MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 2 (1965)

METODA PRZYBLIŻONEGO OBLICZANIA PROBLEMÓW POCZĄTKOWO-BRZEGOWYCH W ZASTOSOWANIU DO NIESTACJONARNYCH ZAGADNIEŃ PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

ZYGMUNT THRUN (GDAŃSK)

1. Uwagi wstępne

Najbardziej wyczerpującym ujęciem ścisłych rozwiązań zagadnień początkowo-brzegowych, związanych z równaniem przewodnictwa cieplnego, rozwiązań zarówno bezpośrednich, jak i uzyskiwanych poprzez stosowanie transformacji Laplace'a lub funkcji Greena, jest monografia CARSLAWA i JAEGERA [1]. Zagadnienia powyższe można jednakże rozwiązywać i na innej drodze. Dane zagadnienie początkowo-brzegowe można na przykład różnymi sposobami sprowadzić do zagadnienia czysto brzegowego. Jednym ze sposobów jest podwyższanie rzędu równania różniczkowego wraz z dołączeniem dalszych warunków brzegowych często dowolnie obranych [6]. Po takim sprowadzeniu można się już posłużyć metodami rozwiniętymi dla zagadnień brzegowych.

Dla wielu jednak bardziej skomplikowanych problemów początkowo-brzegowych trzeba się w praktyce zadowolić rozwiązaniami przybliżonymi. Rozwiązania takie są często pożyteczne i w takich przypadkach, w których rozwiązania ścisłe istnieją, lecz wyrażają się w sposób skomplikowany przez funkcje specjalne, dla których brak wystarczających tablic. Celem niniejszej pracy jest wprowadzenie pewnego sposobu wyznaczania rozwiązań przybliżonych, który nadaje się praktycznie do wszystkich rodzajów zagadnień niestacjonarnego przepływu ciepła w polach źródłowych i bezźródłowych oraz przy dowolnych rozkładach temperatur początkowych. Sposób ten można również z powodzeniem stosować do niestacjonarnych zagadnień w ciałach o niejednorodnych własnościach termicznych. Rozszerzenie tego sposobu na inne zagadnienia początkowo-brzegowe jest proste.

Rozwiązań przybliżonych poszukuje się w postaci szeregu złożonego z iloczynów dwóch rodzajów funkcji: funkcji $a_i(t)$, zmiennej czasowej t oraz funkcji $\varphi_i(x_k)$ współrzędnych przestrzennych. Na początku obliczeń zakłada się funkcje φ_i w ten sposób, ażeby spełniały one dane jednorodne warunki brzegowe, przy czym funkcja pierwsza $\varphi_0(x_k)$ musi spełniać niejednorodne warunki zagadnienia. Nie znane funkcje czasowe $a_i(t)$ wyznacza się z układu równań różniczkowych oraz z warunku początkowego rozkładu temperatury. Układ równań różniczkowych otrzymuje się z warunków ortogonalności wszystkich funkcji $\varphi_l(x_k)$ do wyrażenia otrzymanego przez wstawienie przybliżonego rozwiązania do równania przewodnictwa cieplnego. W tym sensie sposób ten można uważać jako rozszerzenie metody Galerkina [3, 5]. Spełnienie danego warunku początkowego sprowadza się do zagadnienia wariacyjnego, tj. do wyznaczenia takiej wartości funkcji $a_i(t=0)$, dla której istnieje minimum całki (po danym obszarze) z kwadratu różnicy między danym początkowym rozkładem temperatury, a rozkładem przybliżonym w chwili $t \to 0$ [wzór (1.8)].

Omówioną metodę postępowania przedstawimy na przykładzie zagadnień dwuwymiarowych.

Zagadnieniami dwuwymiarowymi będziemy tu nazywali takie zagadnienia, w których temperatura jest zależna od współrzędnej czasowej t i od dwóch współrzędnych przestrzennych x_1, x_2: $T = T(t, x_1, x_2)$. Przepływ strumienia cieplnego będzie tu zachodził w płaszczyznach równoległych. Jak wiadomo[1], równaniem przewodnictwa cieplnego w takich przypadkach jest

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}\right) - \frac{A}{c\gamma} = 0 \tag{1.1}$$

w obszarze Ω, $0 < x_r < a_r$ $(r = 1, 2)$ przy danych warunkach brzegowych

$$\frac{\partial T}{\partial x_r} + h_r(T - T_r) = 0 \tag{1.2}$$

wzdłuż obwodu obszaru Ω oraz przy warunku początkowym

$$T = f(x_1, x_2) \quad \text{dla } t = 0. \tag{1.3}$$

Powyżej wprowadzono następujące oznaczenia:

γ ciężar właściwy ośrodka,
c ciepło właściwe,
h współczynnik przejścia ciepła do otoczenia,
K zdolność przewodzenia ciepła,
$\frac{K}{c\gamma} = \varkappa$ współczynnik przewodzenia cieplnego,
A ciepło wytwarzane przez jednostkę objętości.

T_r oznacza tu temperaturę otoczenia, do którego odbywa się promieniowanie ciepła lub też, w przypadku $h_r \to \infty$, oznacza daną temperaturę wzdłuż rozpatrywanego brzegu obszaru. T_r będziemy przyjmowali jako niezależne od czasu. Dla zagadnień, dla których $T_r = T_r(x_s, t)$ oraz $A = A(x_s, t)$, rozwiązanie $T(x_s, t)$ łatwo otrzymamy z rozwiązania $F(x_s, \lambda)$ dla tego samego problemu przy ustalonych wartościach $T_r(x_s, \lambda)$ oraz $A(x_s, \lambda)$ za pomocą znanego[2] twierdzenia Duhamela:

$$T(x_s, t) = f(x_s) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} F(x_s, \lambda, t-\lambda)\, d\lambda, \qquad s = 1, 2, 3. \tag{1.4}$$

[1] Por. [2], str. 9, wzór (1.1).

[2] Por. [1], str. 21.

Przybliżone rozwiązanie zagadnienia (1.1) przy warunkach brzegowych (1.2) i warunku początkowym (1.3) przyjmujemy w postaci:

$$T^*_{(x_1, x_2, t)} = \varphi_0(x_1, x_2) + \sum_{i=1,2}^{n} a_i(t)\, \varphi_i(x_1, x_2). \tag{1.5}$$

Funkcję $\varphi_0(x_1, x_2)$ zakładamy tak, ażeby było spełnione równanie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\varphi_0(x_1, x_2) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x_r < a_r\,, \quad r = 1, 2, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_r} + h_r(\varphi_0 - T_r) = 0$$

wzdłuż krawędzi obszaru Ω.

Pozostają do spełnienia równości

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \varkappa\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\right]\sum_{i}^{n} a_i \varphi_i - \frac{A(x_1, x_2, t)}{c\gamma} = 0 \tag{1.7}$$

w obszarze Ω oraz

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_r} + h_r\right)\sum_{i}^{n} a_i \varphi_i = 0$$

na brzegu obszaru Ω.

Warunek początkowy (1.3) spełniony jest w ten sposób, ażeby

$$\delta \iint_{\Omega} \{f x_1, x_2) - T^*(x_1, x_2, t = 0)\}^2\, dx_1 dx_2 = 0. \tag{1.8}$$

W przypadkach stacjonarnego wytwarzania ciepła $A = A(x_1, x_2)$ wyrażenie $A/c\gamma$ z równania (1.7) przejdzie do pierwszego równania (1.6). Jak wynika z (1.6) $\varphi_0(x_s)$ jest rozwiązaniem równania Poissona w przypadkach, gdy $A(x_s)$ jest stacjonarne. Zajmiemy się rozwiązaniem zagadnienia (1.7) i (1.8). Funkcje $\varphi_i(x_s)$ muszą być pierwszymi ($i = 1, 2, \ldots, n$) funkcjami układu zupełnego ($i=1, 2, \ldots, n, \ldots$) oraz muszą być tak dobrane, aby spełniały jednorodne warunki brzegowe z (1.7). Jeżeli ponadto zażądamy, aby zamiast ścisłego spełnienia równania różniczkowego każda funkcja φ_k z osobna była ortogonalna do wyrażenia stanowiącego lewą stronę równania (1.7), to otrzymamy układ następujących zwyczajnych równań różniczkowych:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{da_i}{dt} A_{ik} + a_i\,(B_{ik} + C_{ik}),\right] - Z_k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.9}$$

gdzie współczynniki oznaczają następujące wyrażenia całkowe:

$$A_{ik} = \iint_{\Omega} \varphi_i(x_1, x_2)\, \varphi_k\,(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2, \qquad B_{ik} = -\iint_{\Omega} \varkappa \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_1^2} \varphi_k\, dx_1 dx_2,$$

