

PRZEGLĄD NIELINIOWYCH RÓŻNICZKOWYCH RÓWNAŃ
DRGAŃ UKŁADÓW AUTONOMICZNYCH O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

ZBIGNIEW OSIŃSKI (WARSZAWA)

1. Celem pracy jest podanie w skondensowanej postaci przeglądu informacji o aktualnym stanie badań nad nieliniowymi równaniami różniczkowymi drgań układów o jednym stopniu swobody. Ograniczamy się do typowych równań opisujących ruch drgający w dotychczasowym rozumieniu, czyli do równań drugiego rzędu. Równania te zostały podzielone na jedenaście grup. Wewnątrz grup równania są numerowane kolejno: każde równanie oznaczone jest dwiema liczbami. Pierwsza liczba oznacza numer grupy, druga numer równania w grupie. Równania zostały sklasyfikowane według charakterystyki sprężystej i tłumienia oraz według założeń narzuconych na charakterystyki, a czasem na warunki początkowe. Rozróżnia się przy tym założenia gwarantujące istnienie rozwiązań okresowych (czyli powstanie drgań samowzbudnych) od założeń zapewniających gaśnięcie rozwiązań z upływem czasu.

Gdzie to było możliwe, równania przedstawiono w jednolitej postaci przy użyciu następujących oznaczeń:

- x przemieszczenie,
- \dot{x} prędkość,
- \ddot{x} przyśpieszenie (współczynnik liczbowy przy \ddot{x} sprowadzono do jedności),
- $S(x)$ nieliniowa charakterystyka sprężysta,
- ω^2 współczynnik liczbowy w przypadku liniowej charakterystyki sprężystej,
- $R(\dot{x})$ nieliniowa charakterystyka tłumienia,
- $R(x, \dot{x})$ nieliniowa mieszana charakterystyka tłumienia,
- α współczynnik liczbowy w przypadku liniowej charakterystyki tłumienia.

W wielu przypadkach pozostawiamy jednak oznaczenia zgodne z podanymi w oryginalnych pracach dotyczących danego równania.

Podział na grupy jest następujący:

1. $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) = 0$, równania o charakterze ogólnym;
2. $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + S(x) = 0$, równanie o mieszanej nieliniowej charakterystyce tłumienia i nieliniowej charakterystyce sprężystej przy założeniach gwarantujących gaśnięcie rozwiązań;



3. $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + S(x) = 0$, jak w p. 2, ale przy założeniach gwarantujących istnienie rozwiązań okresowych;

4. $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + \omega^2(x) = 0$, równanie o mieszanej nieliniowej charakterystyce tłumienia i liniowej charakterystyce sprężystej przy założeniach gwarantujących gaśnięcie rozwiązań;

5. $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + \omega^2(x) = 0$, jak w p. 4, ale przy założeniach gwarantujących istnienie rozwiązań okresowych;

6. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + S(x) = 0$, równanie z nieliniową charakterystyką tłumienia i nieliniową charakterystyką sprężystą przy założeniach gwarantujących gaśnięcie rozwiązań;

7. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + S(x) = 0$, jak w p. 6, ale przy założeniach gwarantujących istnienie rozwiązań okresowych;

8. $\ddot{x} + S(x) = 0$, równanie z nieliniową charakterystyką sprężystą bez tłumienia;

9. $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + S(x) = 0$, równanie z liniową charakterystyką tłumienia i nieliniową charakterystyką sprężystą;

10. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + \omega^2x = 0$, równanie z nieliniową charakterystyką tłumienia i liniową charakterystyką sprężystą przy założeniach gwarantujących gaśnięcie rozwiązań;

11. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + \omega^2x = 0$, jak w p. 10, ale przy założeniach gwarantujących istnienie rozwiązań okresowych.

Dla każdego równania podajemy podstawowe twierdzenia dotyczące zachowania się rozwiązań, rozwiązanie ściśle lub przybliżone (jeżeli takie są znane), uwagi o własnościach ruchu oraz o zastosowaniu równania w zagadnieniach technicznych.

Ogólnych warunków istnienia rozwiązań nie podajemy przyjmując, że są one spełnione i że istnieją rozwiązania badanych równań.

