

KATASTROFA BUDOWLANA JAKO PRZYPADEK UNORMOWANY

WITOLD WIERZBICKI (WARSZAWA)

Powierzchny obserwator katastrofy budowlanej ocenia ją zwykle jako nie-szczęśliwy wypadek, którego przyczyny często nie są zrozumiałe. Ludzie jednak odpowiedzialni za bezpieczeństwo budowli muszą zdobyć dla jego oceny informacje dotyczące losów i zachowania się budowli w ogóle i na tej podstawie muszą ustalić w stosunku do danego obiektu wymagania, którym powinien on odpowiadać. W ten sposób przestajemy uważać katastrofę budowlaną za niezrozumiałe zdarzenie, lecz zaczynamy ją traktować jako tzw. *przypadek unormowany*, którego wystąpieniu odpowiada pewne unormowane, a więc podlegające ocenie prawdopodobieństwo (por. [1]).

Spośród okoliczności, które mogą wywołać katastrofę budowli, są takie, które —jak pożar lub trzęsienie ziemi—bezpośrednio nie zależą ani od jej konstrukcji, ani od jej wykonania, oraz takie, które właśnie od nich zależą. Czynnikiem tego ostatniego rodzaju są obciążenia budowli, jej odkształcenia oraz występujące w niej naprężenia lub, ogólnie mówiąc, wewnętrzne siły uogólnione. Te trzy czynniki są w zasadzie ze sobą związane, można jednak na ogół oceniać je od siebie niezależnie.

Obciążenia budynków są w tej chwili tak sprecyzowane (por. np. [2]), że tylko rzadko mogą być uważane za dzieło przypadku. Podobnie odkształcenia konstrukcji budowlanych na ogół nie występują jako samodzielny czynnik bezpieczeństwa.

Stąd za czynnik decydujący w sprawie bezpieczeństwa budowli należy uważać przede wszystkim czynniki sił wewnętrznych i ich stosunek do własności mechanicznych materiału, z którego wykonana jest budowla. Ponieważ jednak wyniki prób nad własnościami mechanicznymi materiałów budowlanych są dziełem przypadku, który normuje statystyka tych prób, musimy rozpatrywać bezpieczeństwo budowli jako zagadnienie prawdopodobieństwa unormowanego.

Niżej przytoczone rozważania szczegółowe będą stanowiły uzasadnienie tego twierdzenia, przy czym za katastrofę będziemy uważali takie zmiany w konstrukcji, poza całkiem powierzchownymi, do których dopuścić nie chcemy.

Wymiary poszczególnych elementów konstrukcji stalowych sprawdzamy zwykle na podstawie wzoru

$$(1) \quad \sigma \leq k,$$

w którym σ oznacza naprężenie występujące w danym punkcie budowli, a k naprężenie dopuszczalne.

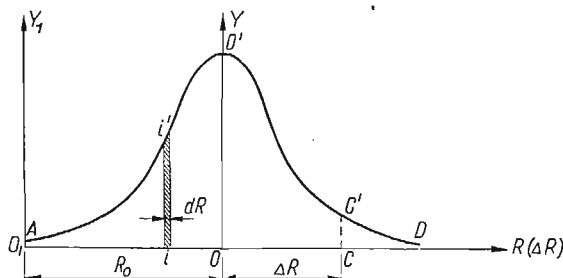
Jak widać ze wzoru (1) obliczenia wytrzymałościowe odbywają się w dwóch etapach. W pierwszym, na podstawie reguł mechaniki budowli wyznaczamy naprężenia, które uważamy za istotnie występujące w danym punkcie budowli, w drugim natomiast porównujemy te naprężenia z naprężeniami uważanymi za dopuszczalne. Obliczenia pierwszego etapu często, a obliczenia drugiego etapu — zawsze oparte być muszą na danych wziętych z doświadczenia.

Przy doświadczalnym badaniu jakiegoś materiału budowlanego poszczególne wyniki prób wytrzymałościowych nie są, jak wiadomo, identyczne. Pochodzi to z powodu wielu nie dających się bliżej określić przyczyn w ten sposób, iż każdy wynik próby wytrzymałościowej musi być uważany za dzieło przypadku, a więc za wielkość losową. Wkraczamy w ten sposób w sferę rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej.

Wyniki próby wytrzymałościowej możemy przedstawić za pomocą równania (rys. 1)

$$(2) \quad y = f(\Delta R),$$

gdzie pod ΔR rozumiemy odchylenia wytrzymałości materiału R od średniej wartości tej wytrzymałości R_0 , a y oznacza tzw. gęstość prawdopodobieństwa występowania tych odchyżeń. Funkcji (2) można nadać kształt krzywej Gaussa, krzywej Pearsona III rodzaju lub innej w zależności od rodzaju materiału, z jakim mamy do czynienia, oraz od rodzaju przeprowadzanych prób.



Rys. 1

W podobny sposób postępujemy, gdy mamy do czynienia z wynikami prób dla naprężeń \bar{R} na granicy plastyczności stali.

Krzywe, których typ podany jest na rys. 1, stanowią punkt wyjścia do badania bezpieczeństwa konstrukcji na podstawie metody probabilistycznej (por. [3]).

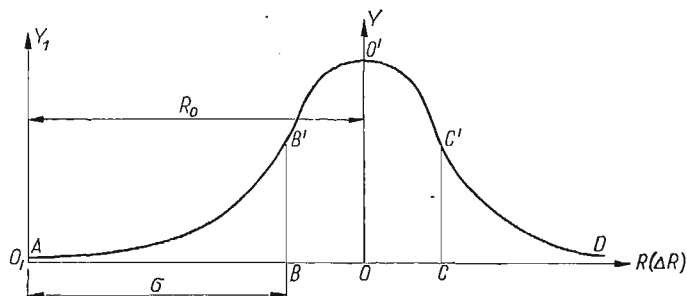
Przypuśćmy, że mamy sprawdzić wymiary pręta stalowego rozciąganego osiowo, a wykres na rys. 2. przedstawia krzywą prawdopodobieństwa dla naprężeń R na granicy wytrzymałości na rozciąganie stali, z której ten pręt jest wykonany.

Przyjmujemy, że krzywa prawdopodobieństwa jest krzywą Gaussa i że jest odniesiona do układu współrzędnych ΔROY . Od punktu O odkładamy odcinek OO_1 równy wartości średniej arytmetycznej R_0 z poszczególnych wyników R prób wytrzymałościowych i znajdujemy nowy układ osi współrzędnych RO_1Y_1 .

Oceniamy bezpieczeństwo rozpatrywanego elementu budowli za pomocą pewnej liczby p , którą nazywamy *wskaznikiem bezpieczeństwa*, a która wyraża prawdo-

podobieństwo, że katastrofa tego elementu nie będzie miała miejsca. Za ewentualną katastrofę uważamy w tym wypadku rozerwanie osiowe rozciąganego pręta.

Aby znaleźć naprężenie dopuszczalne $\sigma = k$ odpowiadające przyjętemu *a priori* wskaźnikowi bezpieczeństwa, odkładamy na rys. 2 odcinek O_1B wyrażający nie-



Rys. 3

znane naprężenie σ . Pole $BB'O'C'D$ będzie w tych warunkach wyrażało prawdopodobieństwo Ω , że naprężenie R na granicy wytrzymałości stali na rozciąganie zawarte jest w granicach od σ do ∞ , a więc prawdopodobieństwo, że R jest większe od σ , czyli inaczej mówiąc, że przy pewnym $\sigma = k$ katastrofa nie nastąpi.

Jak wynika z rys. 2

$$(3) \quad \Omega = \text{polu } BB'O'C'D = \frac{1}{2} \text{ pola } BB'O'C'C + \frac{1}{2} \text{ pola } AO'D.$$

Jeżeli rozpatrywana krzywa prawdopodobieństwa posiada kształt krzywej Gaussa, wówczas pole $BB'O'C'C$ wyraża się tzw. funkcją Laplace'a, czyli

$$(4) \quad \text{pole } BB'O'C'C = \theta[h(R_0 - \sigma)],$$

gdzie $h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}$ a μ jest błędem średnim.

Wobec tego, że przyjęliśmy z góry prawdopodobieństwo p , że rozpatrywany pręt nie będzie rozerwany, dochodzimy do równania

$$(5) \quad \Omega = p.$$

Ponieważ ze względu na własności krzywej Gaussa pole $AO'D$ równa się 1, możemy równaniu (5) nadać postać

$$(6) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta [h(R_0 - \sigma)] = p,$$

skąd korzystając z tablic funkcji Laplace'a obliczamy wartość naprężenia dopuszczalnego $\sigma = k$.

W dalszym ciągu znajdujemy współczynnik bezpieczeństwa

$$(7) \quad n = \frac{R_0}{k},$$

jako stosunek średniej wartości naprężenia na granicy wytrzymałości stali na rozciąganie do wartości dopuszczalnej tego naprężenia.

Rozważania analogiczne do przeprowadzonych dla pręta rozciąganego osiowo znajdują zastosowanie i dla innych sposobów działania sił na konstrukcję, a więc np. dla belki zginanej, dla słupa ściskanego itd.

Dotąd przyjmowaliśmy w naszych rozumowaniach, że wszystkie założenia, na których oparty jest wzór na naprężenia normalne w pręcie rozciągającym, czyli wzór

$$(8) \quad \sigma = \frac{P}{A},$$

zostały całkowicie urzeczywistnione. Tu P oznacza siłę rozciągającą i A — pole przekroju poprzecznego pręta.

W praktyce wzór (8) nie określa na ogół ściśle efektywnych naprężeń występujących w pręcie rozciągającym, które są w rzeczywistości, podobnie jak naprężenia na granicy wytrzymałości lub plastyczności, dziełem przypadku.

Nie podobna jednak sporządzić dla naprężeń efektywnych krzywej prawdopodobieństwa podobnej do krzywej podanej na rys. 1 dla różnych powodów, choćby np. dlatego, że nie ma sposobów bezpośredniego pomiaru naprężeń bez pomiaru odkształceń. W związku z tym musimy przy badaniu bezpieczeństwa pręta rozciąganego korzystać ze wzoru (8) po wprowadzeniu jednak do niego poprawek charakteryzujących odmienną okoliczność, w których pracuje konstrukcja, od tych, dla których wzór ten został wyprowadzony. Tego rodzaju poprawki uważamy jako graniczne, występujące z pewnym przyjętym prawdopodobieństwem. Jeżeli przez σ_0 oznaczymy naprężenie obliczone ze wzoru (8) w tych samych warunkach, dla jakich wzór został ustalony, a przez a graniczny przyrost procentowy tego naprężenia, występujący z prawdopodobieństwem ω i spowodowany przez niespełnienie się pewnego z tych warunków, wówczas iloczyn $\sigma(1+a)$ będzie wyrażał występujące w pręcie z prawdopodobieństwem ω naprężenie graniczne, a naprężenie

$$(9) \quad \sigma_g = \sigma_0 \Pi(1 + a_i)$$

będzie naprężeniem granicznym występującym w myśl reguły o mnożeniu prawdopodobieństw z prawdopodobieństwem

$$(10) \quad \Omega_1 = \Pi\omega_i,$$

spowodowanym niezachowaniem wszystkich lub szeregu warunków, dla których został wyprowadzony wzór (8) przy przyrostach a_i odpowiadających niezachowaniu każdego z nich i przy prawdopodobieństwach ω_i występowania tych przyrostów. Współczynniki a charakteryzują np. odchylenia od założenia płaskich przekrojów, niedokładności obróbki i montażu itd. (por. [3]).