(1.10)

$$C_{ik} = -\iint_{\Omega} \varkappa \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_2^2} \varphi_k dx_1 dx_2, \qquad Z_k = \iint_{\Omega} \frac{A}{c\gamma} \varphi_k\, dx_1\, dx_2.$$

Do rozwiązania układu równań różniczkowych (1.9) potrzebne jest n warunków początkowych, które otrzymamy z (1.8) w postaci

$$\frac{\partial}{\partial a_k(t=0)} \iint_{\Omega} [f(x_1, x_2) - T^*(x_1, x_2, t=0)]^2 \, dx_1 dx_2 = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

czyli:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t=0) A_{ik} - \iint_{\Omega} f(x_1, x_2) \varphi_k \, dx_1 \, dx_2 + \iint_{\Omega} \varphi_0 \varphi_k \, dx_1 dx_2 = 0. \tag{1.11}$$

Układ równań różniczkowych (1.9) z warunkami początkowymi (1.11) najlepiej sprowadzić do układu równań algebraicznych stosując transformację Laplace'a:

$$\bar{a}_i(p) = \int_0^{\infty} a_i(t) \, e^{-pt} dt, \qquad \bar{Z}_k(p) = \int_0^{\infty} Z_k(t) e^{-pt} dt;$$

otrzymamy w ten sposób

$$\sum_{i=1}^{n} \{\bar{a}_i[pA_{ik} + B_{ik} + C_{ik}] - a_i(t=0) A_{ik}\} - \bar{Z}_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.12}$$

Układ tych równań sprowadzi się do n niezależnych równań, jeżeli za funkcje podstawowe $\varphi_i(x_s)$ przyjmiemy takie funkcje ortogonalne, dla których:

$$A_{ik} = B_{ik} = C_{ik} = 0 \qquad \text{dla} \quad i \neq k,$$

$$A_{kk} = \iint_{\Omega} \varphi_k^2 \, dx_1 \, dx_2 \qquad \text{dla} \quad i = k,$$

$$B_{kk} = -\iint_{\Omega} \varkappa \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_1^2} \varphi_k \, dx_1 dx_2, \qquad C_{kk} = -\iint_{\Omega} \varkappa \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_2^2} \varphi_k \, dx_1 dx_2. \tag{1.13}$$

Otrzymamy wtedy

$$\bar{a}_k(A_{kk} p + B_{kk} + C_{kk}) - a_k(t=0) A_{kk} - \bar{Z}_k = 0 \tag{1.14}$$

oraz po retransformacji:

(1.15)

$$a_k = a_k(t=0) e^{-\left(\frac{B_{kk}+C_{kk}}{A_{kk}}\right) t} + \frac{1}{A_{kk}} \int_0^t Z_k(\tau) \, e^{-\left(\frac{B_{kk}+C_{kk}}{A_{kk}}\right)(t-\tau)} d\tau, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Stałe $a_k(t=0)$ wyznaczamy z (1.11):

(1.16)

$$a_k(t=0) = \frac{1}{A_{kk}} \iint_{\Omega} f(x_1, x_2) \varphi_k \, dx_1 dx_2 - \frac{1}{A_{kk}} \iint_{\Omega} \varphi_0 \varphi_k \, dx_1 dx_2, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Zastanówmy się jeszcze nad możliwościami wyboru podstawowych funkcji przybliżeń $\varphi_i(x_s)$. Jak już wspomniano, funkcje te muszą przedstawiać pierwsze kolejne elementy układu zupełnego i muszą być tak dobrane, aby spełniały jednorodne warunki brzegowe dla danego zagadnienia. Jak wyżej wykazaliśmy, szczególnie korzystne jest przyjęcie funkcji ortogonalnych. Warunek ten spełniają w szczególności funkcje trygonometryczne i wielomiany ortogonalne [7]. Dużo wskazówek na temat przyjęcia takich funkcji znajdujemy w literaturze [3, 4]. Jeżeli mamy dane na przykład warunki brzegowe $T = 0$ wzdłuż wypukłego brzegu obszaru opisanego analitycznie kilkoma krzywymi: $\Phi_s(x_i) = 0$ ($s = 1, 2, \ldots, l$), to iloczyn tych funkcji $\Psi = \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$ można przyjąć jako część składową szeregu funkcji przybliżeń:

$$\varphi_1 = \psi, \qquad \varphi_2 = \psi x_1, \qquad \varphi_3 = \psi x_2, \qquad \varphi_4 = \psi x_1^2.$$

Często można przyjąć także różne inne kombinacje wielomianów lub funkcji trygonometrycznych.

2. Przykłady dla zagadnień jednowymiarowych

2.1. Obszar o warunkach brzegowych niejednorodnych, temperatura początkowa $f(x)$. Dla obszaru $0 < x < a$ równania zagadnienia przyjmują postać:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial t} - \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 && \text{dla} \quad 0 < x < a; \\ &T = f(x) && \text{dla} \quad t = 0; \\ &\frac{\partial T}{\partial x} = 0 && \text{dla} \quad x = 0; \\ &T = T_1 && \text{dla} \quad x = a. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Zakładamy przybliżone rozwiązanie (1.5):

$$T^*_{(x,t)} = \varphi_0(x) + \sum_{l}^{n} a_l(t)\varphi_l(x). \tag{2.2}$$

Równania (1.6) upraszczają się do

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} = 0 && \text{dla} \quad 0 < x < a, \\ &\frac{d\varphi_0}{dx} = 0 && \text{dla} \quad x = 0, \\ &\varphi_0 = T_1 && \text{dla} \quad x = a, \end{aligned} \tag{2.3}$$

czyli $\varphi_0(x) = T_1$ i jest stałe.

Równania (1.7) przybierają postać:

$$
(2.4)\qquad
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}-\varkappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sum_i^n a_i\varphi_i=0 &&\text{dla}\quad 0<x<a,\\
&\frac{\partial}{\partial x}\sum_i a_i\varphi_i=0 &&\text{dla}\quad x=0,\\
&\sum_i a_i\varphi_i=0 &&\text{dla}\quad x=a.
\end{aligned}
$$

Przyjmijmy jako funkcje przybliżające $\varphi_i(x)=\cos\frac{i\pi x}{2a}$, $(i=1,2,\ldots,n)$. Spełniają one powyższe jednorodne warunki brzegowe oraz tworzą układ zupełny. Poza tym są to funkcje ortogonalne, więc zagadnienie sprowadza się do układu niezależnych równań (1.14). Wyznaczmy współczynniki (1.13) tego układu

$$A_{ii}=\int_0^a\cos^2\frac{i\pi x}{2a}\,dx=\frac{a}{2},$$

$$B_{ii}=-\varkappa\int_0^a\frac{d^2\varphi_i}{dx^2}\varphi_i\,dx=\varkappa\frac{a}{2}\left(\frac{i\pi}{2a}\right)^2,$$

$$C_{ii}=Z_k=0.$$

Z (1.15) otrzymamy

$$a_i=a_i(t=0)\,e^{-\left(\frac{i\pi}{2a}\right)^2\varkappa t},$$

a z warunku początkowego (1.16)

$$a_i(t=0)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{i\pi x}{2a}\,dx+(-1)^{\frac{i+1}{2}}\frac{4}{i\pi}T_1.$$

Ostatecznym rozwiązaniem przybliżonym jest

$$T^*_{(x,t)}=T_1+\frac{2}{a}\sum_{i=1,3,5\ldots}^{n}e^{-\left(\frac{i\pi}{2a}\right)^2\varkappa t}\cos\frac{i\pi x}{2a}\left[(-1)^{\frac{i+1}{2}}\frac{2a}{\pi i}T_1+\int_0^a f(x)\cos\frac{i\pi x}{2a}\,dx\right].$$

Łatwo zauważyć, że dla n $\to\infty$ jest to wynik ścisły. Dla warunku brzegowego zmiennego w czasie: dla $x=a$, $T=T_1(t)$, rozwiązanie łatwo można otrzymać z powyższego z pomocą twierdzenia Duhamela.

