżmy, że ciało B doznało pewnego sztywnego obrotu określonego ortogonalną macierzą a_{ij} dokoła początku układu. W ustalonym poprzednio ortogonalnym kartezjańskim układzie współrzędnych punkt P po obrocie ciała B ma współrzędne, które oznaczymy przez $\bar{y}_i$. Zachodzą związki

$$\bar{y}_i = a_{ij} y_j, \quad \partial \bar{y}_i/\partial x_k = a_{ij}\, \partial y_j/\partial x_k, \tag{2.4}$$

$$a_{ir}\, a_{jr} = \delta_{ij}. \tag{2.5}$$

Podczas sztywnego obrotu temperatura punktu P nie ulega zmianie. Jest więc

$$H(\partial y_i/\partial x_k) = H(a_{ij}\, \partial y_j/\partial x_k). \tag{2.6}$$

Przedstawimy macierz $\partial y_i/\partial x_k$ jako iloczyn macierzy ortogonalnej q_{ij} oraz macierzy symetrycznej s_{ij}. Takie przedstawienie jest zawsze możliwe (por. np. [3, 4]). Jest więc

$$\partial y_i/\partial x_k = q_{ir}\, s_{rk}, \tag{2.7}$$

$$\partial \bar{y}_i/\partial x_k = a_{ip}\, q_{pr}\, s_{rk}. \tag{2.8}$$

Zawsze można tak wybrać obrót ciała B określony ortogonalną macierzą a_{ij}, że $a_{ir}\, q_{rk} = \delta_{ik}$. W tym przypadku gradienty odkształcenia $\partial \bar{y}_i/\partial x_k$ tworzą macierz symetryczną i jest

$$\partial \bar{y}_i/\partial x_k = s_{ik}. \tag{2.9}$$

Przyjmując to położenie ciała B za położenie wyjściowe zgodnie z (2.3) oraz (2.6) mamy

$$T = H(s_{ik}) = H(a_{ij} s_{jk}). \tag{2.10}$$

Dla dowolnego materiału temperatura nie jest więc funkcją niesymetrycznej macierzy gradientów odkształcenia $\partial y_i/\partial x_k$, a funkcją symetrycznej macierzy s_{ij}. Chociaż dalsze rozważania można prowadzić w oparciu o macierz s_{ij}, wygodniejsze jest inne podejście. Z (2.7) wynika mianowicie

$$s_{ir} s_{rk} = 2\varepsilon_{ik} - \delta_{ik}. \tag{2.11}$$

Kwadrat macierzy s_{ij} jest więc określony jednoznacznie przez macierz tensora odkształcenia ε_{ij}. Określone są też jednoznacznie kwadraty wartości własnych macierzy s_{ij} (równe wartościom własnym macierzy s_{ij}^2). Same wartości własne określone są jednak tylko z dokładnością do znaku. Niejednoznaczność ta wynika stąd, że rozkład (2.7) nie jest rozkładem jedynym. Można jednak tak dobrać obrót ciała B, aby macierz s_{ij} była dodatnio określona. W tym przypadku wszystkie trzy wartości własne macierzy s_{ij} są dodatnie i sama macierz s_{ij} jest określona jednoznacznie przez macierz tensora odkształcenia ε_{ij}. W dalszych rozważaniach będziemy zakładali, że zachodzi ten właśnie przypadek.

Zgodnie z powyższymi uwagami nie zawężając ogólności można przyjąć

$$T = T(\varepsilon_{ij}). \tag{2.12}$$

Więzy geometryczno-termiczne (2.12) równoważne są więzom postulowanym w (2.3) dla wszystkich materiałów, w tym również sprężystych anizotropowych. Bliższe określenie postaci (2.12) możliwe jest dopiero po określeniu typu anizotropii. W dalszych wzorach określimy (2.12) dla materiału izotropowego.