Wzór (9) możemy zastąpić przez wygodniejszy w użyciu wzór

$$(11) \quad \sigma_g = \sigma_0(1 + \sum a_i)$$

ze względu przede wszystkim na naturę współczynników a oraz ze względu na ich małe wartości.

W układach stalowych statycznie niewyznaczalnych, np. w ramach, naprężenie graniczne wyraża się wzorem

$$(12) \quad \sigma_g = \sigma_0(1 + \sum \alpha_i + \sum \beta_i),$$

gdzie β_i są to przyrosty naprężenia σ_0 występujące w danym miejscu układu statycznie niewyznaczalnego z powodu wahań we współczynniku sprężystości E lub z powodu niedokładności w wymiarach konstrukcji. Odpowiednio Ω_2 będzie tu wyrażać prawdopodobieństwo, że poszczególne przyrosty procentowe wywołane przez te przyczyny nie przekroczą każdy z osobna wartości β_i .

Iloczyn

$$(13) \quad \Omega' = \Omega_1 \cdot \Omega_2$$

wyraża prawdopodobieństwo, że żaden z przyrostów α_i lub β_i nie zostanie przekroczony.

Na to więc aby dana konstrukcja stalowa statycznie wyznaczalna lub statycznie niewyznaczalna nie doznała katastrofy, potrzeba przy traktowaniu katastrofy jako przypadku unormowanego zbiegu dwóch niezależnych od siebie faktów następujących:

A) aby naprężenie σ w pewnym punkcie danej konstrukcji nie przekraczało naprężenia granicznego σ_g w tym punkcie, przy czym przez Ω' oznaczamy prawdopodobieństwo tego faktu,

B) aby wytrzymałość materiału R nie była mniejsza od naprężenia σ_g , przy czym prawdopodobieństwo tego faktu wyraża się wielkością Ω_3 .

Stąd

$$(14) \quad \Omega = \Omega' \Omega_3,$$

gdzie Ω wyraża, jak poprzednio, prawdopodobieństwo że dany element konstrukcyjny nie dozna katastrofy.

Wzorowi (14) możemy nadać również postać

$$(15) \quad \Omega = \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3.$$

Przyrównując do siebie dwa różne wyrażenia na prawdopodobieństwo, że konstrukcji nie grozi niebezpieczeństwo, dochodzimy do równań

$$(16) \quad \Omega' \Omega_3 = p.$$

lub

$$(17) \quad \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 = p.$$

W przypadku pręta rozciąganego osiowo, gdy założenia na podstawie których został zbudowany wzór (8) nie są całkowicie spełnione, musimy równanie (5) zastąpić przez równanie (17).

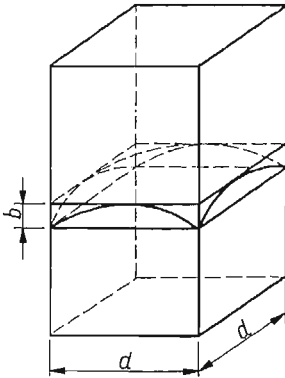
Rozpatrujemy dalej przypadek pręta rozciąganego osiowo, kiedy tylko założenie płaskich przekrojów i prawo Hooke'a nie są całkowicie spełnione.

Wzór (11) przybiera w tych warunkach postać

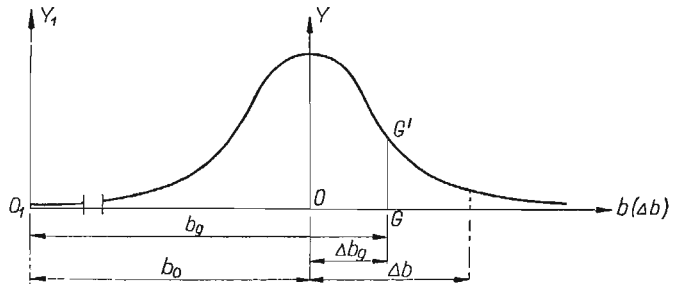
$$(18) \quad \sigma_g = \sigma_0(1 + \alpha_1 + \alpha_2),$$

gdzie α_1 charakteryzuje przyrost naprężenia σ_0 spowodowany niecałkowitym spełnieniem się założenia płaskich przekrojów, a α_2 przyrost wywołany niecałkowitym urzeczywistnieniem się prawa Hooke'a.

Wyobrażamy sobie, że najbardziej zwiczrzonny przekrój poprzeczny pręta rozciąganego zawarty został między dwie płaszczyzny prostopadłe do osi pręta i oddalone od siebie o b (rys. 3). Odległość b jest oczywiście wielkością losową i niech będzie b_0 średnią arytmetyczną pomiarów tej wielkości. Przyjmujemy, że odchylenia $\Delta b = b - b_0$ grupują się według prawa Gaussa, przy czym Δb_g jest odchyleniem granicz-



Rys. 3



Rys. 4

nym (rys. 4). Prawdopodobieństwo, że przyrost naprężenia σ_0 spowodowany niecałkowitym spełnieniem się założenia płaskich przekrojów nie przekroczy wartości $\sigma_0 \alpha_1$ uważamy za równe prawdopodobieństwu, że odchylenie Δb nie przekroczy Δb_g i że odległość b nie przekroczy odległości granicznej $b_g = b_0 + \Delta b_g$. Prawdopodobieństwo to wyraża się polem O_1GG' i wynosi

$$(19) \quad \omega_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_1 (h_1 \Delta b_g).$$

Prawu Hooke'a nadajemy w tym wypadku postać

$$(20) \quad \frac{\sigma}{\varepsilon} = E,$$

gdzie ε oznacza wydłużenie jednostkowe.

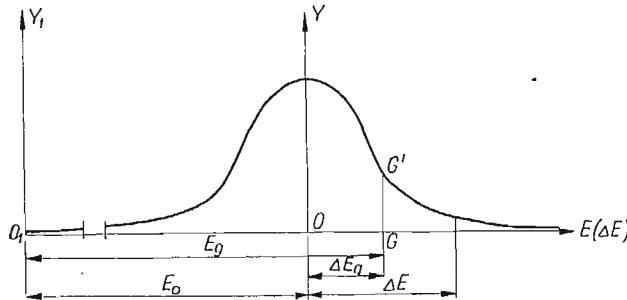
Ponieważ współczynnik E otrzymujemy z doświadczenia, to możemy przyjąć, że odchylenia ΔE poszczególnych jego wartości od średniej arytmetycznej $\Delta E = E - E_0$ grupują się również według krzywej Gaussa (rys. 5). Prawdopodobieństwo, że przyrost naprężenia σ_0 spowodowany niecałkowitym urzeczywistnieniem się prawa Hooke'a nie przekroczy wartości $\sigma_0 \alpha_2$, jest równe prawdopodobieństwu, że wartość współczynnika sprężystości nie przekroczy wartości granicznej $E_g = E_0 + \Delta E_g$, czyli polu O_1GG' ; a więc

$$(21) \quad \omega_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_2 (h_2 \Delta E_g).$$

Z drugiej strony, zastępując na rys. 2 odcinek σ przez odcinek σ_g znajdujemy, że pole $BB'O'C'D$ będzie wyrażało prawdopodobieństwo Ω_3 ; w związku z tym

$$(22) \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_3 [h_3(R_0 - \sigma_g)],$$

gdzie θ_3 i h_3 mają ten sam sens co θ i h we wzorze (4).



Rys. 5

Wstawiając otrzymane wyrażenia na σ_g , ω_1 , ω_2 i Ω_3 do równania (17) znajdujemy:

$$(23) \quad \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_1 (h_1 \Delta b_g) \right] \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_2 (h_2 \Delta E_g) \right] \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_3 [h_3 R_0 - h_3 \sigma_0 (1 + \alpha_1 + \alpha_2)] \right\} = p.$$

Równanie (23) jest równaniem względem naprężenia σ_0 , a otrzymana z niego wartość $\sigma_0 = k$ będzie naprężeniem dopuszczalnym.

Jeżeli za katastrofę uważamy nie rozerwanie się pręta, lecz przekroczenie przez występujące w nim naprężenia granicy plastyczności \bar{R} , należy we wzorze (23) zastąpić R_0 przez \bar{R}_0 i ewentualnie zmienić wartość wskaźnika bezpieczeństwa p . Wówczas zamiast korzystać z krzywej prawdopodobieństwa dla R (rys. 2), musimy uciec się do odpowiedniej krzywej dla \bar{R} .

Korzystamy dalej z równania (17) do wyznaczenia współczynnika bezpieczeństwa n w przypadku elementów zginanych.

Największe naprężenia normalne w belce wyrażają się jak wiadomo wzorem

$$(24) \quad \sigma = \frac{M}{W},$$

gdzie M oznacza moment zginający, a W wskaźnik wytrzymałości.

Przyjmujemy, podobnie jak w zadaniu poprzednim, że spośród założeń, na których oparty jest wzór (24), nie jest całkowicie urzeczywistnione tylko założenie płaskich przekrojów i prawo Hooke'a.

Na podstawie pewnych obliczeń z dziedziny teorii sprężystości można przyjąć, że największa różnica między naprężeniem obliczonym dla belki zginanej, z jednej strony przy oparciu się na założeniu płaskich przekrojów, z drugiej zaś z po-

minięciem tego założenia, dochodzi do 10%. Prawdopodobieństwo, że ta różnica nie będzie większa, można w tych warunkach uważać za równą 1, czyli za pewność. A więc wielkości ω_i i α_i dotyczące niecałkowitego spełnienia się założenia płaskich przekrojów będą równe

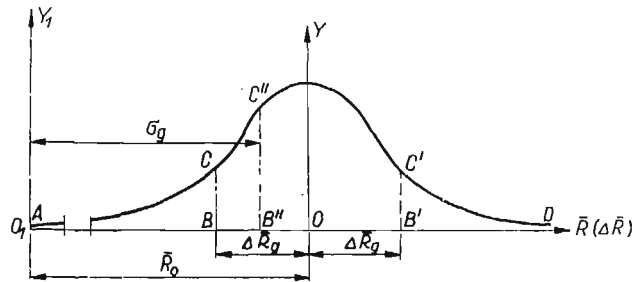
$$(25) \quad \omega_4 = 1, \quad \alpha_4 = 0,100.$$

Przyrost $\alpha_2\sigma_0$ naprężenia σ_0 obliczonego ze wzoru (24), wywołany niecałkowitym spełnieniem się prawa Hooke'a, a więc równania (20), odpowiada granicznemu przyrostowi ΔE_g w rozumieniu rys. 5. Możemy więc tu przyjąć, podobnie jak w przypadku pręta rozciąganego, że współczynniki przyrostu naprężeń α_2 , wywołanemu niecałkowitym urzeczywistnieniem się prawa Hooke'a, odpowiada prawdopodobieństwo wyrażone wzorem (21).