2.2. Obszar, którego brzeg promieniuje ciepło do otoczenia. Równania zagadnienia są takie same jak w przykładzie powyższym, z wyjątkiem warunku brzegowego dla $x=a$, który ma postać

$$\frac{\partial T}{\partial x}+h(T-T_1)=0.$$

Pierwszą część rozwiązania przybliżonego otrzymamy z równań (1.6)

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} = 0 \quad \text{dla } 0 < x < a, \qquad \frac{d\varphi_0}{dx} = 0 \quad \text{dla } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi_0}{dx} + h(\varphi_0 - T_1) = 0 \quad \text{dla } x = a$$

w postaci $\varphi_0 = T_1$.

Trudniej jest dobrać drugą część rozwiązania przybliżonego z równań

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varkappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sum_i^n a_i \varphi_i = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < a,$$

(2.5) $$\frac{\partial}{\partial x} \sum a_i \varphi_i = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + h\right) \sum a_i \varphi_i = 0 \quad \text{dla} \quad x = a.$$

Jeżeli przyjmiemy

$$\varphi_i(x) = \cos \alpha_i x, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.6}$$

to takie przyjęcie spełnia warunek brzegowy dla $x = 0$. Dla równoczesnego spełnienia warunku brzegowego przy $x = a$ konieczne jest, ażeby α_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) były dodatnimi pierwiastkami równania

$$\operatorname{tg} \alpha_i a = h/\alpha_i. \tag{2.7}$$

Pierwiastki te są stabelaryzowane w literaturze [1].

Funkcje (3.6) są ortogonalne i tworzą n pierwszych funkcji układu zamkniętego. Wyznaczmy współczynniki (1.10) układu równań (1.9):

$$A_{ii} = \int_0^a \cos^2 \alpha_i x \, dx = \frac{h + a(h^2 + \alpha_i^2)}{2(h^2 + \alpha_i^2)},$$

$$B_{ii} = \varkappa \alpha_i^2 A_{ii}, \qquad A_{ik} = B_{ik} = 0, \quad \text{dla } i \neq k;$$

stąd:

$$a_i(t) = a_i(t = 0) \exp(-\alpha_i^2 \varkappa t). \tag{2.8}$$

Z warunku początkowego (1.16) otrzymamy

$$a_i(t = 0) = \frac{2(h^2 + \alpha_i^2)}{[h + a(h^2 + \alpha_i^2)]} \int_0^a [f(x) - T_1] \cos \alpha_i x \, dx,$$

ostatecznie więc

$$T^*_{(x,t)} = T_1 + 2 \sum_{i=1,2,\ldots}^{n} \frac{(h^2 + \alpha_i^2)}{[h + a(h^2 + \alpha_i^2)]} e^{-\alpha_i^2 \varkappa t} \cos \alpha_i x \int_0^a [(f(x) - T_1] \cos \alpha_i x \, dx.$$

Dla $n \to \infty$ otrzymujemy znowu wynik ścisły. Podobnie łatwo otrzymujemy w ten sposób rozwiązania w przypadku, gdy warunki brzegowe są odmienne, na przykład gdy dany jest stały strumień ciepła $Q = K\partial T/\partial x$ wzdłuż brzegu $x = a$.

2.3. Obszar z ciepłem wytwarzanym. Równanie różniczkowe (1.1) wraz z warunkami granicznymi przyjmą postać

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \varkappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{A}{c\gamma} = 0 \quad \text{dla } 0 < x < a,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } x = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} + hT = 0 \quad \text{dla } x = a,$$

$$T = 0 \quad \text{dla } t = 0.$$

Rozważmy najpierw wypadek źródeł ciepła rozłożonych w sposób ciągły, niezmiennych w czasie:

$$A = A_0 = \text{const.}$$

Zakładamy rozwiązanie przybliżone jak uprzednio. Funkcje $\varphi_0(x)$ otrzymamy z równań

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} + \frac{A_0}{K} = 0, \quad \frac{d\varphi_0}{dx} = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0, \quad \frac{d\varphi_0}{dx} + h\varphi_0 = 0 \quad \text{dla} \quad x = a.$$

Łatwo znajdujemy

$$\varphi_0(x) = \frac{A_0}{2K}\left(a^2 + \frac{2a}{h} - x^2\right).$$

Ponieważ szereg $\sum a_i\varphi_i$ ma spełniać równania (2.5), to możemy przyjąć znowu funkcje $\varphi_i(x)$ w postaci wyrażeń (2.6), przy czym α_i są znowu pierwiastkami równania (2.7). Wobec tego również wyrażenie (2.8) nadal jest ważne. Stałe $a_i(t = 0)$ wyznaczymy z (1.16):

$$a_i(t=0) = \frac{-1}{A_{ii}}\int_0^a \varphi_0\varphi_k\,dx = \frac{2A_0(h^2+\alpha_i^2)}{K\alpha_i^2[h+a(h^2+\alpha_i^2)]}\left[a\cos\alpha_i a - \sin\alpha_i a\left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\alpha_i a}{h}\right)\right].$$

Ostatecznym rozwiązaniem przybliżonym jest

$$(2.9) \qquad T^*_{(x,t)} = \frac{A_0}{2K}\left\{\left(a^2 + \frac{2a}{h} - x^2\right) - 4h\sum_i \frac{\exp(-\alpha_i^2\varkappa t)\cos\alpha_i x}{\alpha_i^2[h+a(h^2+\alpha_i^2)]\cos\alpha_i a}\right\}.$$

Rozważmy teraz przypadek źródeł ciepła zmiennych w czasie:

$$A = A(t).$$

Rozwiązanie dla takiego przypadku możemy otrzymać z rozwiązania poprzedniego korzystając z twierdzenia Duhamela (1.4). Otrzymamy wtedy po prostych przeliczeniach

$$(2.10) \qquad T^*_{(x,t)} = \frac{2\varkappa h}{K}\sum_{i=1,2}^{n} \frac{\cos\alpha_i x}{[h+\alpha(h^2+\alpha_i^2)]\cos\alpha_i a}\int_0^t A(\tau)\exp[-\alpha_i^2\varkappa(t-\tau)]\,d\tau.$$

Rozwiążemy to zadanie jednakże naszym sposobem bez uciekania się do poprzedniego rozwiązania. Zakładamy przybliżenie

$$T^*_{(x,t)} = \sum_i a_i(t)\, \varphi_i(x).$$

Przyjęliśmy tu $\varphi_0(x) = 0$ ze względu na jednorodne warunki brzegowe zagadnienia. Z powodu zależności od czasu funkcja rozkładu źródeł $A(t)$ wejdzie teraz w skład równań (1.7);

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varkappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sum_i^n a_i(t)\, \varphi_i(x) - \frac{A(t)}{c\gamma} = 0 \qquad \text{dla } 0 < x < a,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_i^n a_i \varphi_i = 0 \quad \text{dla } x = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + h\right) \sum_i^n a_i \varphi_i = 0 \quad \text{dla } x = a,$$

$$\sum_i^n a_i \varphi_i = 0 \quad \text{dla } t = 0.$$

Funkcje $\varphi_i(\varkappa)$ zakładamy znowu w postaci (2.6). Wyznaczamy współczynniki w wyrażeniach (1.15). Otrzymamy jak poprzednio

$$\underset{o}{A_{ii}} = \frac{h + a(h^2 + \alpha_i^2)}{2(h^2 + \alpha_i^2)}, \qquad \frac{B_{ii}}{A_{ii}} = \varkappa \alpha_i^2.$$

Mamy następnie

$$Z_i = \int_0^a \frac{A(t)}{c\gamma} \varphi_i dx = \frac{A(t)}{c\gamma} \frac{\sin \alpha_i a}{\alpha_i}.$$

Ze wzoru (1.15) otrzymamy

$$a_i(t) = a_i(t=0) \exp(-\alpha_i^2 \varkappa t) + \frac{2(h + \alpha_i^2) \sin \alpha_i a}{[h + a(h + \alpha_i^2)] c\gamma\alpha_i} \int_0^t A(\tau) \exp[-\alpha_i^2 \varkappa (t - \tau)]\, d\tau$$

oraz z (1.16):

$$a_1(t=0) = 0.$$

W wyniku ostatecznym otrzymamy wyrażenie na $T^*(x, t)$ identyczne z równaniem (2.10), które otrzymaliśmy uprzednio za pomocą twierdzenia Duhamela. Dla $n \to \infty$ wynik staje się ścisły.

2.4. Jednostkowe, chwilowe źródła ciepła wzdłuż brzegu $x = \xi$ obszaru. Równanie różniczkowe zagadnienia wraz z warunkami brzegowymi ma postać

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \to 0 < x < a, \qquad T = 0 \to \begin{cases} x = 0, \\ x = a. \end{cases}$$

Dany warunek początkowy $T = 1$ dla $t = 0$, możemy przedstawić za pomocą funkcji Diraca $\delta(x-\xi)$.