Ograniczamy się teraz do rozpatrywania materiału izotropowego. Dla takiego materiału obrót ciała $\mathring{B}$ względem ustalonego układu x_i nie może spowodować zmiany postaci związku (2.12). Niech ciało $\mathring{B}$ dozna obrotu sztywnego określonego ortogonalną macierzą $\mathring{a}_{ij}$. Nowe współrzędne punktu $\mathring{P}$ i nowe współrzędne tensora ε_{ij} wyznaczone z (2.2) mają postać

$$\bar{x}_i = \mathring{a}_{ij} x_j, \tag{2.13}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \mathring{a}_{ip} \mathring{a}_{jq} \varepsilon_{pq}. \tag{2.14}$$

Zgodnie z przeprowadzoną wyżej analizą mamy

$$T(\varepsilon_{ij}) = T(\bar{\varepsilon}_{ij}), \tag{2.15}$$

$$T(\varepsilon_{ij}) = T(\mathring{a}_{ip} \mathring{a}_{iq} \varepsilon_{pq}). \tag{2.16}$$

Funkcja $T(\varepsilon_{ij})$ jest więc skalarową funkcją macierzy ε_{ij}, niezmienniczą względem przekształcenia ortogonalnego tej macierzy. Stąd wynika, że T może być funkcją tylko niezmienników macierzy ε_{ij}. Skorzystamy teraz z niezmienników odkształcenia I_1, I_2, I_3 określonych związkami (1.3). Dla ciała izotropowego jest więc ostatecznie

$$T = T(I_1, I_2, I_3) \tag{2.17}$$

lub po rozwiązaniu względem I_3

$$\sqrt{I_3} = \varphi(I_1, I_2, T). \tag{2.18}$$

Związek (2.18) będziemy interpretowali jako uogólnione prawo rozszerzalności termicznej. W ogólnym przypadku prawo to określa objętość jako funkcję temperatury i pierwszych dwóch niezmienników stanu odkształcenia. W szczególnym przypadku $\varphi(I_1, I_2, T) = \varphi(T)$ wzór (2.18) opisuje rozszerzalność termiczną niezależną od odkształcenia. Dla procesu izotermicznego mamy $T = \mathring{T}$ i niezmiennik I_3 określony jest przez czysto geometryczny związek $\sqrt{I_3} = \varphi(I_1, I_2, \mathring{T})$, który w przypadku $\varphi(I_1, I_2, \mathring{T}) \equiv 1$ przechodzi w warunek nieściśliwości. Ponieważ przy $T = \mathring{T}$, $I_1 = I_2 = 3$ mamy $I_3 = 1$ (ciało $\mathring{B}$), musi być

$$\varphi(3, 3, \mathring{T}) = 1. \tag{2.19}$$

Ze względu na swój tensorowy charakter związki (2.12) i (2.17) są prawdziwe w każdym układzie współrzędnych.

3. Przypadki szczegółowe

3.1. Uogólnione prawo rozszerzalności termicznej. Przejdziemy obecnie do rozpatrzenia związków fizycznych dla ciała izotropowego w przypadku, gdy obowiązuje uogólnione prawo rozszerzalności termicznej (2.18). Zgodnie z (1.7) mamy

$$f = I_3 - \varphi^2(I_1, I_2, T) = 0. \tag{3.1}$$

W ogólnym przypadku ciała sprężystego izotropowego energia swobodna F jest funkcją trzech niezmienników stanu odkształcenia I_1, I_2, I_3 oraz temperatury T. W przypadku rozpatrywanym tutaj ze względu na istnienie związku (3.1) można, nie zwężając ogólności, przyjąć $F = F(I_1, I_2, T)$. Zgodnie z (1.9) i (3.1) mamy więc

$$\begin{aligned} \tau^{ij} &= \left(\Psi_1 - 4p'\mathring{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial I_1}\right)\mathring{g}^{ij} + \left(\Psi_2 - 4p'\mathring{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial I_2}\right)b^{ij} + p'\Psi_3 g^{ij}, \\ S &= \Psi_0 + 2p'\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial T}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdzie p' jest dowolną funkcją skalarną, podczas gdy funkcje Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_0 oraz b^{ij} określone są związkami.