W tych warunkach wzory (10) i (11) dają:

$$(26) \quad \begin{aligned} \Omega_1 = \Omega' &= 1 \cdot \omega_2, \\ \sigma_g &= \sigma_0(1 + \alpha_2 + \alpha_4). \end{aligned}$$

Rozumiejąc przez katastrofę belki wypadek, gdy naprężenie na granicy plastyczności belki zostało przekroczone w pewnym punkcie belki, uciekamy się do wykresu Gaussa dla odchyżeń $\Delta \bar{R}$ (rys. 6). Odkładamy tu odcinek σ_g i wówczas pole



Rys. 6

$B''C''C'D$ będzie wyrażało prawdopodobieństwo, że naprężenie \bar{R} nie będzie mniejsze od σ_g , czyli że

$$(27) \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_3 [h_3(\bar{R}_0 - \sigma_g)].$$

Wstawiając otrzymane wyrażenia ma σ_g , ω_2 , ω_4 i Ω_3 do równania (17) otrzymujemy:

$$(28) \quad \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_2 (h_2 \Delta E_g) \right] \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_3 [h_3 \bar{R}_0 - h_3 \sigma_0 (1 + \alpha_2 + \alpha_4)] \right\} = p.$$

Stąd obliczamy naprężenie dopuszczalne k i odpowiedni współczynnik bezpieczeństwa n .

Najogólniejszym sposobem wyznaczenia wskaźnika bezpieczeństwa p , w przypadku gdy statystyka katastrof z budowlami danego typu jest uboga, może być zastosowanie równania

$$(29) \quad K_b(1-p) = K_0 p_0,$$

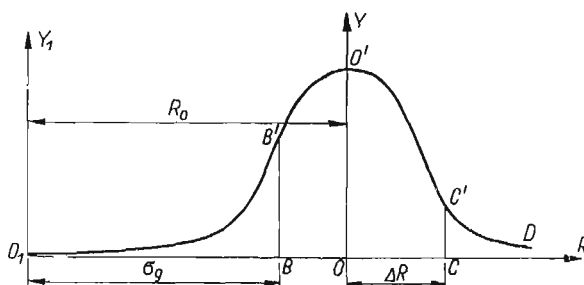
które powstało z przyrównania do siebie oczekiwań matematycznych skutków ekonomicznych dwóch katastrof, z których jedna jest katastrofą budowlaną, a druga katastrofą innego rodzaju lepiej zbadaną ze statystycznego punktu widzenia; tu K_b oznacza straty, jakie może spowodować katastrofa elementu budowlanego, K_0 — straty, jakie może spowodować katastrofa, z którą daną katastrofą budowlaną porównujemy, a p_0 — prawdopodobieństwo tej katastrofy.

Przy stosowaniu metody probabilistycznej do rozwiązywania zadań praktyki inżynierskiej okazało się, że współczynniki a_i można uważać w wielu wypadkach za wielkości nielosowe, a więc przyjmować, że poszczególne prawdopodobieństwa ω_i są równe 1 i że wobec tego niekiedy również i $\Omega' = 1$. W tych warunkach metoda probabilistyczna nabiera cech metody tylko w połowie probabilistycznej, a więc *metody półprobabilistycznej*. Okazało się również, że liczba współczynników a_i może być w metodzie półprobabilistycznej znacznie większa niż w metodzie probabilistycznej.

Przechodząc od metody probabilistycznej do metody półprobabilistycznej przyjmujemy, że w równaniu (17) iloczyn $\Omega_1 \Omega_2 = \Omega' = 1$, wobec czego równanie to przybiera postać

$$(30) \quad \Omega_3 = p,$$

przy czym wielkość Ω_3 zachowuje tu ten sam sens co poprzednio, tzn. wyraża się na rys. 7 polem $BB'O'C'D$.



Rys. 7

Metoda półprobabilistyczna, podobnie jak i probabilistyczna, zabezpiecza budowlę przed katastrofą niejako dwiema drogami: z jednej strony przez wprowadzenie współczynników przyrostu a korygujących jakby ogólnie przyjęte wzory wytrzymałościowe, z drugiej zaś przez wybór właściwego wskaźnika bezpieczeństwa p . Dwie te drogi zmierzające do tego samego celu w zasadzie nie są od siebie zależne. O ile jednak nie rozporządzamy dostateczną liczbą obserwacji i doświadczeń, wówczas pewne uzależnienie tych dróg od siebie ułatwia wyznaczenie właściwych naprężeń dopuszczalnych. W szczególności stosując metodę półprobabilistyczną uciekamy się do tego środka. Robimy to mając przede wszystkim na uwadze stalowe pręty rozciągane i zginane i przyjmując za katastrofę przekroczenie przez naprężenie w pewnym punkcie granicy plastyczności \bar{R} .

Gdybyśmy znali wszystkie przyczyny mogące spowodować zwiększenie naprężeń σ_0 w stosunku do ich wartości otrzymanych ze wzorów (8) lub (24), wówczas naprężenie graniczne

$$(31) \quad \sigma_g = \sigma_0(1 + \max \sum a)$$

musiałyby być uważane za równe największej wartości naprężenia \bar{R} , czyli przy założeniu że naprężenia dopuszczalne są całkowicie wyzyskane, mielibyśmy dla ich wyznaczenia równanie

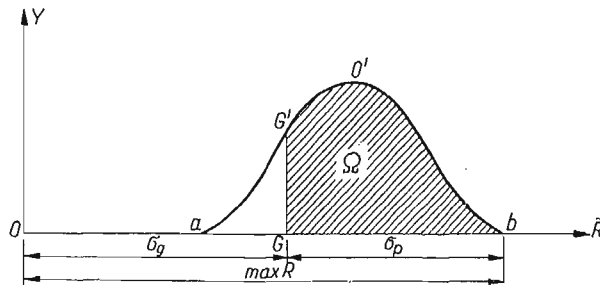
$$(32) \quad k(1 + \max \sum a) = \max \bar{R}.$$

Znaczyłyby to, że przy $\sigma_0 = \sigma_g$ katastrofa nieuchronnie nastąpi, czyli że wskaźnik bezpieczeństwa p równa się 0.

Ponieważ jednak niepodobna za pomocą samych współczynników a uchwycić wszystkich okoliczności zwiększających naprężenia σ_0 , musimy uważać różnicę

$$(33) \quad \sigma_p = \max \bar{R} - \sigma_g$$

(rys. 8) za przyrost naprężenia σ_p , występujący z prawdopodobieństwem $\Omega = p$, a wywołany okolicznościami nie dającymi się ująć przez współczynniki a .



Rys. 8

Współczynniki przyrostu naprężeń a są obliczane na podstawie zasad mechaniki budowli przy zastosowaniu tolerancji ustalonej przez normalizację krajową lub międzynarodową. Przy ich obliczaniu staramy się, aby suma $\sum a_i$ była możliwie najbliższa wielkości uzyskanej ze wzoru (11) przy $\sigma = k = 1400 \text{ kG/cm}^2$. Przyjmując, że wszystkie wchodzące tu w grę współczynniki zostały w danym przypadku uwzględnione i że wszystkie pręty obliczone na podstawie naprężenia dopuszczalnego $k = 1400 \text{ kG/cm}^2$ zdały swój egzamin w praktyce budowlanej, możemy wprowadzić do poszczególnych współczynników a_i pewne korektywy w ten sposób, aby suma $\sum a_i$ odpowiadała równaniu (11).

Dążymy dalej do tego, aby dla powodów wymienionych wyżej wskaźnik bezpieczeństwa p jak najlepiej odpowiadał, według krzywej prawdopodobieństwa zbudowanej dla naprężeń \bar{R} na granicy plastyczności, naprężeniu granicznemu obliczonemu ze wzoru (11) na podstawie przyjętego w obowiązujących przepisach naprężenia dopuszczalnego $k = 1400 \text{ kG/cm}^2$. Przy wyborze wskaźnika bezpieczeństwa decydujemy się mianowicie w tym wypadku na zastosowanie w równaniu (30) $p = 0,8$, ponieważ polu $\Omega = 0,8$ na krzywych prawdopodobieństwa odpowiada

ta sama wartość $\bar{R} = 2338 \text{ kG/cm}^2$ niezależnie od tego, czy mamy do czynienia z wielobokiem prawdopodobieństwa, trójkątem prawdopodobieństwa, krzywą Gaussa, czy z krzywą Pearsona III rodzaju; liczbę tę cechuje więc niezależność od statystycznego opracowania wyników badań nad zmiennością wielkości \bar{R} . Poza tym w tych częściach krzywych prawdopodobieństwa, którym odpowiada pole $\Omega = 0,8$, dokładność odczytów jest największa (por. [3], s. 159).

Aby móc katastrofę mostu stalowego uważać również za przypadek unormowany, musimy w obliczeniach naprężeń zastąpić wzory (8) i (24) przez wzory

$$(34) \quad \sigma = \frac{S\vartheta}{A}, \quad \sigma = \frac{M\vartheta}{W},$$

gdzie ϑ oznacza pewien współczynnik dynamiczny, czyli stosunek odkształceń mostu pod obciążeniem ruchomym do odkształceń pod obciążeniem stałym. Rozumiemy tu przez katastrofę, tak jak wyżej, przekroczenie przez naprężenie normalne granicy plastyczności.

Współczynnik dynamiczny wyrażamy za pomocą wzoru

$$(35) \quad \vartheta = 1 + \frac{a}{2f},$$

gdzie a oznacza amplitudę drgań pionowych przy największym ugięciu mostu, a f — wielkość ugięcia statycznego.