Ze względu na jednorodne warunki brzegowe zagadnienia przyjmujemy rozwiązanie przybliżone

$$T^*_{(x,t)} = \sum_{i}^{n} a_i(t) \sin\frac{i\pi x}{a}.$$

Wyznaczamy współczynniki (1.10)

$$A_{ii} = \int_0^a \sin^2\frac{i\pi x}{a}\,dx = \frac{a}{2}, \qquad B_{ii} = \varkappa\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \sin^2\frac{i\pi x}{a}\,dx = \varkappa\frac{a}{2}\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2.$$

Ze wzoru (1.15) mamy

$$a_k = a_k(t=0)\exp\left[-\varkappa\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 t\right],$$

oraz z (1.16)

$$a_k(t=0) = \frac{2}{a}\int_0^a \delta(x-\xi)\sin\frac{i\pi x}{a}\,dx = \frac{2}{a}\sin\frac{i\pi\xi}{a}.$$

Rozwiązaniem przybliżonym jest

$$T^*_{(x,t)} = \frac{2}{a}\sum_{i}^{n}\exp\left[-\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 \varkappa t\right]\sin\frac{i\pi\xi}{a}\sin\frac{i\pi x}{a}.$$

Dla $n \to \infty$ otrzymujemy wynik ścisły[3]. Rozwiązania dla zagadnień podobnych lecz o różnych warunkach brzegowych i początkowych możemy równie prosto otrzymać dobierając odpowiednio funkcje $\varphi_i(\varkappa)$.

2.5. Cienki pręt o temperaturze początkowej f_0. Promieniowanie z pobocznicy pręta. Jeżeli pręt jest bardzo cienki to w jego przekroju poprzecznym możemy przyjąć równomierny rozkład temperatury. Mamy wtedy do czynienia z liniowym przepływem ciepła. Jeżeli nie ma promieniowania na bocznej powierzchni pręta, to wyznaczenie rozkładu temperatury sprowadza się do zagadnień uprzednio rozpatrywanych. Rozpatrzmy tutaj wpływ tej utraty ciepła przez promieniowanie. Równaniem różniczkowym tego zagadnienia jest[4]

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \varkappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^3} + \nu T = 0, \tag{2.11}$$

gdzie $\nu = h0/\gamma cF$; 0 jest obwodem pręta w przekroju poprzecznym, F powierzchnią przekroju pręta, constant.

Przyjęto tu zerową temperaturę otoczenia, do którego ciepło promieniuje z bocznej powierzchni pręta. Przybliżone rozwiązanie możemy tu otrzymać w sposób dwojaki.

---

[3] Por. [1], str. 298, wzór 2.

[4] Por. [1], str. 111, wzór (2)

1. Podstawić założone rozwiązanie przybliżone do równania (2.11). Ze względu na obecność członu νT układy równań otrzymane z założenia ortogonalności (1.9) i (1.12) należy wtedy uzupełnić. Dalsza droga p᠎ ᠎ępowania jest wtedy analogiczna do uprzednio stosowanych.

2. Drogą podstawienia $T = Ue^{-\nu t}$ sprowadzić można ró᠎ ᠎nie (2.11) do postaci:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \varkappa \partial^2 U / \partial x^2 = 0.$$

Warunek początkowy: $U = f_0 \to t = 0$. Jeżeli końce pręta $x = 0$ i $= a$ mają być utrzymane w temperaturze zerowej, to otrzymamy warunk brzegowe

$$U = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = a.$$

Wyznaczmy tu rozwiązanie przybliżone drugim sposobem. Przyjmijmy

$$U^*_{(x,t)} = \sum_i^n a_i(t)\,\varphi_i(x),$$

przy czym załóżmy funkcje $\varphi_i(x)$ w postaci:

$$\varphi_i(x) = (a-x)x^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.12}$$

Lepsze byłoby tu przyjęcie $\varphi_i = \sin i\pi x/a$.

Łatwo rozwiązać to zadanie i pokazać, że otrzymalibyśmy w wyniku dla $n \to \infty$ rozwiązanie ścisłe

$$U = \frac{4f_0}{a\pi} \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i} \exp\left[-\varkappa\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 t\right] \sin\frac{i\pi x}{a}. \tag{2.13}$$

Załóżmy tu jednak dla porównania rozwiązanie w postaci (2.12) i przyjmijmy dwa pierwsze przybliżenia

$$U^* = a_1(t)\,(a-x)\,x - a_2(t)(a-x)\,\cdot$$

Obliczamy współczynniki całko᠎ ᠎...

$$\int_0^a (a-x)^2 x^2\,dx = \frac{a^5}{30}, \qquad A_{12} = A_{21} = \int_0^a (a-x)^2 x^3\,dx = \frac{a^6}{60},$$

$$A_{22} = \int_0^a (a-x)^2 x^4\,dx = \frac{a^6}{105}, \qquad B_{11} = 2\varkappa \int_0^a (a-x)\,x\,dx = \varkappa\frac{a^3}{3},$$

$$B_{12} = B_{21} = 2\varkappa \int_0^a (a-x)\,x^2\,dx = \varkappa\frac{a^4}{6},$$

$$B_{22} = -\varkappa \int_0^a (2a-6x)(a-x)\,x^2 dx = \varkappa\,\frac{2}{15}a^5.$$

Jeżeli przyjmiemy $\varkappa = 0.15$ (co odpowiada w przybliżeniu przewodnictwu stali stopowej), $a = 1$, to otrzymamy układ równań (1.12) w postaci

$$\bar{a}_1(2p+3)+\bar{a}_2(p+1{,}5) = 2a_1(t=0)+a_2(t=0),$$

$$\bar{a}_1(p+1{,}5)+\bar{a}_2\left(\frac{4}{7}p+1{,}2\right) = a_1(t=0)+\frac{4}{7}a_2(t=0).$$

Po rozwiązaniu i retransformacji otrzymamy

$$a_1(t) = a_1(t=0)\exp(-1{,}5\,t) - 0{,}5\,a_2(t=0)\,[\exp(-6{,}3\,t) - \exp(-1{,}5\,t)];$$
$$a_2(t) = a_2(t=0)e^{-6{,}3\,t}$$

Układ równań napiszemy teraz następująco:

$$A_{11}a_1(t=0)+A_{12}a_2(t=0) = f_0 B_{11}/2\varkappa;$$
$$A_{21}a_1(t=0)+A_{22}a_2(t=0) = f_0 B_{12}/2\varkappa.$$

Po podstawieniu obliczonych współczynników i rozwiązaniu otrzymamy w wyniku

$$a_1(t=0) = 5f_0, \quad a_2(t=0) = 0.$$

Znaczy to, że również $a_2(t) = 0$, czyli otrzymaliśmy tylko pierwsze przybliżenie. Dla otrzymania następnego należało założyć

$$U^* = a_1(t)(a-x)x + a_3(t)(a-x)x^3.$$

Z pierwszego przybliżenia otrzymujemy więc

$$U^* = 5f_0\,x(1-x)e^{-1{,}5\,t}.$$

Porównajmy to przybliżenie z pierwszym wyrazem szeregu rozwiązania ścisłego (2.13):

$$U_1 = \frac{4}{\pi}f_0\sin\pi x e^{-0{,}15\,\pi^2 t}.$$

Dla $x = 0{,}50$ otrzymamy z obydwóch wyrażeń

$$U^* = 1{,}25\,f_0\,e^{-1{,}5t}, \quad U = 1{,}274\,f_0\,e^{-1{,}48t\,04}.$$

Dla $t = 1$ otrzymamy błąd około 3%, dla czasów t mniejszych błąd jeszcze maleje, dla większych — wzrasta.