$$\begin{gathered} \Psi_0 = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad \Psi_1 = 2\varrho\frac{\partial F}{\partial I_1}, \quad \Psi_2 = 2\varrho\frac{\partial F}{\partial I_3}, \quad \Psi_3 = 2\varrho\frac{\partial F}{\partial I_3}, \\ b^{ij} = (\mathring{g}^{ij}\mathring{g}^{rs} - \mathring{g}^{ir}\mathring{g}^{js})g_{rs}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Oznaczając $p = 2\mathring{\varrho}p'\varphi$ mamy ostatecznie

$$\tau^{ij} = \left(\Psi_1 - \frac{2p}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial I_1}\right)\mathring{g}^{ij} + \left(\Psi_2 - \frac{2p}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial I_2}\right)b^{ij} + pg^{ij}, \tag{3.4}$$

$$S = \Psi_0 + \frac{p}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial T}. \tag{3.5}$$

3.2. Rozszerzalność objętościowa niezależna od odkształcenia. Załóżmy obecnie, że materiał wykazuje termiczną rozszerzalność objętościową niezależną od odkształcenia

$$\mathring{\varrho}/\varrho = \sqrt{I_3} = \varphi(T), \qquad \varphi(\mathring{T}) = 1. \tag{3.6}$$

Związek ten przedstawia jedno równanie więzów. Zapisując je w postaci takiej jak (3.1) mamy

$$f = I_3 - \varphi^2(T) = 0. \tag{3.7}$$

Związek (3.7) będziemy traktować jako szczególny przypadek związku (3.1). Zgodnie z (3.2) jest więc

$$\tau^{ij} = \Psi_1\mathring{g}^{ij} + \Psi_2 b^{ij} + p'\Psi_3 g^{ij}, \qquad S = \Psi_0 + 2p'\varphi\frac{d\varphi}{dT}. \tag{3.8}$$

Oznaczając $p = \Psi_3 p'$ mamy ostatecznie

$$\tau^{ij} = \Psi_1\mathring{g}^{ij} + \Psi_2 b^{ij} + pg^{ij}, \tag{3.9}$$

$$S = \Psi_0 + p\frac{1}{\mathring{\varrho}}\frac{d\varphi}{dT}. \tag{3.10}$$

Przy $\varphi(T) \equiv 1$ równanie (3.7) przechodzi w warunek nieściśliwości. W tym przypadku $d\varphi/dT = 0$ i entropia S określona jest przez (3.10) jednoznacznie. Zaskakujący fakt, że przy $d\varphi/dT \neq 0$ entropia (ściślej — przyrost entropii) określona jest z dokładnością do pewnej funkcji skalarnej, można łatwo wyjaśnić w przypadku, gdy do rozpatrywanego ciała o jednostkowej masie przyłożone jest tylko stałe ciśnienie hydrostatyczne $q = \text{const}$. Przy wzroście temperatury o dT ciało wykonuje pracę zależną od ciśnienia q, doprowadzone ciepło musi więc też od tego ciśnienia zależeć. Stąd wynika, że wzrost entropii spowodowany wzrostem temperatury zależy od ciśnienia q.

Z faktem tym wiąże się bezpośrednio kwestia jednoznaczności energii wewnętrznej $U(I_1, I_2, I_3, S)$ oraz energii swobodnej $F(I_1, I_2, I_3, T)$. Obie te funkcje są jednoznacznie określone przez parametry stanu I_1, I_2, I_3 oraz S lub też I_1, I_2, I_3 oraz T. Jednak wtedy gdy energia swobodna F nie zależy od funkcji p, to energia wewnętrzna zależy od funkcji p za pośrednictwem entropii S.

Sytuacja podobna do opisanej zachodzi w rozpatrzonym wyżej przypadku, gdy obowiązuje uogólnione prawo rozszerzalności termicznej.

4. Inflacja i rozciągnięcie rury walcowej

4.1. Założenia i związki ogólne. Przejdziemy obecnie do rozwiązania przykładu. Rura walcowa o promieniu wewnętrznym $\mathring{a}$, zewnętrznym $\mathring{b}$ i o długości $\mathring{l}$, określona dalej jako ciało $\mathring{B}$, wykonana jest z izotropowego i jednorodnego materiału sprężystego. O materiale tym zakładamy, że jest nieściśliwy i że wykazuje objętościową rozszerzalność termiczną zależną tylko od temperatury.