Ze względu na sposób działania dynamicznego ciężarów na most należy współczynnik ϑ uważać za wielkość losową. Jako wielkość losową zadania będziemy w szczególności traktowali drugi składnik dwumianu (35), czyli wielkość

$$(36) \quad a_d = \frac{a}{2f}.$$

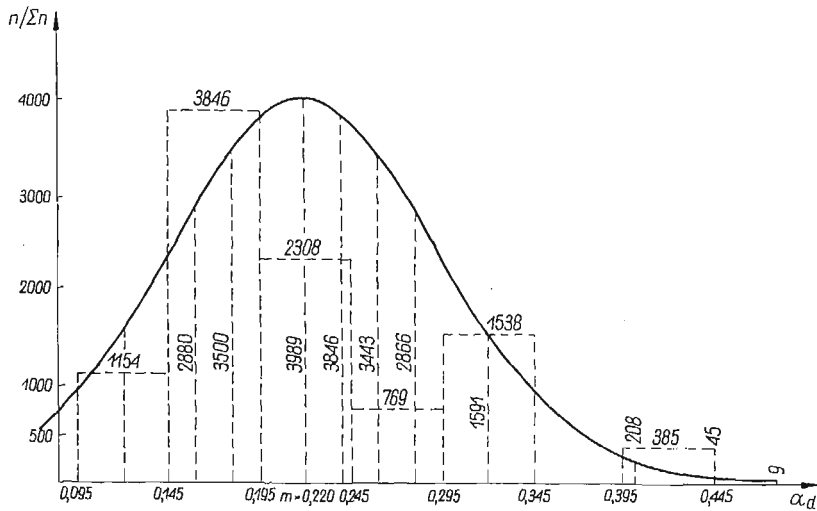
Mając na widoku probabilistyczne ujęcie zagadnienia bezpieczeństwa mostu stalowego przy obciążeniu dynamicznym musimy sporządzić dla wielkości a_d wykres rozkładu gęstości prawdopodobieństw.

Korzystamy tu z danych zawartych w literaturze specjalnej, w znacznym stopniu z danych Lesochina. Wartości a_d , które uwzględniamy, dotyczą mostów kratowych o rozpiętościach zawartych w granicach od 45 do 100 m (por. [4]). Dane te traktujemy dalej jednakowo, niezależnie od źródeł, z których zostały zaczerpnięte, i niezależnie od rozpiętości mostów zawartych w omówionych wyżej granicach. Budujemy więc histogram występowania częstości względnych $n/\Sigma n$ wielkości (36) oraz odpowiednią krzywą prawdopodobieństwa (rys. 9). Na rys. 10 przedstawiającym schemat omawianej krzywej równoległe do osi O , Y_1 odłożone są gęstości prawdopodobieństw, a odcinek a_{d0} przedstawiający średnią wartość a_d oznacza odległość początku układu współrzędnych od osi krzywej.

Wyznaczenie dopuszczalnego naprężenia k dla pewnego elementu mostu stalowego lub też wyznaczenie współczynnika bezpieczeństwa n dla tego elementu wymaga ustalenia dla naprężeń α wartości granicznej. Robi się to na podstawie wzoru

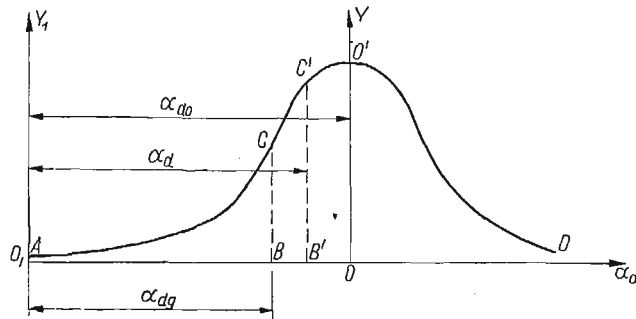
$$(37) \quad \sigma_g = \sigma_0 II(1 + \alpha),$$

gdzie α oznaczają współczynniki przyrostu naprężeń, wyrażające każdy z osobna bądź największy możliwy procentowy przyrost naprężenia σ_0 obliczonego ze wzorów (8) i (24) (współczynniki α_i), bądź też wpływ czynnika dynamicznego (współczynnik α_d).



Rys 9

Współczynniki α poza współczynnikiem α_d charakteryzującym dynamiczne działanie obciążenia mogą być traktowane bądź jako graniczne wartości nielosowe odpowiednich przyrostów naprężenia (metoda półprobabilistyczna), bądź też jako wartości, których nieprzekroczenie wyraża się dla każdego z nich pewnym prawdopodobieństwem ω (metoda probabilistyczna).



Rys. 10

Łącznie prawdopodobieństwo, że żaden z procentowych przyrostów naprężenia σ_0 nie przekroczy w przypadku obciążenia statycznego wartości α_i , wyraża się w myśl twierdzenia o mnożeniu prawdopodobieństw iloczynem

$$(38) \quad \Omega_3 = \prod \omega_i.$$

O ile współczynniki α_i uważamy za wielkości nielosowe, to odpowiednie prawdopodobieństwa ω_i i prawdopodobieństwo Ω_3 równe są 1.

Przyrost naprężenia σ_0 spowodowany czynnikami dynamicznymi obciążenia wyraża, jak było powiedziane poprzednio, współczynnik oznaczony wyżej przez α_d .

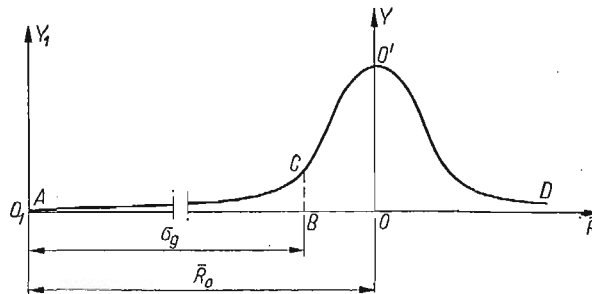
Wzorowi (37) możemy wobec tego nadać postać

$$(39) \quad \sigma_g = \sigma_0 (1 + \alpha_d) II (1 + \alpha_i)$$

lub, co przy małych wartościach α_i daje podobne wyniki, postać

$$(40) \quad \sigma_g = \sigma_0 (1 + \alpha_d) (1 + \sum \alpha_i).$$

Prawdopodobieństwo, że współczynnik α_d , a tym samym i suma $(1 + \alpha_d)$ nie przekroczy pewnej wartości granicznej, oznaczamy przez Ω_d , prawdopodobieństwo zaś, że naprężenie na granicy plastyczności stali jest większe niż naprężenie graniczne σ_g — przez Ω_m .



Rys. 11

Wielkość Ω_m jest przedstawiona na rys. 11 jako pole BCD . Rysunek przedstawia krzywą Gaussa dla naprężeń na granicy plastyczności \bar{R} .

Aby katastrofa mostu nie nastąpiła, potrzeba zbiegu trzech niezależnych od siebie faktów następujących:

A) aby żaden z procentowych przyrostów naprężenia σ_0 wyrażonego jednym ze wzorów (8) lub (24) nie przekroczył wartości α_i (prawdopodobieństwo Ω_s);

B) aby procentowy przyrost naprężenia σ_0 spowodowany przez czynniki dynamiczne nie przekroczył wartości α_{dg} (prawdopodobieństwo Ω_d);

C) aby naprężenie na granicy plastyczności stali było większe od naprężenia granicznego σ_g (prawdopodobieństwo Ω_m).

Tak więc prawdopodobieństwo Ω faktu, że katastrofa mostu nie będzie miała miejsca, jest prawdopodobieństwem złożonym i wyraża się iloczynem

$$(41) \quad \Omega = \Omega_s \Omega_d \Omega_m.$$

Wprowadzamy dalej, jak to zostało zapowiedziane wyżej, wskaźnik bezpieczeństwa p , wobec czego

$$(42) \quad \Omega = p.$$

Z równania tego możemy ustalić dopuszczalne naprężenie w danym elemencie mostu lub odpowiedni współczynnik bezpieczeństwa. Równaniu możemy nadać postać

$$(43) \quad \Omega_s \Omega_d \Omega_m = p.$$

Przy stosowaniu metody półprobabilistycznej przyjmujemy, że wszystkie prawdopodobieństwa ω równe są 1 i że wobec tego w równaniu (43) czynnik Ω_s odpada i równanie przybiera postać

$$(44) \quad \Omega_d \Omega_m = p.$$

Jeżeli się zdecydujemy przyjmując, że $\Omega_d = \Omega_m$ i że

$$(45) \quad \Omega_d = \sqrt{p},$$

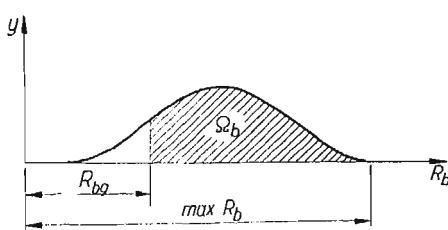
to na wykresie krzywej Gaussa dla wielkości a_d (rys. 10) odkładamy pole BCD równe \sqrt{p} i dochodzimy w ten sposób do wartości granicznej dla a_d , którą oznaczamy przez a_{dg} .

Po ustaleniu granicznych wartości wielkości a_t i a_d możemy rozwiązać równanie (40) względem σ_0 i w ten sposób ze wzoru

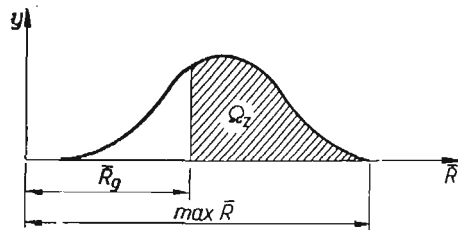
$$(46) \quad k = \sigma_0 = \frac{\sigma_u}{(1+a_d)(1+\Sigma a_t)}$$

ustalić dopuszczalne naprężenie k dla danego elementu mostu stalowego.

Przy badaniu bezpieczeństwa konstrukcji żelbetowych uważamy za katastrofę jednoczesne zgniecenie w elemencie ściskanym lub zginanym betonu i osiągnięcie przez uzbrojenie granicy plastyczności. Aby tak rozumianej katastrofie nadać cechy przypadku unormowanego, uciekamy się do krzywych prawdopodobieństwa przedstawionych na rysunkach 12 i 13.



Rys. 12



Rys. 13

Na rysunku 12 przedstawiamy schemat krzywej prawdopodobieństwa dla wytrzymałości betonu R_b na ściskanie. Powierzchnia zaciemniona wyraża tu prawdopodobieństwo Ω_b , że wartości R_b zawarte są między pewną wartością R_{bg} uważaną za graniczną, a wartością $\max R_b$.

Rysunek 13 przedstawia schemat krzywej prawdopodobieństwa dla naprężenia na granicy plastyczności stali zbrojeniowej. Przez Ω_z wyrażone jest prawdopodobieństwo, że wartości \bar{R} zawarte są między pewną wartością \bar{R}_g uważaną za graniczną, a wartością $\max \bar{R}$.