Mając rozwiązanie przybliżone $U^*(x, t)$ wyznaczamy przybliżony rozkład temperatury dla rozważanego na początku pręta z zależności:

$$T^*_{(x,t)} = U^*_{(x,t)}\,e^{-\nu t}.$$

3. Zagadnienie dwuwymiarowe

3.1. Jednostkowe, chwilowe źródło ciepła w prostokącie. Niech w miejscu $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$ obszaru prostokątnego $0 < x_i < a_i$, $(i = 1, 2)$, w chwili $t = \lambda$ działa źródło ciepła o wydajności jednostkowej. Równaniem zagadnienia jest (1.1) w obszarze $0 < x_i < a_i$, $(i = 1, 2)$. Niech będą określone jednorodne warunki brzegowe: dla $x_i = 0$ i $x_i = a_i$, $(i = 1, 2)$, $T = 0$. Warunek czasowy możemy przedstawić za pomocą funkcji Diraca następująco:

W chwili $t = \lambda$ jest

$$A/c\gamma = \delta(x_1 - \xi_1)\,\delta(x_2 - \xi_2)\,\delta(t - \lambda).$$

Zakładamy rozwiązanie przybliżone

$$T^*_{(x_1, x_2, t)} = \sum\sum a_{mn}(t)\varphi_{mn}(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s} a_{mn}(t)\sin\alpha_m x_1 \sin\alpha_n x_2,$$

gdzie

$$\alpha_m = m\pi/a_1, \qquad \alpha_n = n\pi/a_2.$$

Ze względu na jednorodne warunki brzegowe funkcja $\varphi_0(x_1, x_2) = 0$. Przyjęty układ funkcji jest zupełny, ortogonalny i spełnia jednorodne warunki brzegowe zagadnienia. Wyznaczamy współczynniki (1.13):

$$A_{mnmn} = \int_0^{a_1}\int_0^{a_2} \sin^2\alpha_m x_1 \sin^2\alpha_n x_2\, dx_1\, dx_2 = \frac{a_1 a_2}{4},$$

$$B_{mnmn} = \varkappa\alpha_m^2 \int_0^{a_1}\int_0^{a_2} \sin^2\alpha_m x_1 \sin^2\alpha_n x_2\, dx_1\, dx_2 = \varkappa\alpha_m^2 \frac{a_1 a_2}{4},$$

$$C_{mnmn} = \varkappa\alpha_n^2 \int_0^{a_1}\int_0^{a_2} \sin^2\alpha_m x_1 \sin^2\alpha_n x_2\, dx_1\, dx_2 = \varkappa\alpha_n^2 \frac{a_1 a_2}{4},$$

$$Z_{mn} = \frac{1}{c\gamma}\int_0^{a_1}\int_0^{a_2} A \sin\alpha_m x_1 \sin\alpha_n x_2\, dx_1\, dx_2$$

$$= \delta(t - \lambda)\int_0^{a_1}\int_0^{a_2} \delta(x_1 - \xi_1)\,\delta(x_2 - \xi_2)\sin\alpha_m x_1 \sin\alpha_n x_2\, dx_1\, dx_2$$

$$= \delta(t - \lambda)\sin\alpha_m\xi_1 \sin\alpha_n\xi_2.$$

Z zależności (1.15) otrzymamy

$$a_{mn} = a_{mn}(t = 0)e^{-(\alpha_m^2 + \alpha_n^2)\varkappa t} + \frac{4}{a_1 a_2}\sin\alpha_m\xi_1 \sin\alpha_n\xi_2 \int_0^t \delta(\tau - \lambda)e^{-\varkappa(\alpha_m^2 + \alpha_n^2)(t - \tau)}d\tau.$$

Ponieważ temperatura początkowa dla $t = 0$ w prostokącie jest równa zeru, $f(x_1, x_2) = 0$, więc ze wzoru (1.16) otrzymamy $a_{mn}(t = 0) = 0$. Wobec tego jest

$$a_{mn} = 4\,\frac{\sin\alpha_m\xi_1 \sin\alpha_n\xi_2}{a_1 a_2}\, e^{-(\alpha_m^2 + \alpha_n^2)(t - \lambda)\varkappa}. \tag{3.1}$$

Rozwiązanie ostateczne otrzymamy w postaci:

$$T^{*}_{(x_1,x_2,t)}=\frac{4}{a_1a_2}\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s}\sin\frac{m\pi\xi_1}{a_1}\sin\frac{n\pi\xi_2}{a_2}\times$$

$$\times\exp\left\{-\varkappa\pi^2\left[\left(\frac{m}{a_1}\right)^2+\left(\frac{n}{a_2}\right)^2\right](t-\lambda)\right\}\sin\frac{m\pi x_1}{a_1}\sin\frac{n\pi x_2}{a_2}.$$

Dla r, $s\to\infty$ otrzymujemy wynik ścisły[5] (tj. funkcję Greena).

Do tego samego wyniku możemy dojść naszym sposobem na innej drodze. Pokażemy tutaj ten wariant rozwiązania. Rozkład temperatury wywołany jednostkowym źródłem w chwili $t=\lambda$ możemy bowiem uważać za temperaturę początkową $f(x_1, x_2)=\delta(x_1-\xi_1)\delta(x_2-\xi_2)$, przesuwając jednocześnie początek rachuby czasu z $t=0$ do chwili $t=\lambda$. Równanie różniczkowe zagadnienia (1.1) i (1.7) będzie wtedy jednorodne, nie zawiera bowiem wyrażenia $A/c\gamma$. Wobec tego z równania (1.10) otrzymamy $Z_i=0$. Zakładając te same funkcje aproksymacji $\varphi_{mn}(x_1,x_2)$ otrzymamy z zależności (1.16) nie jak uprzednio $a_{mn}(t=0)=0$, lecz

$$a_{mn}(t=0)=\frac{4}{a_1a_2}\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\delta(x_1-\xi_1)\delta(x_2-\xi_2)\sin\alpha_m x_1\sin\alpha_m x_2\,dx_1\,dx_2=$$

$$=\frac{4}{a_1a_2}\sin\alpha_m\xi_1\sin\alpha_n\,\xi_2.$$

Wobec tego w wyniku ostatecznym otrzymamy znów (4.1).

3.2. Tarcza prostokątna $x=\pm a_i$, ($i=1, 2$), o różnych warunkach brzegowych. Promieniowanie ciepła z całej powierzchni tarczy do otoczenia. Dla małej grubości D tarczy można przyjąć równomierny rozkład temperatur w przekroju poprzecznym i równanie różniczkowe zagadnienia przyjmie postać[6]

$$(3.2)\qquad \frac{\partial T}{\partial t}-\varkappa\left(\frac{\partial^2T}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2T}{\partial x_2^2}\right)+\mu^2T=0,\qquad -a_i<x_i<a_i,\qquad i=1,2,$$

gdzie $\mu^2=2h/c\gamma D$.

Warunki brzegowe załóżmy następujące:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial x_1}=0 & \text{dla}\quad x_1=\pm a_1,\\[2mm] T=0 & \text{dla}\quad x_2=\pm a_2.\end{cases}$$

Temperatura początkowa jest dowolna: $T=f(x_1,x_2)$ dla $t=0$.

Ze względu na dodatkowy człon μ^2T w równaniu (4.2), należy uzupełnić układ równań (1.9) w następujący sposób:

$$(3.3)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{da_i}{dt}A_{ik}+a_i(B_{ik}+C_{ik}+\mu^2A_{ik})\right]-Z_k=0,\qquad k=1,2,\ldots,n.$$

---

[5] Por. [1], str. 149, wzór (1).

[6] Por. [1], str. 229, (3).

W zastosowaniu do zagadnienia (3.2) $Z_k = 0$. Ze względu na jednorodne warunki brzegowe założymy tu następujące rozwiązanie przybliżone:

$$T^* = \sum_{i}^{n} a_i(t)\varphi_i(x_1, x_2).$$

Ograniczymy się tutaj do pierwszego przybliżenia

$$\varphi_1(x_1, x_2) = (a_2^2 - x_2^2)(x_1^4 - 2a_1^2 x_1^2).$$

Łatwo sprawdzić, że założenie to spełnia dane warunki brzegowe. Wyznaczamy dalej współczynniki równania (3.2) przyjmując dla uproszczenia obliczeń $a_1 = a_2 = 1$

$$A_{11} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (x_1^4 - 2x_1^2)^2(1 - x_2^2)^2\, dx_1 dx_2 = \frac{214 \cdot 16}{35 \cdot 135}, \qquad \frac{1}{A_{11}} = 1{,}379965,$$

$$B_{11} = -\varkappa \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (12x_1^2 - 4)(1 - x_2^2)^2(x_1^4 - 2x_1^2)\, dx_1 dx_2 = \varkappa\frac{64 \cdot 64}{35 \cdot 45},$$

$$C_{11} = 2\varkappa \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (x_1^4 - 2x_1^2)^2(1 - x_2^2)\, dx_1\, dx_2 = \varkappa\frac{16 \cdot 107}{27 \cdot 35},$$

$$\frac{B_{11} + C_{11}}{A_{11}} = \varkappa\frac{1303}{214} = 6{,}0888\varkappa.$$