Rozpatrywana rura doznaje skończonego rozciągnięcia w kierunku swojej osi oraz inflacji, tj. zwiększenia promienia wewnętrznego i zewnętrznego. Na skutek tego odkształcenia przechodzi ona w rurę o wymiarach odpowiednio a, b oraz l określaną dalej jako ciało B. Wprowadźmy parametry λ oraz μ zdefiniowane równościami

$$\lambda = l/\mathring{l}, \qquad \mu = a/\mathring{a}. \tag{4.1}$$

W przypadku materiału nieściśliwego (rozpatrzonym np. w [2]) parametry λ oraz μ określają całkowicie geometrię odkształcenia niezależnie od charakteru procesu $\mathring{B} \to B$ i niezależnie od związków fizycznych. W przypadku materiału wykazującego rozszerzalność termiczną parametry te nie określają jednoznacznie geometrii odkształcenia. Przy rozpatrywaniu takiego materiału konieczna jest znajomość charakteru procesu $\mathring{B} \to B$, rozkładu temperatur itp., jak również znajomość związków fizycznych. W dalszym ciągu pracy przy przejściu do efektywnego rozwiązania określać będziemy zarówno charakter procesu jak i związki fizyczne.

W ciele B budujemy walcowy układ współrzędnych $\theta^i = (r, \vartheta, z)$. Współrzędne te uważać będziemy za współrzędne konwekcyjne.

Tensor metryczny g_{ij} w B jest

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad g = |g_{ij}| = r^2. \tag{4.2}$$

Zakładamy, że odkształcenie jest osiowo-symetryczne i a) przemieszczenie promieniowe typowego punktu P jest tylko funkcją r, b) przemieszczenie osiowe punktu P jest tylko funkcją z.

Zgodnie z powyższymi założeniami mamy

$$x_1 = rQ\cos\vartheta, \qquad x_2 = rQ\sin\vartheta, \qquad x_3 = z/\lambda, \qquad Q = Q(r), \tag{4.3}$$

przy czym

$$Q(a) = 1/\mu, \tag{4.4}$$

gdzie $Q(r)$ jest pewną na razie nieokreśloną funkcją zmiennej r.

Tensor metryczny $\mathring{g}_{ij}$ w ciele $\mathring{B}$ określony jest związkiem (1.1). Korzystając z (4.3) mamy

$$\mathring{g}_{ij} = \begin{bmatrix} (Q + rQ_{,r})^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2Q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathring{g} = |\mathring{g}_{ij}| = \frac{r^2}{\lambda^2} Q^2 (Q + rQ_{,r})^2. \tag{4.5}$$

Tensory metryczne $\mathring{g}_{ij}$ oraz g_{ij} określają stan odkształcenia ciała B. Tensor odkształcenia ε_{ij} i jego niezmienniki I_1, I_2, I_3 mają postać

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \mathring{g}_{ij}) = \begin{bmatrix} 1-(Q+rQ_{,r})^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2(1-Q^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-1/\lambda^2 \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathring{g}^{rs} g_{rs} = (Q+rQ_{,r})^{-2} + Q^{-2} + \lambda^2, \\ I_2 &= \mathring{g}_{rs} g^{rs} I_3 = \lambda^2 (Q+rQ_{,r})^{-2} + \lambda^2 Q^{-2} + Q^{-2}(Q+rQ_{,r})^{-2}, \\ I_3 &= g/\mathring{g} = \lambda^2 Q^{-2}(Q+rQ_{,r})^{-2}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Przejdziemy teraz do ułożenia równania różniczkowego, jakie spełnia funkcja $Q(r)$ oraz do wyznaczenia stanu naprężenia w rozpatrywanym walcu. Zgodnie z założeniem, że materiał wykazuje rozszerzalność objętościową zależną tylko od temperatury T, mamy

$$\mathring{\varrho}/\varrho = \varphi(T). \tag{4.8}$$

Trzeci niezmiennik stanu odkształcenia I_3 jest kwadratem stosunku gęstości ciała $\mathring{B}$ do gęstości ciała $\overset{m}{B}$. Wykorzystując (4.7) oraz (4.8) mamy ostatecznie

$$I_3 - \varphi^2(T) = 0 \quad \text{czyli} \quad Q(Q+rQ_{,r})\varphi = \lambda. \tag{4.9}$$