Aby zniszczenie słupa lub belki żelbetowej nie mogło nastąpić, potrzeba zbiegu dwóch niezależnych od siebie okoliczności następujących:

A. Naprężenie na granicy wytrzymałości betonu musi być większe od wartości granicznej R_{bg} (prawdopodobieństwo Ω_b).

B. Naprężenie na granicy plastyczności prętów stalowych uzbrojenia musi być większe od wartości granicznej \bar{R}_g (prawdopodobieństwo Ω_z).

W związku z tym możemy analogicznie do wzoru (17) ustawić równanie

$$(47) \quad \Omega_b \cdot \Omega_z = p,$$

gdzie wskaźnik bezpieczeństwa p będzie, tak jak wyżej, wyrażał prawdopodobieństwo, że katastrofa konstrukcji żelbetowej nie nastąpi.

Katastrofę słupa żelbetowego uważamy co do efektu praktycznego za identyczną z przekroczeniem w słupie stalowym granicy plastyczności w całym jego przekroju. Wobec tego przyjmujemy w równaniu (47), podobnie jak w równaniu (30), $p = 0,8$, co przy $\Omega_b = \Omega_z$ daje $\Omega_b = \Omega_z = 0,9$.

Przyjętemu wskaźnikowi bezpieczeństwa odpowiada pewna wartość R_{bg} naprężenia na granicy wytrzymałości w betonie oraz pewna wartość \bar{R}_g naprężenia na granicy plastyczności stali. W związku z tym znajdujemy siłę niszczącą w słupie

$$(48) \quad N_n = (A_b \cdot R_{bg} + A_z \cdot \bar{R}_g) \kappa,$$

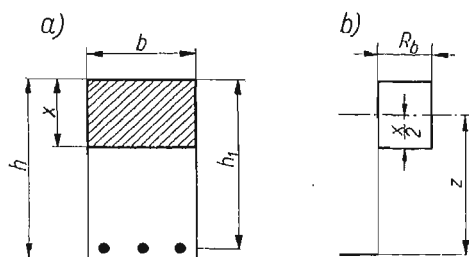
gdzie A_b oznacza pole betonowej części przekroju słupa, A_z — pole przekroju poprzecznego zbrojenia i κ — współczynnik zmniejszający na wyoboczenie.

Siła N_d , która może być w słupie dopuszczona, jest mniejsza od siły N_n , a zależność między nimi wyraża się wzorem

$$(49) \quad N_d = N_n (1 - \sum a'_i),$$

gdzie współczynniki a'_i oznaczają graniczne spadki procentowe siły N_n spowodowane niecałkowitym spełnieniem się poszczególnych założeń będących podstawą wzoru (48).

Współczynniki a' mogą być uważane bądź za wielkości losowe występujące każdy z pewnym prawdopodobieństwem ω' (metoda probabilistyczna), bądź też jako wielkości nielosowe (metoda półprobabilistyczna). Współczynniki te charakteryzują np. spadek siły N_d wywołany przez błędy w wymiarach poprzecznych słupa, przez błędy w wymiarach uzbrojenia itd. Odgrywają one rolę podobną do współczynników przyrostu naprężeń α w konstrukcjach stalowych.



Rys. 14

W przypadku żelbetowej belki zginanej pojedynczo zbrojonej (rys. 14) moment niszczący wyraża się, jak wiadomo, wzorem

$$(50) \quad M_n = 0,375 b h_1^2,$$

a odpowiedni moment dopuszczalny wzorem

$$(51) \quad M_d = M_n (1 - \sum a'_i).$$

Współczynniki a'_i mają w tym wypadku na ogół inne wartości niż te, które występują we wzorze (49).

Wskaźnik bezpieczeństwa przyjmujemy tu za równy $p = 0,8$, gdyż zniszczenie następuje tu przy jednoczesnym przekroczeniu w betonie naprężenia na granicy wytrzymałości, a w stali — granicy plastyczności, a więc w tych samych okolicznościach co w przypadku ściskania słupa z żelbetu.

Przy zastosowaniu do zadania poprzedniego metody czysto probabilistycznej należy wzór (47) zastąpić przez wzór typu (16), gdzie prawdopodobieństwo Ω' będzie miało sens podobny jak w tamtym wzorze z tym, że prawdopodobieństwa składające się na iloczyn Ω' będą przystawane do warunków zadania.

Gdy mamy do czynienia ze statycznie niewyznaczalnymi układami żelbetowymi, wówczas wzór (51) musi być zastąpiony przez wzór

$$(52) \quad M_d = M_n(1 - \sum a'_i - \sum \beta'_j),$$

gdzie współczynniki a'_i oznaczają, jak poprzednio, graniczne spadki procentowe momentu M_n , spowodowane niecałkowitym spełnieniem się warunków, dla których został on obliczony, z wyjątkiem okoliczności wpływających ze statycznej niewyznaczalności konstrukcji, współczynniki zaś β'_j — spadki tegoż momentu wynikające właśnie ze statycznej niewyznaczalności.

Na współczynniki β'_j składa się szereg okoliczności towarzyszących obliczeniu układów statycznie niewyznaczalnych, a więc wahania wielkości charakteryzujących własności sprężyste betonu, wahania współczynnika E dla stali, sposób rozmieszczenia prętów uzbrojenia itp. Wobec trudności ustalania wartości β'_j , wywołanych różnymi przyczynami, ujmujemy wpływ tych przyczyn w jeden współczynnik β' wyrażający spadek momentu M_n , spowodowany zmianami procentowymi sztywności poszczególnych elementów konstrukcji statycznie niewyznaczalnej.

Ponieważ najbardziej rozpowszechnionym typem statycznie niewyznaczalnych konstrukcji żelbetowych jest układ ramowy, ustalamy sumę $\sum \beta'_j$, w danym razie równą β' , dla takiej właśnie konstrukcji. W tym celu rozpatrujemy dwa układy ramowe przedstawione wraz z ich obciążeniem na rys. 15 i na rys. 16. Ramy te różnią się od siebie liczbą pięter, stosunkami wymiarów geometrycznych i rodzajem obciążenia. Aby na podstawie ich pracy obliczyć wartości β'_j , należałoby ustalić liczby wpływu położenia pewnych prętów o różnej od innych sztywności na wartości momentów przywęzłowych, a tym samym na wielkość momentów M_n i M_d poszczególnych elementów zginanych ramy. Wobec związanych jednak z tym trudności opieramy się tu tylko na obliczeniach wymienionych ramownic w warunkach, które dają najlepszą podstawę do wyznaczenia wielkości β' dla możliwie największej liczby przypadków (por. [5]).

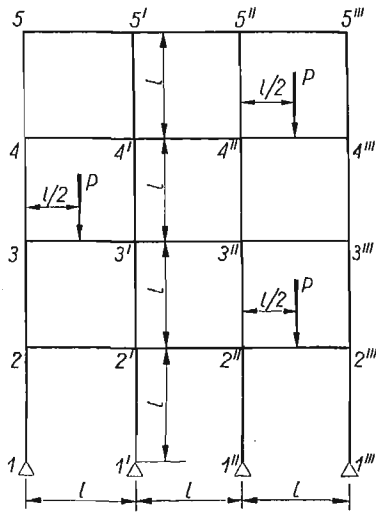
Ramownice przedstawione na rys. 15 i 16 zostały dla przytoczonych wyżej warunków obliczone według metod przyjętych dla ram sprężystych, a otrzymane tą drogą wartości momentów przywęzłowych były poddane analizie. Wyniki obliczeń i ich analiza doprowadzają do następujących spostrzeżeń i wniosków:

I. Przyrost sztywności pewnego pręta ramownicy wywołać może wprawdzie zwiększenie momentów przywęzłowych, ale głównie w bliskości tego pręta; podob-

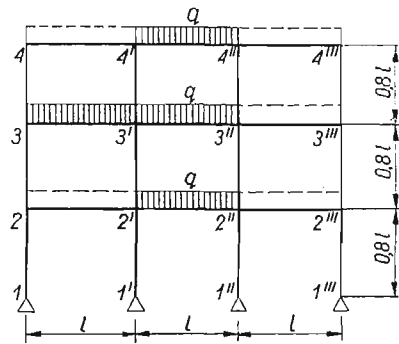
ny skutek ma również usunięcie pewnego pręta ramownicy, tj. przyjęcie, że w tym wypadku $EJ = 0$.

II. Jeżeli weźmiemy dwa skrajne przypadki, tzn. przypadek kiedy jeden z prętów ramownicy jest całkowicie sztywny, i drugi, kiedy momenty węzłowe obliczono w założeniu całkowitej sprężystości wszystkich prętów ramy, to średni dla całej sumy przyrost momentów węzłowych w ramownicy będzie wynosił w pierwszym przypadku trochę ponad 6 %, a w drugim 0 %, a więc średnia z tych dwóch liczb będzie wynosiła około 3 %.

III. Wahania w przyrostach momentów przywęzłowych przy zmianie miejsca przez pręt o sztywności $EJ = \infty$ nie są duże.



Rys. 15

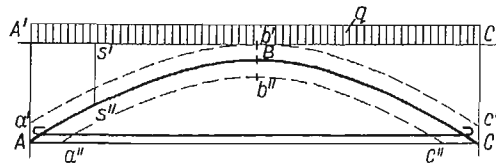


Rys. 16

Przytoczone spostrzeżenia pozwalają na ustalenie liczby β' jako równej $\beta' = 0,04$.

Możliwość wytworzenia się całkowitej sztywności poprzecznej elementu żelbetowego należy wyjaśnić w sposób następujący (por. [3]):

Zastępujemy pręt żelbetowy AC (rys. 17) przez dwuprzegubowy łuk paraboliczny ABC z materiału nieściśliwego. Łuk pod działaniem obciążenia równomiernego q



Rys. 17

na 1 mb. nie dozna żadnych odkształceń, w szczególności odkształceń prostopadłych do prostej AC . Również żadnych odkształceń nie dozna łuk, który będzie miał kształt dowolny i obciążenie dobrane na podstawie teorii linii nośnej. Wreszcie nie odkształci się również przy odpowiednim obciążeniu łuk przedstawiony na rys. 17

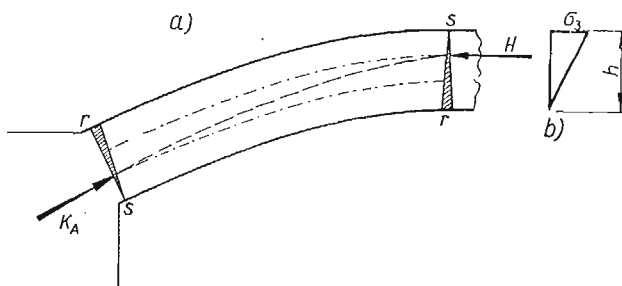
literami $a'a''c''c'$, dla którego uzbrojenie dolne belki odegra rolę ścięgna, jeżeli nawet w skład jego obciążenia wchodzi ciężar zapełnienia pachwin $a'A'b'$ i $c'C'b'$ oraz masyw $a''b''c''$.