Z transformacji Laplace'a równania (3.2) przy powyższych danych otrzymamy:

$$\bar{a}_1 = \frac{a_1(t = 0)}{(p + 6{,}0888\varkappa + \mu^2)}.$$

Retransformacja powyższego wzoru daje $a_1 = a_1(t = 0) \exp[-(6{,}0888\varkappa + \mu^2)t]$. Stałą całkowania $a_1(t = 0)$ otrzymamy z (1.16)

$$a_1(t = 0) = 1{,}38 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_2)(1 - x_2^2)(x_1^4 - 2x_1^2)\, dx_1 dx_2.$$

Rozwiązaniem przybliżonym będzie

$$T^*_{(x_1, x_2, t)} = 1{,}38 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_2)(x_1^4 - 2x_1^2)(1 - x_2^2)\, dx_1\, dx_2 \times$$
$$\times \exp[-(6{,}089\varkappa + \mu^2)t](1 - x_2^2)(x_1^4 - 2x_1^2).$$

3.3. Prostopadłościan. Rozważmy prostopadłościan $0 < x_i < a_i$, $(i = 1, 2, 3,)$ o zerowej temperaturze ścian bocznych, przy czym niech w chwili $t = \lambda$ w punkcie ξ_i, $(i = 1, 2, 3)$, działa chwilowe, jednostkowe źródło ciepła. Jeżeli przedstawimy rozkład temperatury wywołany źródłem punktowym za pomocą funkcji Diraca

$$\delta(t - \lambda)\, \delta(x_1 - \xi_1)\, \delta(x_2 - \xi_2)\, \delta(x_3 - \xi_3)$$

i założymy rozwiązanie w postaci:

$$T_{(x_1,x_2,x_3,t)} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} a_{mns}(t)\sin\frac{m\pi x_1}{a_1}\sin\frac{n\pi x_2}{a_2}\sin\frac{s\pi x_3}{a_3},$$

to po analogicznych działaniach jak dla zagadnienia dwuwymiarowego w p. 3.1. otrzymamy w wyniku ścisłe rozwiązanie (funkcję Greena).

4. Zagadnienia w współrzędnych cylindrycznych i sferycznych

Jeżeli rozważamy tylko zagadnienia osiowo-symetryczne, to równaniem przewodnictwa cieplnego we współrzędnych cylindrycznych (r, z) będzie

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - \frac{A}{c\gamma} = 0 \tag{4.1}$$

w obszarze: $0 < r < a, \quad -1 < z < +1.$

Warunki brzegowe:

$$\partial T/\partial r + h_r(T - T_r) = 0 \quad \text{dla} \quad r = a, \quad -l < z < l,$$

$$\partial T/\partial z + h_z[(T - T_z) = 0 \quad \text{dla} \quad z = \pm l,$$

przy czym h_r i h_z mogą przyjmować wartości zera i ∞. Warunek początkowy

$$T = f(r, z) \quad \text{dla} \quad t = 0.$$

Przybliżone rozwiązanie przyjmujemy w postaci

$$T^*_{(r,z,t)} = \varphi_0(r, z) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\varphi_i(r, z). \tag{4.2}$$

Zakładamy taką funkcję $\varphi_0(r, z)$, ażeby było spełnione równanie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_0(r, z) = 0 \quad \text{dla} \quad \begin{cases} 0 < r < a \\ -l < z < l \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} + h_r(\varphi_0 - T_r) = 0 \quad \text{dla} \quad r = a, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} + h_z(\varphi_0 - T_z) = 0 \quad \text{dla} \quad z = \pm l.$$

Pozostaje do spełnienia układ

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \varkappa\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\sum_{i}^{n} a_i\varphi_i - A/c\gamma = 0 \quad \text{dla} \quad \begin{cases} 0 < r < a, \\ -l < z < l, \end{cases}$$

(4.4)

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + h_r\right)\sum a_i\varphi_i = 0 \quad \text{dla} \quad r = a,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + h_z\right)\sum a_i\varphi_i = 0 \quad \text{dla} \quad z = \pm l.$$

Warunek początkowy spełnimy w ten sposób, ażeby

$$\delta \int_0^a \int_{-l}^{l} r[f(r, z) - T^*(r, z, t=0)]^2 \, dr \, dz = 0. \tag{4.5}$$

W przypadku stacjonarnego wytwarzania ciepła przez ośrodek $A = A(r, z)$, wyrażenie $A/c\gamma$ zamiast w (4.4) należy umieścić w (4.3). Układ równań (1.9) będzie tu miał tę samą postać, lecz współczynniki przyjmą następujące wartości:

(4.6)
$$A_{ik} = \int_0^a \int_{-l}^{l} r\varphi_i(r, z)\varphi_k(r, z)\, dr\, dz, \qquad B_{ik} = -\int_0^a \int_{-l}^{l} \varkappa \left(r\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\right)\varphi_k\, dr\, dz,$$

$$C_{ik} = -\int_0^a \int_{-l}^{l} \varkappa r \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2}\varphi_k\, dr\, dz, \qquad Z_k = \int_0^a \int_{-l}^{l} \frac{A}{c\gamma} r\varphi_k\, dr\, dz.$$

Układ równań do wyznaczenia $a_i(t=0)$ otrzymamy z warunków (4.5):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t=0) A_{ik} - \int_0^a \int_{-l}^{l} rf(r, z)\, \varphi_k\, dr dz + \int_0^a \int_{-l}^{l} r\varphi_0\varphi_k\, dr\, dz = 0. \tag{4.7}$$

Jeżeli wybierzemy jako funkcje przybliżeń funkcje ortogonalne takie, dla których $A_{ik} = B_{ik} = C_{ik} = 0$ dla $i \neq k$, to znowu otrzymamy układ wzajemnie niezależnych równań (1.9), z których po rozwiązaniu uzyskamy wyrażenia (1.15), a stałe $a_k(t=0)$ wyznaczymy następująco:

$$a_k(t=0) = \frac{1}{A_{kk}} \int_0^a \int_{-l}^{l} rf(r, z)\varphi_k\, dr dz - \frac{1}{A_{kk}} \int_0^a \int_{-l}^{l} r\varphi_0\varphi_k\, dr\, dz. \tag{4.8}$$

4.1. Walec nieskończony. Niech równanie różniczkowe, warunki brzegowe i temperatura początkowa dane będą następująco:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < r < a,$$

$$T = T_1 = \text{const} \quad \text{dla} \quad r = a, \quad T = f(r) \quad \text{dla} \quad t = 0.$$

Rozwiązanie przybliżone (4.2) przyjmujemy następująco:

$$T^*_{(r,t)} = \varphi_0(r) + \sum_{i}^{n} a_i(t)\varphi_i(r).$$

Funkcja $\varphi_0(r)$ spełniająca (4.3) przy $h_r \to \infty$, jest równa $\varphi_0 = T_1 = \text{const}$. Równania (4.4) przyjmą postać:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \varkappa\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right] \sum a_i\varphi_i = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < r < a,$$

$$\sum a_i\varphi_i = 0 \quad \text{dla} \quad r = a.$$

Przyjmijmy funkcje przybliżeń w postaci funkcji Bessela zerowego rzędu

$$\varphi_i(r) = J_0(\alpha_i r). \tag{4.9}$$

Spełnienie warunku brzegowego dla $r = a$ wymaga, ażeby

$$J_0(\alpha_i a) = 0, \tag{4.10}$$

czyli $\alpha_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ muszą być kolejnymi pierwiastkami równania (4.10). Wiadomo także, że równanie to nie ma pierwiastków podwójnych ani zespolonych. Wyznaczymy współczynniki (4.6):

$$A_{ii} = \int_0^a r J_0^2(\alpha_i r)\,dr = \frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_i a), \qquad A_{ik} = B_{ik} = C_{ik} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq k,$$

$$B_{ii} = -\varkappa \int_0^a \left[r \frac{d^2}{dr^2} J_0(\alpha_i r) + \frac{dJ_0}{dr}(\alpha_i r) \right] J_0(\alpha_i r)\,dr = \varkappa \alpha_i^2 A_{ii}, \qquad Z_k = 0.$$

Z zależności (1.15) mamy $\overline{a}_i = a_i(t = 0) \exp(-\varkappa \alpha^2 t)$ oraz ze wzoru (4.8)

$$a_i(t = 0) = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_i a)} \left[\int_0^a r f(r) J_0(\alpha_i r)\,dr - T_1 \frac{a}{\alpha_i} J_1(\alpha_i a) \right].$$

Ostatecznie wynikiem przybliżonym jest

$$T^*_{(r,t)} = T_1 + \frac{2}{a^2} \sum_{i=1,2\ldots}^{n} \frac{\exp(-\alpha_i^2 \varkappa t)}{J_1^2(\alpha_i a)} J_0(\alpha_i r) \left[\int_0^a r f(r) J_0(\alpha_i r)\,dr - T_1 \frac{a}{\alpha_i} J_1(\alpha_i a) \right]. \tag{4.11}$$

Dla $n \to \infty$ otrzymujemy znowu wynik ścisły[7]. Dla późniejszego porównania powyższego wyniku ścisłego z obliczeniem przybliżonym przejdźmy w (4.11) na współrzędne bezwymiarowe $\varkappa t/a^2 = \tau$, $a\alpha_i = \beta_i$ oraz załóżmy $f(r) = 0$. Otrzymamy wtedy z (4.11)

$$\frac{T}{T_1} = 1 - 2 \sum_{i}^{\infty} \exp(-\beta_i^2 \tau) \frac{J_0(\beta r/\alpha)}{\beta_i J_1(\beta_i)}. \tag{4.12}$$

W szczególności dla $\tau = 0{,}3$ i $r = 0$ mamy $T/T_1 = 0{,}72$.