Dla materiału nieściśliwego $\varphi \equiv 1$ i równanie (4.9) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym, które łącznie z warunkiem brzegowym (4.4) określa całkowicie funkcję $Q(r)$. Również w przypadku, gdy dany jest rozkład temperatury jako funkcja r, czyli $T = T(r)$, związek (4.9) łącznie z (4.4) określa całkowicie funkcję $Q(r)$. Jak dalej pokażemy, w ogólnym przypadku równanie (4.9) jest tylko jednym z układu równań różniczkowych, w których niewiadomymi są $Q(r)$, $T(r)$ oraz ewentualnie inne funkcje zmiennej r.

Zgodnie z (3.8), (3.9), (4.2) oraz (4.5) jest

$$\begin{aligned} \tau^{11} &= \Psi_1 (Q+rQ_{,r})^{-2} + \Psi_2 (Q+rQ_{,r})^{-2}(\lambda^2 + Q^{-2}) + p, \\ r^2\tau^{22} &= \Psi_1 Q^{-2} + \Psi_2 Q^{-2}[\lambda^2 + (Q+rQ_{,r})^{-2}] + p, \\ \tau^{33} &= \Psi_1 \lambda^2 + \Psi_2 \lambda^2 [Q^{-2} + (Q+rQ_{,r})^{-2}] + p, \\ \tau^{23} &= \tau^{31} = \tau^{12} = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Równania równowagi ciała B, mające postać

$$\nabla_i \tau^{ij} = 0, \tag{4.11}$$

gdzie ∇_i oznacza różniczkowanie kowariantne względem $\mathring{\theta}^i$ w B, ze względu na osiową symetrię rozpatrywanego zagadnienia sprowadzają się do jednego równania

$$\frac{d}{dr}\tau^{11} + \frac{1}{r}(\tau^{11} - r^2\tau^{22}) = 0. \tag{4.12}$$

Podstawiając (4.10) do (4.12) mamy

$$(4.13)\qquad \frac{d}{dr}\{(Q+rQ_{,r})^{-2}[\Psi_1+(\lambda^2+Q^{-2})\Psi_2+p]\}+$$
$$+\frac{1}{r}[(Q+rQ_{,r})^{-2}-Q^{-2}](\Psi_1+\lambda^2\Psi_2)=0.$$

Przyjmiemy, że zewnętrzna powierzchnia rozpatrywanego cylindra $r=b$ jest wolna od obciążenia, a powierzchnia wewnętrzna $r=a$ jest obciążona obciążeniem ciągłym q (ciśnieniem hydrostatycznym). Warunki brzegowe sprowadzają się do

$$(4.14)\qquad \tau^{11}|_{r=a}=-q,\qquad \tau^{11}|_{r=b}=0.$$

Podane w tym punkcie związki pozwalają wyznaczyć efektywnie stan odkształcenia i naprężenia, jeżeli tylko określony jest termiczny charakter procesu $\overset{\circ}{B}\to B$. W następnych punktach skoncentrujemy uwagę na dwu skrajnie różnych przypadkach. W przypadku pierwszym zachodzi ustalony przepływ ciepła spowodowany różnicą temperatur na powierzchni $r=a$ oraz powierzchni $r=b$. W przypadku drugim proces $\overset{\circ}{B}\to B$ jest procesem adiabatycznym.

4.2. Ustalony przepływ ciepła. Niech na powierzchniach $r=a$ oraz $r=b$ panują stałe temperatury T_a oraz T_b. Po dostatecznie długim czasie wewnątrz rozpatrywanego ciała ustali się rozkład temperatury określony równaniem przewodnictwa

$$(4.15)\qquad \nabla_r R^r=0,$$

gdzie R^i są współrzędnymi wektora strumienia cieplnego odniesionego do jednostki powierzchni ciała odkształconego. Wektor ten, jak pokazano np. w [3], dla ciała izotropowego można przedstawić w następującej postaci:

$$(4.16)\qquad R^i=(C_1\delta^i_j+C_2\varepsilon^i_j+C_3\varepsilon^i_r\varepsilon^r_j)\nabla^j T,$$

gdzie ∇^j oznacza różniczkowanie kontrawariantne w B, a C_1, C_2 oraz C_3 są funkcjami trzech niezmienników (1.7) oraz trzech niezmienników termiczno-odkształceniowych

$$(4.17)\qquad I_4=\nabla^i T\nabla_i T,\qquad I_5=\varepsilon^i_j\nabla_i T\nabla^j T,\qquad I_6=\varepsilon^i_r\varepsilon^r_j\nabla_i T\nabla^j T.$$

Podstawiając (4.16) do (4.15) otrzymujemy ostatecznie

$$(4.18)\qquad \nabla_i[(C_1\delta^i_j+C_2\varepsilon^i_j+C_3\varepsilon^i_r\varepsilon^r_j)\nabla^j T]=0.$$

Równania (4.9), (4.13) oraz (4.18) tworzą układ trzech równań różniczkowych z trzema niewiadomymi funkcjami $T(r)$, $Q(r)$ oraz $p(r)$. W celu rozwiązania tego układu najwygodniej jest korzystając z (4.9) wyrazić temperaturę $T(r)$ przez funkcję $Q(r)$, $T=T(Q(r),r)$ i otrzymany wynik podstawić do (4.18). Otrzymuje się w ten sposób równanie różniczkowe zwyczajne z jedną tylko niewiadomą $Q(r)$. Po wyznaczeniu z tego równania funkcji $Q(r)$ można podstawiając $Q(r)$ do (4.13) wyznaczyć funkcję $p(r)$.

Równania różniczkowe (4.9), (4.13) oraz (4.18) są na ogół nieliniowe. Z tego powodu rozwiązań można na ogół poszukiwać tylko na drodze numerycznej. Wskażemy tutaj na prosty przykład, który udaje się rozwiązać analitycznie. Przyjmiemy mianowicie

$$\varphi(T) = \exp \nu(T - \mathring{T}), \tag{4.19}$$

$$C_1 = \text{const}, \quad C_2 = C_3 = 0, \tag{4.20}$$

gdzie ν jest pewną stałą. Założenie (4.20) równoważne jest założeniu, że rozkładem temperatur rządzi klasyczne równanie ustalonego przepływu ciepła $\nabla^2 T = 0$.

Równanie (4.18) zawiera teraz jedną tylko niewiadomą $T(r)$. Po przyjęciu, że temperatury na powierzchni $r = a$ oraz $r = b$ są odpowiednio równe T_a oraz T_b, mamy

$$T = 2\alpha \ln r + \beta, \tag{4.21}$$

$$2\alpha = \frac{T_a - T_b}{\ln a - \ln b}, \quad \beta = -\frac{T_a \ln b - T_b \ln a}{\ln a - \ln b}. \tag{4.22}$$

Podstawiając (4.19) oraz (4.21) do (4.9) otrzymujemy równanie różniczkowe, w którym jedyną niewiadomą jest $Q(r)$:

$$Q(Q + rQ_r) r^{2\nu\alpha} = \lambda \exp \nu(\mathring{T} - \beta). \tag{4.23}$$

Postać rozwiązania tego równania zależy od wartości współczynnika α charakteryzującego termiczne obciążenie rozpatrywanego cylindra. Istnieją mianowicie trzy różne rozwiązania odpowiadające przypadkom $\nu\alpha = 0$, $\nu\alpha = 1$ oraz $\nu\alpha \neq 0;1$. Dla $\nu\alpha \neq 0;1$ mamy

$$Q^2 = A r^{-2\alpha\nu} + B r^{-2}, \tag{4.24}$$

gdzie

(4.25)

$$A = \frac{\lambda}{1 - \nu\alpha} \exp \nu(\mathring{T} - \beta), \quad B = a^2 \left[\frac{1}{\mu^2} - \frac{\lambda}{1 - \nu\alpha} a^{-2\nu\alpha} \exp \nu(\mathring{T} - \beta)\right].$$