Można więc sobie wyobrazić przypadek, że w pewnym elemencie ramy żelbetonowej wystąpi tego rodzaju obciążenie i tego rodzaju rozkład sił wewnętrznych, że element ten nie dozna żadnych odkształceń poprzecznych.

Dalszego przykładu przedstawienia katastrofy budowlanej jako przypadku unormowanego dostarcza zagadnienie sklepienia walcowego wykonanego z materiału, którego wytrzymałość na rozciąganie jest bardzo mała, a więc z betonu, muru kamiennego lub muru ceglanego, a w szczególności zagadnienie obliczenia dla takiego sklepienia nośności granicznej konstrukcji.

Nawiązujemy tu do stosowanej niegdyś szeroko, a obecnie prawie zarzuconej metody równowagi granicznej sklepień (praca [6]). Rachunek prawdopodobieństwa pozwala na rzucanie nowego światła na tę metodę. Uważamy przy tym, że próbki betonu, muru kamiennego lub muru ceglanego przy ich badaniu na ściskanie zachowują się jako sprężyste aż do zniszczenia.

Metoda równowagi granicznej powstała opierając się na bardzo licznych obserwacjach katastrof sklepień walcowych równej długości, dokonanych w ciągu długich lat i wyzyskanych z dobrym skutkiem na przełomie XIX i XX wieku przez wybitnych inżynierów i teoretyków jak Méry, Lévy itd., chociaż nieusystematyzowanych i nie poddanych współczesnej analizie wymiarowej. Obserwacje te doprowadzają dla symetrycznego obciążenia łuku do stwierdzenia, że:



Rys. 18

1) w łuku *jednocześnie* rozwiera się przekrój zwornika od strony podniebienia i dwa przekroje położone symetrycznie między zwornikiem a wezłowiami od strony grzbietu (praca [6] oraz rys. 18a), które w łukach płaskich pokrywają się z przekrojami w wezłowiacz;

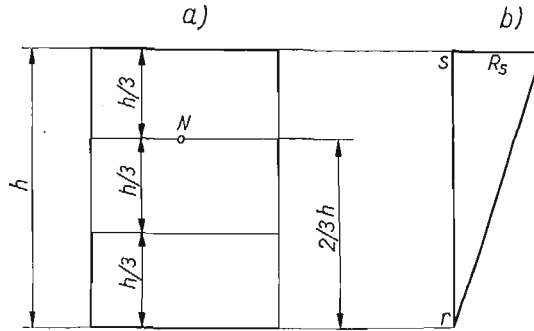
2) dwie części łuku zawarte między przekrojami pęknięcia sr doznają w chwili katastrofy zmiężdżenia materiału w punktach s , czego konsekwencją jest zapadnięcie się, czyli zniszczenie budowli (rys. 18b i 19b).

Opisany wyżej przebieg zniszczenia łuku pozwala na ustalenie punktów zaczepienia sił N w poszczególnych przekrojach łuku (rys. 18a).

Skoro zmiężdżenie materiału w punkcie s przekroju występuje w chwili rozwarcia się tego przekroju w punkcie r , to w myśl teorii ściskania mimośrodowego siła

podłużna będzie tu zaczepiona w odległości $2/3$ wysokości przekroju h od tego punktu.

W przekroju zwornikowym siła N równa się parciu poziomemu łuku H , a w węzłach reakjom K_A i K_B . Stajemy w ten sposób w chwili katastrofy wobec zadania statycznie wyznaczalnego i możemy sporządzić dla łuku (krótkiego sklepienia) krzywą ciśnień (rys. 18).



Rys. 19

Jak widać, istotnym dla metody równowagi granicznej jest postulat *jednoczesności* rozwierania się w chwili katastrofy łuku wszystkich trzech przekrojów pęknięcia. Ponieważ jednak ta jednoczesność jest trudna do stwierdzenia, zachodzi potrzeba wprowadzenia do obliczeń sklepienia rachunku prawdopodobieństwa. Musimy tu mianowicie zastąpić wymieniony postulat jednoczesności przez *prawdopodobieństwo* tej jednoczesności. Wprowadzamy w tym celu do obliczeń statycznych sklepienia prawdopodobieństwo faktu, że katastrofa konstrukcji nie nastąpi. Aby bezpieczeństwo budowli było w tym sensie zapewnione, potrzeba jednoczesnego zbiegu trzech niezależnych od siebie okoliczności następujących:

- 1) nie ma rozwarcia się spoiny w zworniku,
- 2) nie ma rozwarcia się spoiny na lewej podporze,
- 3) nie ma rozwarcia się spoiny na prawej podporze.

Prawdopodobieństwa wystąpienia trzech wymienionych okoliczności oznaczamy odpowiednio przez $\Omega_z, \Omega_l, \Omega_p$, a wobec tego w myśl twierdzenia o mnożeniu prawdopodobieństw iloczyn $\Omega_z \Omega_l \Omega_p$ będzie wyrażał prawdopodobieństwo, że katastrofa sklepienia czy łuku nie nastąpi. Innym wyrazem tegoż prawdopodobieństwa jest wskaźnik bezpieczeństwa p jako przyjęty z góry pożądaný stopień bezpieczeństwa budowli.

Ponieważ zarówno iloczyn $\Omega_z \Omega_l \Omega_p$ jak i symbol p oznaczają to samo prawdopodobieństwo, że sklepienie nie ulegnie zniszczeniu, możemy ułożyć równanie

$$(53) \quad \Omega_z \Omega_l \Omega_p = p.$$

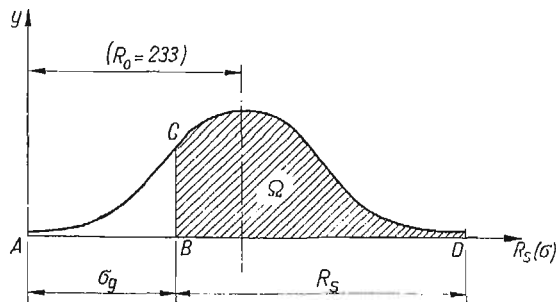
Bardziej intuicyjnie od równania (53) przemawia do wyobraźni inżyniera równanie

$$(54) \quad (1 - \Omega_z)(1 - \Omega_l)(1 - \Omega_p) = 1 - p,$$

którego obie strony wyrażają prawdopodobieństwo, że sklepienie ulegnie zniszczeniu; jednak równanie to jest niewygodne w użyciu i daje mniejszą od równania (53) gwarancję bezpieczeństwa budowli.

Ponieważ w myśl teorii ściskania mimośrodowego rozwarciu się spoin łuku w przekrojach pęknięcia w punktach r towarzyszy przekroczenie wytrzymałości materiału sklepienia na ściskanie w punktach s , to można uważać, że każde z prawdopodobieństw Ω_z , Ω_l i Ω_p przedstawia prawdopodobieństwo, że wytrzymałość materiału sklepienia jest większa niż naprężenie występujące w punktach s poszczególnych przekrojów. Można więc uważać przypadek, kiedy sklepieniu nie grozi niebezpieczeństwo, za przypadek unormowany, czyli za przypadek nadający się do obliczenia jego prawdopodobieństwa (praca [1], s. 8). Obliczenie opieramy tu na statystyce dla wytrzymałości materiału sklepienia na ściskanie i na odpowiednich krzywych prawdopodobieństwa.

Szkic krzywej prawdopodobieństwa dla wytrzymałości materiału sklepienia przedstawiony jest na rys. 20. Na osi odciętych odłożone są wielkości naprężeń



Rys. 20

ściskających R_s na granicy wytrzymałości materiału sklepienia, a również w ogóle wielkości σ naprężeń ściskających w punktach s przekrojów pęknięcia, a na osi rzędnych — gęstości prawdopodobieństwa występowania poszczególnych wartości R_s i σ w próbach wytrzymałościowych. Przy korzystaniu z rys. 20 będziemy rozumieli pod Ω jedno z prawdopodobieństw występujących z lewej strony równania (53). Jeżeli nie ma powodów do innych przypuszczeń, to przyjmujemy, że $\Omega_z = \Omega_l = \Omega_p = \Omega$ i wobec tego $\Omega = \sqrt[3]{p}$.

Odkładamy na krzywej prawdopodobieństwa wielkość Ω jako pole BCD i znajdujemy w ten sposób odcinek AB wyrażający naprężenie graniczne σ_g w punkcie s , a więc naprężenie normalne, poniżej którego z prawdopodobieństwem Ω nie będzie miało miejsca w punkcie s zmiążdżenie materiału sklepienia, a tym samym rozwarcie się spoiny sr w punkcie r . Inaczej mówiąc pole BCD wyraża tu prawdopodobieństwo, że wytrzymałość materiału sklepienia na ściskanie zawarta jest w granicach między $R_s = \sigma_g$ i $\max R_s$, względnie między $R_s = \sigma_g$ i $R_s = \infty$.

Jeżeli przyjmiemy, że wszystkie warunki ważności wzoru na ściskanie mimośrodowe zostały spełnione, to zależność między siłą normalną N w sklepieniu w prze-

kroju pęknięcia a wysokością przekroju wyraża się dla długości sklepienia 1 m wzorem

$$(55) \quad \sigma_s = 2 \frac{N}{h}.$$

Jeżeli jednak wymienione warunki nie są spełnione, to wzór (55) powinien być zastąpiony przez wzór

$$(56) \quad \sigma_g = 2 \frac{N}{h} (1 + \sum a_i),$$

gdzie pod a_i rozumiemy współczynniki wyrażające przyrosty naprężenia σ_s , spowodowane niecałkowitym urzeczywistnieniem się założeń, na podstawie których to naprężenie zostało obliczone.

Współczynniki a mogą być traktowane bądź jako graniczne wartości nielosowe, bądź też jako wartości, których nieprzekroczenie wyraża się dla każdego z nich pewnym prawdopodobieństwem. W tym ostatnim wypadku należy każdą z wielkości Ω w równaniu (53) pomnożyć przez odpowiedni iloczyn $\Pi \omega_i$, gdzie symbole ω_i wyrażają prawdopodobieństwo, że poszczególne współczynniki a nie przekroczą pewnych wartości (por. [3]).