Przyjmijmy teraz dla rozwiązania tego samego problemu funkcje przybliżeń w postaci:

$$\varphi_i(r) = \cos i\pi r/2a, \qquad i = 1, 3, 5, \ldots, n. \tag{4.13}$$

Rozważmy tylko pierwsze przybliżenie

$$T^* = T_1 + a_1(t) \cos \pi r/2a;$$

po wyznaczeniu współczynników

$$A_{11} = a^2 (1/4 - 1/\pi^2), \qquad B_{11} = \varkappa \pi^2/4(1/4 + 1/\pi^2),$$

[7] Por. [1] str. 174, wzór (4), dla $T = 0$.

[8] Por. [1] str. 175, wykres 19.

oraz po analogicznych obliczeniach jak uprzednio otrzymamy w wyniku pierwsze przybliżenie

(4.14)

$$T^* = T_1 + \frac{4\pi^2}{a^2(\pi^2-4)}\left[\int_0^a rf(r)\cos\frac{\pi r}{2a}\,dr - T_1\frac{a^2}{\pi}\left(2-\frac{4}{\pi}\right)\right]e^{-\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2\left(\frac{\pi^2+4}{\pi^2-4}\right)\varkappa t}\cos\frac{\pi r}{2a}\,.$$

Porównajmy wynik powyższy z wynikiem ścisłym otrzymanym poprzednio. W tym celu załóżmy $f(r) = 0$ oraz przyjmijmy współrzędne bezwymiarowe $\varkappa t/a^2 = \tau$, $a\alpha_i = \beta_i$, $\tau = 0{,}3$ oraz $r = 0$; otrzymamy wtedy

$$\frac{T^*}{T_1} = 0{,}738, \tag{4.15}$$

w odróżnieniu od wyniku ścisłego (4.12). To znaczy, że już z pierwszego przybliżenia z wyrażenia zamkniętego (4.12) w stosunku do wyniku ścisłego z szeregu (4.11) otrzymujemy błąd rzędu tylko 2,5%. Drugie przybliżenie należałoby przyjąć w postaci

$$T^* = T_1 + a_1(t)\cos\frac{\pi r}{2a} + a_2(t)\cos\frac{3\pi r}{2a}.$$

Gdybyśmy do przybliżonego rozwiązania tego samego problemu zamiast (4.9) lub (4.13) przyjęli jako pierwsze przybliżenie

$$T^* = T_1 + a_1(t)(a^2 - r^2),$$

to po analogicznych obliczeniach i przy tych samych danych otrzymamy $T^*/T_1 = 0{,}623$ zamiast (4.12) i (4.13). Z powyższych wyników wyraźnie widać, jak bardzo od rodzaju wyboru funkcji przybliżeń φi zależy zbieżność szeregów kolejnych przybliżeń.

4.2. Walec skończony. Niech zagadnienie będzie określone następującym równaniem różniczkowym i warunkami granicznymi

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = 0 \quad \text{dla} \begin{cases} -l < z < l, \\ 0 < r < a; \end{cases}$$

$$T = 0 \quad \text{dla} \quad t = 0, \quad T = 1 \quad \text{dla} \begin{cases} r = a, \\ z = \pm l. \end{cases}$$

Zakładamy rozwiązanie przybliżone

$$T^*_{(r,z,t)} = 1 + \sum_m \sum_n a_{mn}(t) J_0(\alpha_n r)\cos\frac{m\pi z}{2l},$$

które spełnia warunki brzegowe, jeżeli założymy, że α_n są kolejnymi pierwiastkami równania (4.10) oraz $m = 1, 3, 5, 7, \ldots$ Wyznaczamy współczynniki (4.6)

$$A_{nmik} = B_{nmik} = C_{nmik} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq n, \quad m \neq k,$$

$$A_{nmnm} = \int_0^a \int_{-l}^{l} r J_0^2(\alpha_n r) \cos^2 \frac{m\pi z}{2l} \, dr\, dz = l \frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_n a),$$

$$B_{nmnm} = \varkappa \int_0^a \int_{-l}^{l} \left[r \frac{d^2 J_0(\alpha_n r)}{dr^2} + \frac{d J_0(\alpha_n r)}{dr} \right] J_0(\alpha_n r) \cos^2 \frac{m\pi z}{2l} \, dr\, dz = \varkappa \alpha_n^2 A_{nmnm}$$

dla $i = n, \ k = m$

$$C_{nmik} = \varkappa \left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 A_{nmik}, \qquad Z_{ik} = 0.$$

Zależność (1.15) przybiera postać

$$a_{nm} = a_{nm}(t = 0) \exp \left\{ -\varkappa \left[\alpha_n^2 + \left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 \right] t \right\},$$

a stałe wyznaczamy ze wzoru (4.8)

$$a_{nm}(t = 0) = -8(-1)^{\frac{m-1}{2}} [a\pi_m \alpha_n J_1(\alpha_n a)]^{-1}.$$

Wynik przybliżony

$$T^* = 1 - \frac{8}{\pi a} \sum_{m=1,3,5\ldots} \sum_{n=1,2,3\ldots} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} J_0(\alpha_n r)}{m \alpha_n J_1(\alpha_n a)} \cos \frac{m\pi z}{2l} \exp \left\{ -\varkappa t \left[\alpha_n^2 + \left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 \right] \right\}$$

przybiera wartość ścisłą dla $n, m \to \infty$[9]. W analogiczny sposób możemy otrzymać rozwiązania przybliżone dla zagadnień z innymi warunkami brzegowymi, temperaturą początkową, czy też z działaniem źródeł ciepła A.

4.3. Zagdanienia we współrzędnych sferycznych. Jeżeli rozkład temperatur i źródeł ciepła zależy tylko od współrzędnej r i od czasu t, to równaniem przewodnictwa cieplnego będzie jak wiadomo

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \varkappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{A}{c\gamma} = 0.$$

Dla otrzymania przybliżonych rozwiązań zagadnień związanych z tym równaniem można zbudować wzory we współrzędnych sferycznych analogiczne do uprzednio wyprowadzonych zależności. Wzory całkowe na współczynniki równań (1.9) A_{ik}, B_{ik}, C_{ik} będą teraz zawierały wyrażenie $r^2 dr$ zamiast rdr jak w przypadku współrzędnych cylindrycznych.

Inną drogą rozwiązywania tych zagadnień jest podstawienie $U = Tr$ do równania (4.16), przez co otrzymujemy równanie typu (2.1), które już rozwiązujemy sposobem opisanym w p. 2.

[9] Por. [1], str. 194, wzór (6).