Dla $\nu\alpha = 1$ jest

$$Q^2 = \bar{A} r^{-2} \ln r + \bar{B} r^{-2}, \tag{4.26}$$

gdzie

$$\bar{A} = 2\lambda \exp \nu(\mathring{T} - \beta), \quad \bar{B} = \frac{a^2}{\mu^2} - 2\lambda \exp \nu(\mathring{T} - \beta). \tag{4.27}$$

Dla $\nu\alpha = 0$, $\nu \neq 0$ jest

$$Q^2 = \bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}} r^{-2}, \tag{4.28}$$

gdzie

$$\bar{\bar{A}} = \lambda \exp \nu(\mathring{T} - T_a), \quad \bar{\bar{B}} = a^2 \left[\frac{1}{\mu^2} - \lambda \exp \nu(\mathring{T} - T_a)\right]. \tag{4.29}$$

Ostatni przypadek odpowiada równomiernemu ogrzaniu rury $T = T_a = T_b$. Przy $T_a = \mathring{T}$, jak również przy $\nu = 0$, odpowiada on rozwiązaniu dla ciała nieściśliwego [2].

Dla każdego z rozpatrzonych wyżej przypadków funkcja $\underset{\sim}{Q}(r)$ jest jednoznacznie określona. Zgodnie z uwagami zawartymi w pierwszej części punktu geometria odkształcenia jest więc całkowicie określona. Pozostaje jeszcze wyznaczyć funkcję $p(r)$ oraz ciśnienie q. Występujące w równaniu (4.13) wielkości Ψ_1 oraz Ψ_2 jako funkcje niezmienników I_1, I_2 oraz temperatury T są zgodnie z (4.22) i (4.24) [ewentualnie (4.26) lub (4.27)]—znanymi funkcjami zmiennej r. Równanie (4.13) zawiera więc tylko jedną niewiadomą $p(r)$. Na podstawie związków (4.13) i (4.14) mamy więc

$$
\begin{aligned}
(4.30)\qquad p(r) = \int_b^r \frac{1}{r}\,[Q^{-2} - (Q + rQ_{,r})^{-2}]\,(\Psi_1 + \lambda^2\,\Psi_2)\,dr - {}&\\
- (Q + rQ_{,r})^{-2}\,[\Psi_1 + (\lambda^2 + Q^{-2})\,\Psi_2]&,
\end{aligned}
$$

$$
(4.31)\qquad q = -\int_b^a \frac{1}{r}\,[Q^{-2} - (Q + rQ_{,r})^{-2}]\,(\Psi_1 + \lambda^2\,\Psi_2)\,dr.
$$

Ostatnie dwa związki zamykają rozwiązanie rozpatrywanego tutaj przykładu. Należy podkreślić, że związek (3.10) nie był wcale wykorzystany. Stanowi on odrębne równanie pozwalające przy pomocy związków (4.21), (4.24) lub (4.26) albo (4.28) oraz (4.30) wyznaczyć entropię S.

4.3. Odkształcenie adiabatyczne. W granicznym przypadku, gdy wektor przepływu ciepła dąży do zera, proces $\mathring{B} \to B$ dąży do procesu adiabatycznego. Takim procesem dla rury grubościennej zajmować się będziemy w niniejszym punkcie.

Jeśli materiał jest nieściśliwy, to obliczenia dla procesu adiabatycznego przebiegają identycznie jak dla procesu izotermicznego. Wystarczy mianowicie oprzeć rozważania nie na energii swobodnej $F = F(I_1, I_2, T)$, a na energii wewnętrznej $U = U(I_1, I_2, S)$. Prowadzi to do identycznych w zasadzie ostatecznych rezultatów z tym, że w końcowych wzorach dla procesu adiabatycznego występuje U, a dla procesu izotermicznego—funkcja F. Jak wykażemy niżej, w przypadku materiału wykazującego rozszerzalność termiczną obliczenia dla procesu adiabatycznego są zasadniczo różne od obliczeń dla procesu izotermicznego.