We wzorach (55) i (56) wielkości N są proporcjonalne do obciążenia sklepienia, a więc wstawiając tu naprężenia $\sigma_g = R_s$, odpowiadające prawdopodobieństwu Ω dla danego przekroju pęknięcia, możemy znaleźć ze wzorów

$$(57) \quad R_s = 2N/h,$$

$$(58) \quad R_s = 2 \frac{N}{h} (1 + \sum a_i).$$

nośność graniczną sklepienia na podstawie jego grubości lub odwrotnie, dla danego obciążenia znaleźć odpowiednią grubość sklepienia.

Przytoczony sposób rozumowania sprecyzujemy na przykładzie łuku betonowego o przekroju poprzecznym prostokątnym, osi kolistej, rozpiętości teoretycznej $l = 20$ m, o strzałce $f = 5$ m i szerokości łuku 1 m. W węzłowiach wysokość przekroju tego łuku wynosi 1,44 m, a w zworniku 0,80 m. Kąt środkowy połowy łuku zawiera 53° (rys. 21).

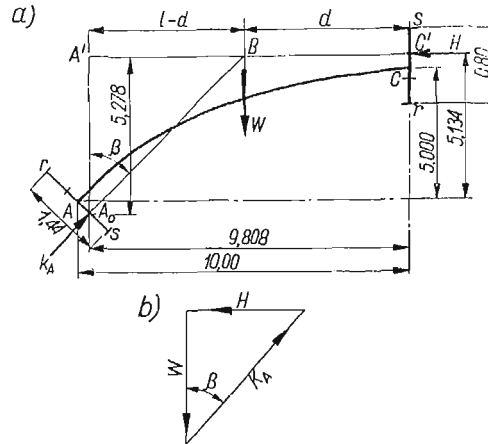
Sprawdzamy, czy te wymiary poprzeczne łuku są dostateczne przy obciążeniu $q = 40$ t/m.

Na rysunku 21a podane są współrzędne punktów ograniczających środkową trzecią część wysokości przekroju zwornikowego i węzłowiowego oraz kierunki AB i BC linii działania reakcji K_A i H tych przekrojów. Ciężar własny łuku wynosi $2,4$ t/m³. Ramię d wypadkowej obciążenia jednej połowy łuku względem środka zwornika będzie się tu wyrażało wzorem

$$(59) \quad d = \frac{183,82 + 50,30 q}{31,26 + 10,03 q},$$

gdzie q oznacza obciążenie jednostkowe przypadające na 1 mb rozpiętości łuku.

Z podobieństwa trójkątów $A_0A'B$ i $K_A W, H$ (rys. 21b) znajdujemy siły K_A i H . Przyjmujemy, że beton, z którego wykonano sklepienie, jest marki «250». Krzywa prawdopodobieństwa Gaussa dla niego podana została w pracy [3], s. 160, a kształt jej odpowiada rys. 20.



Rys. 21

Mając na widoku przykładowy charakter dalszych obliczeń przyjmujemy w danym wypadku $p = 0,8$. Liczba ta została wyżej umotywowana dla konstrukcji stalowych i żelbetowych, a stosowanie jej dla elementów konstrukcyjnych jednocześnie ściskanych i zginanych zostało wyjaśnione w pracy [5]. Również współczynniki przyrostu naprężeń α przyjmujemy tu na podstawie pewnej analogii warunków pracy między łukiem betonowym a konstrukcjami żelbetowymi; są to współczynniki następujące:

- α_1 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia wywołany przez błędy w wymiarach przekroju poprzecznego łuku (dla zwornika $\alpha_1 = 0,06$, a dla wezłowania $\alpha_1 = 0,10$);
- α_2 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia wywołany nieściśłym ustaleniem punktu zaczepienia siły podłużnej w łuku (dla zwornika $\alpha_2 = 0,10$, a dla wezłowania $\alpha_2 = 0,15$);
- α_3 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia spowodowany różnicą temperatur w różnych częściach powierzchni łuku ($\alpha_3 = 0,20$);
- α_4 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia spowodowany przez wahania współczynnika sprężystości E ($\alpha_4 = 0,15$);
- α_5 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia spowodowany odchyleniami od założenia płaskich przekrojów ($\alpha_5 = 0,15$);
- α_6 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia spowodowany różnicą własności sprężystych betonu na szerokości sklepienia ($\alpha_6 = 0,25$);
- α_7 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia spowodowany warunkami utwierdzenia łuku (dla wezłowania $\alpha_7 = 0,20$).

Mamy stąd dla zwornika $\sum \alpha = 0,86$, a dla wezłowania $\sum \alpha = 1,20$.

Proste sr przedstawiają na rys. 21 przekroje poprzeczne w zworniku i w wezłowaniach. Prosta BC' przechodzi przez górny punkt rdzenia przekroju w zworniku i określa kierunek reakcji H zwornika, a prosta A_0B przez dolny punkt rdzenia w wezłowaniu i określa kierunek K_A reakcji wezłowania.

Ze wzoru (59) znajdujemy $d = 5,14$ m, a mianownik tego wzoru oznaczający wypadkową obciążenia połowy łuku daje $W = 431$ t. W trójkącie $A_0A'B$ kąt $\beta = = 42^\circ 40'$, a wobec tego trójkąt sił na rys. 21b daje

$$(60) \quad H = 387 \text{ t}, \quad K_A = 586 \text{ t}.$$

Wzór (56) doprowadza w tych warunkach do największych naprężeń ściskających na krawędziach s :

$$(61) \quad \begin{array}{ll} \text{w zworniku} & \sigma_g = 179 = \approx 180 \text{ kG/cm}^2, \\ \text{w wezłowaniach} & \sigma_g = 178 = \approx 180 \text{ kG/cm}^2. \end{array}$$

Z drugiej strony przy $p = 0,8$ prawdopodobieństwo $\Omega = \sqrt[3]{p} = 0,93$, czemu odpowiada na wykresie krzywej Gaussa dla betonu «250» wytrzymałość betonu na ściskanie $R_s \approx 180 \text{ kG/cm}^2$.

A więc można przyjąć, że wymiary sklepienia odpowiadają jego obciążeniu.

Gdyby się okazało, że naprężenia σ_g są tu dużo mniejsze od R_s i że wobec tego wymiary poprzeczne sklepienia powinny być zmniejszone, trzeba by skorzystać ze sposobu kolejnych przybliżeń, w szczególności należałoby:

- 1) na podstawie ustalonych wartości R_s wyznaczyć ze wzoru (58) nowe, odmienne od założonych wartości h ;
- 2) na podstawie nowych wartości h znaleźć nowe wartości H i K_A ;
- 3) na podstawie nowych wartości H i K_A ustalić ostateczne grubości sklepienia.

Katastrofa muru podporowego polega bądź na przesuwaniu się, bądź też na wywracaniu się muru. Aby móc tę katastrofę uważać za przypadek unormowany, musimy umieć ocenić siły działające na mur oraz prawdopodobieństwa ich występowania.

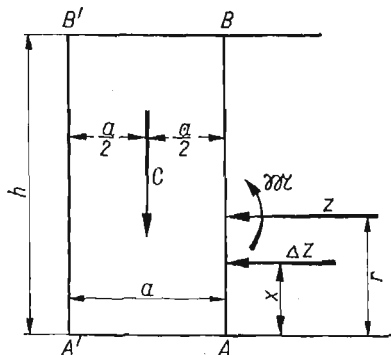
W naszych rozważaniach ograniczamy się do badania samej tylko stateczności muru podporowego pomijając kwestię wypierania gruntu spod fundamentu i wytrzymałości muru. Aby nie wprowadzać okoliczności nieistotnych dla zagadnienia, rozpatrujemy mur o przekroju poprzecznym prostokątnym wykonany z materiału jednorodnego (rys. 22); C oznacza na rysunku ciężar całego muru, Z parcie ziemi na mur, a \mathfrak{M} moment wywracający.

Chodzi o ustalenie warunków, przy których mur podporowy będzie zabezpieczony zarówno przed przesunięciem się po płaszczyźnie AA' jak i przed obrotem względem punktu A' .

Wartości parcia ziemi na mur i momentu wywracającego na ogół są ze sobą związane, gdyż każdej wartości parcia na mur zarówno całkowitego Z jak i cząstkowego ΔZ odpowiada moment Zr lub ΔZx , gdzie x oznacza ramię momentu. Nie ma więc potrzeby uważać momentu \mathfrak{M} za wielkość losową.

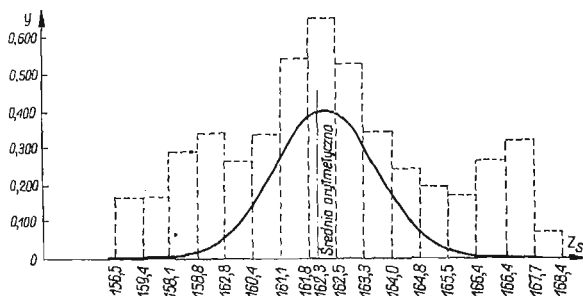
Będziemy dalej rozumieli siłę Z jako siłę poziomą i jako rzeczywiste parcie ziemi na mur, tzn. parcie geostatyczne (parcie w spokoju). Wprowadzamy do zadania parcie geostatyczne mając na widoku istnienie pewnej zależności między tym parciem, a parciem geodynamicznym (parciem w stanie równowagi granicznej), dającym się łatwo obliczyć z prostych wzorów statyki budowli i stanowiącym najczęściej używany w praktyce inżynierskiej schemat obliczenia parcia ziemi na mur podporowy.

Zastanawiając się nad możliwościami zastosowania metody półprobabilistycznej do badania stateczności murów podporowych musimy liczyć się z faktem, że teoria



Rys.22

parcia geostatycznego nie jest jeszcze na tyle rozwinięta, aby bezpośrednio stosowanie jej dla celów praktyki było łatwe, i z tego powodu musimy oprzeć się tu przede wszystkim na doświadczeniach. Należy przy tym zaznaczyć, że dla celu, o który nam chodzi, potrzebna jest bezpośrednia znajomość parcia geostatycznego, a nie jedynie zdobycie danych, które, jak współczynnik Poissona dla masy ziemnej, mają dopiero służyć do wyznaczenia tego parcia.

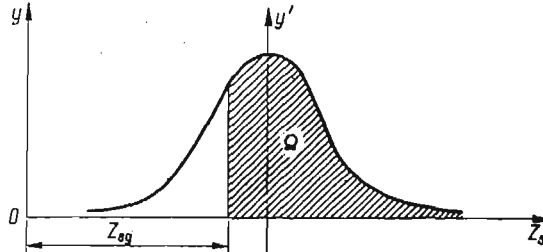


Rys. 23

Korzystamy tu z wyników doświadczeń zorganizowanych w 1955 r. w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN, a dotyczących geostatycznego parcia piasku wiślanego Z_s na ścianę o wysokości 0,95 m i szerokości 0,60 m. Wielkość Z_s jako otrzymana z doświadczenia musi być uważana za wielkość losową. Rozrzut jej odpowiada krzywej prawdopodobieństwa Gaussa przedstawionej na rys. 23.