5. Niejednorodność własności termicznych

Własności cieplne ciał mogą się zmieniać z położeniem i temperaturą. W ostatnim przypadku równanie przewodnictwa cieplnego staje się nieliniowe. W dalszym ciągu będziemy rozważali niejednorodność własności termicznych ciał w zależności tylko od współrzędnych przestrzennych $K = K(x_s)$, $c = c(x_s)$. Zamiast równania (1.1) otrzymamy wtedy dla zagadnień dwuwymiarowych równanie przewodnictwa cieplnego w postaci

$$(5.1)\qquad \gamma c(x_1, x_2)\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left[K(x_1, x_2)\frac{\partial T}{\partial x_1}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[K(x_1, x_2)\frac{\partial T}{\partial x_2}\right] - A(x_1, x_2, t) = 0.$$

Warunek początkowy pozostaje w niezmienionej postaci (1.3), a warunki brzegowe (1.2) przyjmą postać

$$(5.2)\qquad \partial T/\partial x_r + h_r(x)(T - T_r) = 0.$$

Przyjmujemy rozwiązanie przybliżone (1.5). Funkcję $\varphi_0(x_s)$ należy tak przyjąć, ażeby spełniała ona niejednorodne warunki brzegowe (5.2) oraz równania

$$(5.3)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\left[K(x_1, x_2)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[K(x_1, x_2)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2}\right] = 0 \quad \text{w obszarze } 0 < x_i < a_i$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} + h_i(x_i)(\varphi_0 - T_i) = 0 \quad \text{dla} \quad x_i = 0,\ a_i, \quad i = 1,2.$$

Druga część rozwiązania ma spełniać warunki

$$\left\{\gamma c(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left[K(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[K(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\right]\right\}\times$$

$$(5.4)\qquad \times \sum_i^n a_i(t)\varphi_i(x_1, x_2) - A = 0 \quad \text{w obszarze } 0 < x_i < a_i,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i} + h_i(x_i)\right]\sum_i^n a_i(t)\varphi_i(x_1, x_2) = 0 \quad \text{dla} \quad x_i = 0,\ a_i$$

oraz warunek początkowy (1.8). W przypadku stacjonarnych źródeł ciepła wyrażenie $A = A(x_s)$ należy zamiast w (5.4) umieścić w (5.3). Układ równań różniczkowych obowiązuje nadal w postaci (1.9), zmienia się jedynie wartość współczynników

$$A_{ik} = \iint_\Omega \gamma c(x_1, x_2)\,\varphi_i(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

$$B_{ik} = -\iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}\left[K(x_1, x_2)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\right]\varphi_k(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

$$(5.5)\qquad C_{ik} = -\iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x_2}\left[K(x_1, x_2)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}\right]\varphi_k\,dx_1\,dx_2, \qquad Z_k = \iint_\Omega A\varphi_k\,dx_1\,dx_2.$$

Dalszy tok rozwiązywania jest identyczny z dotychczasowym postępowaniem i zilustrowany jest poniższym przykładem.

Najprostszymi typami niejednorodności własności termicznych ciał w zagadnieniach jednowymiarowych są: $K = K_0 x^n$, $c = \text{const}$ oraz $K = \text{const}$, $\gamma c = (\gamma c)_0 x^n$. Najważniejszymi przypadkami praktycznie są takie, dla których $0 \leqslant n \leqslant 1$. W odróżnieniu od rozwiązań ścisłych[10] możliwości otrzymania rozwiązań przybliżonych niniejszym sposobem nie są ograniczone do najprostszych tylko wyrażeń na zmienność własności termicznych. Operacje matematyczne sprowadzają się tutaj do wyznaczenia całek [5.5), które w przypadkach skomplikowanych można rozwiązywać numerycznie oraz do rozwiązywania układu równań różniczkowych pierwszego rzędu i to tylko w przypadku, gdy chodzi o większą liczbę przybliżeń.

Przykład. Niech obszar $0 < x < a$ przedstawia ośrodek o niejednorodności własności termicznych według zależności: $K = K_0 x^{1/2}$, $c = \text{const}$. Dane warunki brzegowe, początkowe oraz rozkład źródeł ciepła są zgodne z równaniami

$$\gamma c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[K_0 x^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x}\right] - A(x, t) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < a$$

$$T = f(x) \quad \text{dla} \quad t = 0, \qquad T = T_1 \quad \text{dla} \quad x = 0, \qquad T = T_2 \quad \text{dla} \quad x = a.$$

Przyjmijmy pierwsze przybliżenie rozwiązania w postaci.

$$T^* = \varphi_0(x) + a_1(t)\, x(a-x). \tag{5.6}$$

Funkcję $\varphi_0(x)$ przyjmujemy zgodnie z równaniami (5.3), które wyrażają się tutaj następująco:

$$K_0 \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} \frac{d\varphi_0}{dx}\right) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < a$$

$$\varphi_0 = T_1 \quad \text{dla} \quad x = 0, \qquad \varphi_0 = T_2 \quad \text{dla} \quad x = a.$$

Otrzymamy stąd $\varphi_0 = (T_2 - T_1)\sqrt{x}/\sqrt{a} + T_1$. Wyznaczmy współczynniki (5.5).

$$A_{11} = \gamma c \int_0^a x^2 (a-x)^2 dx = \gamma c \frac{a^5}{30}, \qquad Z_1 = \int_0^a A(x, t)\, x(a-x)\, dx,$$

$$B_{11} = -\int_0^a \frac{d}{dx}\left[K_0 \sqrt{x} \frac{d}{dx}(ax - x^2)\right] x(a-x)\, dx = \frac{22}{105} a^{7/2} K_0, \qquad C_{11} = 0.$$

Wzór (1.15) daje:

$$a_1(t) = a_1(t=0) \exp\left(\frac{-44}{7} \frac{K_0}{a^{3/2} \gamma c} t\right) + \frac{30}{\gamma c a^5} \int_0^t Z_1(\tau)\, e^{\frac{-44}{7 a^{3/2}} \frac{K_0}{c\gamma}(t-\tau)} d\tau.$$

[10] Por. (1), str. 332, wzór (10).

Stałą całkowania $a_1(t = 0)$ wyznaczamy z zależności (1.16);

$$a_1(t=0) = \frac{30}{a^5 \gamma c} \int_0^a f(x) x (a-x) dx - \frac{1}{\gamma c 7 a^2} (11 T_1 + 24 T_2).$$

Podstawiając powyższe wyniki do wyrażenia $a_1(t)$ otrzymujemy rozwiązanie przybliżone z (5.6).

6. Uwagi końcowe

Powyższy sposób przybliżonego obliczania niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego może być z powodzeniem rozszerzony na inne problemy początkowo-brzegowe. Dotyczy to w szczególności trudniejszych zagadnień związanych z ośrodkami niejednorodnymi, gdzie ścisłe rozwiązania napotykają na trudności natury matematycznej. Sposób ten może być też stosowany tam, gdzie istnieją co prawda rozwiązania ścisłe, lecz wyrażają się one w skomplikowany sposób przez funkcje specjalne, dla których brak wystarczających tablic. Obliczenie powyższym przybliżonym sposobem sprowadza się praktycznie do obliczenia odpowiednich współczynników całkowych (A_{ik}, B_{ik}, C_{ik}, Z) oraz do rozwiązania układu zwyczajnych równań różniczkowych. W zagadnieniach związanych na przykład z równaniem falowym będą to równania różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu. Dla wyznaczenia tylko pierwszego przybliżenia lub dla większej ilości przybliżeń, lecz przy odpowiednim doborze funkcji przybliżeń, pozostaje od rozwiązania tylko jedno równanie różniczkowe.

Literatura cytowana w tekście

[1] H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford 1948.

[2] W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1960.

[3] Л.В. КАНТОРОВИЧ, В.И. КРЫЛОВ, *Приближенные методы высшего анализа*, Москва 1962.

[4] L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[5] W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Warszawa 1961.

[6] D. N.-G. ALLEN, R. T. SEVERN, *The application of relaxation methods to the solution of non-elliptic partial differential equations*, Quart. J. Appl. Math., nr 4, 1951.

[7] N. N. LEBIEDIEW, *Funkcje specjalne i ich zastosowanie*, Warszawa 1957.

[8] J. W. GREEN, *An expansion method for parabolic partial differential equations*, J. of Res., Nat. Bureau of Standarts, **51** (1953).

Резюме

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПРИМЕНЕНИИ К НЕСТАЦИОНАРНО-КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Дается способ приближенного решения начально-краевых задач теплопроводности. Ищется приближенное решение в форме ряда произведений функций. Этот способ можно использовать для многих вопросов, касающихся нестационарного потока тепла при различных начальных температурах, как и для различных краевых условий, в полях с источником и без источника. Можно, таким способом, получить решения также и для сред, обладающих неоднородными температурными условиями.

Summary

METHOD OF APPROXIMATE SOLUTION OF INITIAL AND BOUNDARY PROBLEMS OF NON-STATIONARY HEAT CONDUCTION

A method of obtaining approximate solutions for initial and boundary-value problems concerning conduction of heat in solids is considered. The approximate solutions are assumed in form of series of products of functions. The method is applicable to many problems of heat conduction for arbitrary initial temperature distributions and boundary conditions. Problems of nonhomogeneous solids may be treated in the same way.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 19 lutego 1964.