Na podstawie (3.10) mamy mianowicie

$$
(4.32)\qquad s = \text{const}, \qquad p = \mathring{\varrho}\left(\mathring{S} + \frac{\partial F}{\partial T}\right)\left(\frac{d\varphi}{dT}\right)^{-1},
$$

$$
(4.33)\qquad \mathring{S} = -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_{T=\mathring{T},\ I_1=I_2=3}
$$

Funkcja $p(r)$ nie może więc w tym przypadku być wybrana dowolnie. Podstawiając (4.32) do równania równowagi (4.13) mamy

$$(4.34) \quad \frac{d}{dr}\left\{(Q+rQ_r)^{-2}[\Psi_1+(\lambda^2+Q^{-2})\Psi_2]+\mathring{\varrho}\left(\mathring{S}+\frac{\partial F}{\partial T}\right)\left(\frac{d\varphi}{dT}\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{r}[(Q+rQ_r)^{-2}-Q^{-2}](\Psi_1+\lambda^2\Psi_2)=0.$$

Równanie (4.33) łącznie z równaniem (4.9) stanowi układ dwu równań różniczkowych z niewiadomymi $Q(r)$ oraz $T(r)$. Za pomocą tych funkcyj wyrazić można w rozpatrywanym przypadku wszystkie pozostałe funkcje, a więc Ψ_1, Ψ_2, $\partial F/\partial T$ oraz $d\varphi/dT$.

W celu rozwiązania układu równań (4.9) oraz (4.32) najdogodniej jest wyznaczyć ze związku (4.9) temperaturę $T(r)$ w zależności od funkcji $Q(r)$ oraz zmiennej r, czyli $T=T(Q(r),r)$. Funkcje Ψ_1, Ψ_2, $\partial F/\partial T$ oraz $d\varphi/dT$ można teraz przedstawić jako funkcje zmiennej r oraz funkcji $Q(r)$. Po podstawieniu tych rezultatów do (4.34) równanie to zawiera tylko jedną nieznaną funkcję mianowicie $Q(r)$. Łącznie z warunkiem brzegowym (4.4) równanie to określa całkowicie funkcję $Q(r)$, a więc geometrię odkształcenia. Mając funkcję $Q(r)$ można z kolei łatwo określić zgodnie z (4.9) funkcję $\varphi(r)$, a więc i $T(r)$, a następnie za po nocą (4.10) tensor τ^{ij}.

Jak się zdaje, dotychczas nie zaproponowano żadnej postaci funkcji $F(I_1, I_2, T)$ dla materiałów sprężystych wykazujących rozszerzalność termiczną. Uniemożliwia to wykonanie konkretnych obliczeń dla takiego materiału.

Literatura cytowana w tekście

[1]. И. И. Гольденблат, *Некоторые вопросы механики деформируемых сред*, Москва 1955.

[2] A. E. Green, W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.

[3] A. E. Green, J. E. Adkins, *Large Elastic Deformations*, Oxford 1960.

[4] C. Truesdell, R. Toupin, *The Classical Field Theory*, Flugge's Encyclopedia of Physics. Vol. III/1, Berlin 1960.

Резюме

ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ УПРУГОГО ТЕЛА С ГЕОМЕТРИЧЕСКИ-ТЕПЛОВЫМИ СВЯЗЯМИ

Условие несжимаемости является частным случаем геометрически-тепловых связей в виде $f(\varepsilon_{ij}, \tau^{ij}, S, T)=0$. В работе выведены физические уравнения для упругого материала, характеризующегося такими связями (в общем случае и в случае изотропного материала), а затем решена задача о конечном растяжении и инфляции толстостенной трубы из материала проявляющего свойство тепловой расширяемости. Решение дано для изэнтропной деформации при стационарном потоке тепла.

Summary

CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR ELASTIC MATERIALS WITH THERMO-GEOMETRIC CONSTRAINTS

The incompressibility condition constitutes a particular case of thermo-geometric constraints of the form $f(\varepsilon_{ij}, \tau^{ij}, S, T) = 0$. In the paper the constitutive equations are established which correspond to elastic bodies characterized by such constraints (for both the general case and the case of isotropic bodies); moreover, the solutions are given to the problem of finite stretching and inflation of a thick-walled cylinder made of thermally expanding materials. The solutions apply to adiabatic deformations and to deformations with steady radial heat flow.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 8 listopada 1963 r.