Tu na osi poziomej odłożone zostały poszczególne wartości Z_{sg} , a na osi pionowej gęstości prawdopodobieństw ich występowania (por. [7]).

Linie przerywane i odpowiednie liczby dotyczą histogramu otrzymanego z doświadczenia.



Rys. 24

Załączona tablica daje zależność między wziętymi z rys. 23 wartościami parcia Z_{sg} uważanymi za graniczne i prawdopodobieństwami Ω , którym one odpowiadają, a które przedstawione są jako powierzchnie zakreskowane na rys. 24.

Tablica 1

Ω	Z
0,95	160,0
0,90	160,5
0,85	160,8
0,80	161,2
0,75	161,4
0,70	161,2

Nie ma powodu, aby wskaźnik bezpieczeństwa p odpowiadający stateczności muru podporowego był różny od wskaźnika odpowiadającego bezpieczeństwu muru ze względu na jego wytrzymałość, a więc praktycznie na ściskanie mimośrodowe. Z drugiej strony, wskaźnik bezpieczeństwa przy ścisaniu mimośrodowym muru można uważać za taki sam, jak wskaźnik bezpieczeństwa dla konstrukcji żelbetowych, który przyjmujemy w pewnych warunkach pracy konstrukcji za równy $p = 0,8$ (praca [3], s. 136).

Wskaźnikowi $p = 0,8$ odpowiada według krzywej Gaussa wartość graniczna $Z_{sg} = 161,1$; dotyczy ona przedniej ściany skrzyni użytej do doświadczenia, o którym była mowa, a więc ściany o wysokości 0,95 m. Natomiast mur podporowy przeciętnej konstrukcji posiada zwykle wysokość znacznie większą i dlatego z otrzymanych w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki wyników można właściwie korzystać dopiero po zastosowaniu zasady podobieństwa. Ponieważ jednak dla parcia geostatycznego zasada podobieństwa nie może nam jeszcze dostarczyć potrzebnych wzorów, uciekamy się tu do interpolacji lub ekstrapolacji. Ta ostatnia omówiona została w pracy [8]. W danym wypadku korzystamy ze wzoru

$$(62) \quad Z_s = \frac{c_1 h^2}{4} \frac{\operatorname{tg}(30^\circ - \beta) + \operatorname{tg}(45^\circ - \beta)}{2},$$

gdzie h oznacza wysokość ściany, β kąt chropowatości i c_1 pewien współczynnik stały, a więc niezależny od wysokości ściany.

Aby wyznaczyć stałą c_1 , wstawiamy do wzoru (62) wielkości odpowiadające omówionemu doświadczeniu, wykonanemu w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki; przyjmujemy tu wysokość ściany za równą $h = 1$ m, a kąt chropowatości za równy $\beta = 12^\circ$, co stanowi $2/3$ kąta tarcia gładkiej powierzchni kamiennej po drugiej powierzchni kamiennej, który równa się 18° i który wchodzi w grę przy napełnieniu skrzyni przeznaczonej do doświadczeń z piaskiem. Dla parcia geostatycznego Z_s wprowadzamy tu wartość $Z_{sg} = 161,1$ kG odpowiadającą prawdopodobieństwu $\Omega = 0,8$.

Otrzymujemy w tych warunkach $c_1 = 1336$ kG/m³, wobec czego wzór (62) dla wszystkich $\Omega = 0,8$ i dowolnej wysokości muru przybiera postać

$$(63) \quad Z_{sg} = \frac{1336 h^2 \operatorname{tg}(30^\circ - \beta) + \operatorname{tg}(45^\circ - \beta)}{4}.$$

Dla szerokości muru 1 m $c_1 = 2353$ kG/m³.

Jeżeli oznaczymy przez Z_0 dopuszczalne ze względu na przesuwanie muru parcie ziemi, wówczas możemy ustalić zależność

$$(64) \quad Z_{sg} = Z_0(1 + \sum \alpha),$$

gdzie α są to współczynniki przyrostu parcia Z_0 , doprowadzające je do wartości Z_{sg} , tj. wartości odpowiadającej przyjętemu wskaźnikowi bezpieczeństwa $p = 0,8$.

Współczynniki α charakteryzują takie okoliczności pracy muru podporowego, jak wilgotność ziemi, jej zagęszczenie, chropowatość powierzchni muru, a przede wszystkim różnicę między rzeczywistym parciem ziemi na mur, czyli parciem geostatycznym, a przeważnie stosowanym w obliczeniach statycznych parciem geodynamicznym. Współczynnik przyrostu parcia $\alpha = \alpha_d$ charakteryzujący tę ostatnią okoliczność ustalamy na podstawie omówionego wyżej doświadczenia. W tym celu przyjmujemy, że we wzorze (64) w sumie $\sum \alpha$ wszystkie współczynniki α są równe zeru z wyjątkiem samego tylko współczynnika α_d i że parcie dopuszczalne Z_0 jest równe właśnie parciu geodynamicznemu Z_d , obliczonemu ze wzorów Coulomba lub wzorów pokrewnych.

Dla geodynamicznego parcia poziomego przy naziomie nieobciążonym mamy znany wzór

$$(65) \quad Z_d = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\psi}{2} \right),$$

gdzie γ oznacza ciężar jednostkowy ziemi, a ψ kąt tarcia wewnętrznego. Jeżeli wstawimy do wzoru (65) liczby odpowiadające opisanemu doświadczeniu, to otrzymamy

$$(66) \quad Z_d = 145,6 \text{ kG.}$$

Natomiast graniczna wartość parcia geostatycznego odczytana z krzywej Gaussa, przedstawionej na rys. 23, i odpowiadająca wskaźnikowi bezpieczeństwa $p = \Omega = 0,8$ wynosi, jak było powiedziane wyżej,

$$(67) \quad Z_{sg} = 161,1 \text{ kG.}$$

A więc wstawiając do wzoru (64) wielkości (66) i (67) oraz $Z_0 = Z_d$ i $\sum \alpha = \alpha_d$ znajdujemy, że

$$(68) \quad 161,1 = 145,6(1 + \alpha_d),$$

skąd

$$(69) \quad \alpha_d = \frac{Z_{sg} - Z_d}{Z_d} = 0,106.$$

Inne współczynniki przyrostu parcia ziemi α zależą od konstrukcji muru podporowego i rodzaju ziemi nasypowej, a więc są to np. przyrost parcia ziemi, spowodowany wzrostem jej ciężaru jednostkowego, który można ocenić jako przyrost rzędu $\alpha = 0,02$, przyrost spowodowany wilgotnością ziemi (podobnego rzędu) itd.

Jak wynika z powyższych rozważań, metoda półprobabilistyczna daje możliwość zabezpieczenia muru podporowego przed przesuwaniem z jednej strony przez wybór właściwego wskaźnika bezpieczeństwa p , a z drugiej przez wprowadzenie współczynników α przyrostu parcia ziemi na mur. Jeżeli nie rozporządzamy dostatecznymi danymi statystycznymi, to uzależnienie od siebie obydwóch sposobów ułatwia wyznaczenie dopuszczalnego rzeczywistego parcia ziemi na mur. Ułatwia ono mianowicie ustalenie współczynników α , o ile w pewnym specjalnym wypadku współczynnik bezpieczeństwa muru, a więc i dopuszczalne parcie na mur, możemy uważać za znane. Wówczas we wzorze (64) Z_0 równa się pewnej znanej wielkości Z'_0 , tj.

$$(70) \quad Z_{sg} = Z'_0(1 + \sum \alpha),$$

gdzie Z'_0 daje się niekiedy wziąć z praktyki budowlanej. Wzór (70) pozwala na wprowadzenie korektywy do poszczególnych współczynników α , podnoszącej ich znaczenie praktyczne.

W rezultacie ze wzoru (64) znajdujemy dopuszczalne parcie na mur

$$(71) \quad Z_0 = \frac{Z_{sg}}{1 + \sum \alpha},$$

co daje podstawę do wyznaczenia współczynników bezpieczeństwa n zarówno na przesuwanie, jak i wywracanie się muru.

Analiza bezpieczeństwa rozpatrzonych czterech różnych rodzajów konstrukcji pozwala twierdzić, że katastrofę budowlaną można dzięki zastosowaniu zasad rachunku prawdopodobieństwa i statystyki rozpatrywać jako przypadek unormowany, co daje możliwość sprowadzić zabezpieczenie konstrukcji przed katastrofą na realny grunt obliczeń wytrzymałościowych.

Literatura cytowana w tekście

[1] M. SMOLUCHOWSKI, *O pojęciu przypadku i pochodzeniu praw fizyki opartych na prawdopodobieństwie*, Wiadomości Matematyczne, 1923.

[2] Н. СТРЕЛБИЦКИЙ, *Сопротивление полезных нагрузок разных стран*, 1962.

- [3] W. WIERZBICKI, *Obiektywne metody oceny bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych*, Warszawa 1961.
- [4] W. WIERZBICKI, *Sécurité des ponts en acier considérée du point de vue probabiliste*, AIPC, Septième Congrès, Publication Préliminaire, 1964.
- [5] W. WIERZBICKI, *Bezpieczeństwo statycznie niewyznaczalnych konstrukcji żelbetowych w ujęciu probabilistycznym*, Inżynieria i Budownictwo, 1963.
- [6] W. WIERZBICKI, *Mechanika budowli*, wyd. VI, Warszawa 1961.
- [7] W. WIERZBICKI, *O możliwości zastosowania metody półprobabilistycznej do badania stateczności murów podporowych*, Inżynieria i Budownictwo, 1962.
- [8] W. WIERZBICKI, *Parcie geostatyczne na tle doświadczeń*, Rozprawy Inżynierskie, 1964.

Р е з ю м е

СТРОИТЕЛЬНАЯ КАТАСТРОФА КАК НОРМИРОВАННОЕ СОБЫТИЕ

Благодаря применению теории вероятностей и статистики можно рассматривать строительную катастрофу как так называемое нормированное событие. Это обосновано оценкой безопасности основных видов строительных конструкций, таких как стальные и железобетонные сооружения, своды и опорные стенки. Исследование безопасности отдельных конструктивных элементов произведено так по вероятностному, как и по полувероятностному методам.

S u m m a r y

STRUCTURE COLLAPSE AS A NORMED EVENT

Due to the application of the probability calculus and the mathematical statistics, the collapse of a structure may be considered what is termed a normed event. This has been proved on the basis of the estimated safety of main engineering structures, e.g. steel and concrete structures, vaults and retaining walls. The safety of individual elements of the structure has been analysed by means of both the probabilistic and semi-probabilistic methods.