W opisie własności równań wymieniamy nazwiska autorów, którzy podali odpowiednie rozwiązania bądź twierdzenia. Opracowanie oparte jest na bibliografii wydrukowanej na końcu pracy.

$$2.1. \quad \ddot{x} + R(x, \dot{x}) + S(x) = 0.$$

Równanie powyższe zostało zbadane przez S. ZIEMBRĘ w pracy [49] przy następujących założeniach: $S(x)$ i $R(x, \dot{x})$ są funkcjami analitycznymi, $S(-x) = -S(x)$, $S(0) = 0$, $S(x)x > 0$ dla $x \neq 0$; $\frac{dS(x)}{dx} \geq 0$ dla każdego x , $R(x, 0) = 0$ dla każdego x ; $R(-x, \dot{x}) = R(x, \dot{x})$ dla wszystkich x, \dot{x} , $R(x, -\dot{x}) = -R(x, \dot{x})$ dla $x \neq 0$, $R(x, \dot{x})\dot{x} > 0$ dla $\dot{x} > 0$, $\frac{dR(x, \dot{x})}{d\dot{x}} \geq 0$ dla każdego x .

Wykazano, że ruch jest ograniczony, a więc

$$|\dot{x}| \leq \sqrt{2E(t_0)} \quad \text{i} \quad |x| \leq V^{(-1)}E(t_0),$$

gdzie $E(t_0)$ jest energią całkowitą w chwili początkowej, a V funkcją określającą energię potencjalną.

Ruch jest gasnący, czyli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{x}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0.$$

Zbadano charakter punktu osobliwego $(0, 0)$. Stwierdzono, że w przypadku $h \geq k > 0$, punkt osobliwy jest punktem węzłowym statecznym, a w przypadku $0 < h < k$ — punktem ogniskowym statecznym. Symbole h i k określone są z rozwinięć funkcji $S(x)$ i $R(x, \dot{x})$ w szeregi potęgowe w następujący sposób:

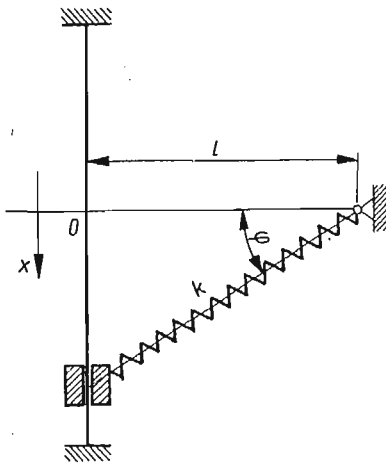
$$R(x, \dot{x}) = \mu x + 2h\dot{x} + R_1(x, \dot{x}),$$

$$S(x) = k^2 x + S_1(x).$$

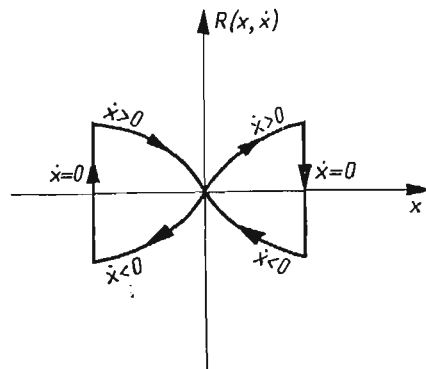
W pracy podana została analiza przebiegu trajektorii fazowych przez porównanie ich z trajektoriami równań liniowych oraz przykłady badania ruchu za pomocą metody δ .

$$2.2. \quad \ddot{x} + \mu k l \left[1 - \cos \left(\arctg \frac{x}{l} \right) \right] \text{sign } \dot{x} + k l \left[\frac{x}{l} - \sin \arctg \left(\frac{x}{l} \right) \right] = 0.$$

Równanie jest podane przez Z. OSIŃSKIEGO w pracy [29]; opisuje ono ruch drgający masy poruszającej się po prostoliniowej prowadnicy. Siła sprężysta pochodzi od rozciąganej sprężyny o stałej k , której punkt zamocowania leży poza osią prowadnicy (rys. 1). Rozproszenie energii następuje przez tarcie suche proporcjonalne do nacisku masy na prowadnicę.



Rys. 1



Rys. 2

Charakterystyka tłumienia zależy tylko od znaku prędkości i od wychylenia w sposób przedstawiony na rys. 2. Charakterystyka sprężysta jest sztywna (rys. 3)

$$2.3. \quad \ddot{x} + \left[\frac{m}{l} (\dot{x})^2 \operatorname{tg} \psi + mg \cos \left(\frac{x}{l} \right) \operatorname{tg} \psi \right] \operatorname{sign} \dot{x} + mg \sin \left(\frac{x}{l} \right) = 0.$$

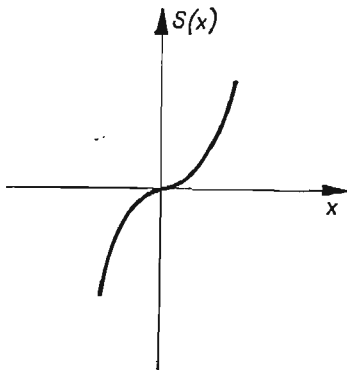
Równanie zostało podane przez Z. OSIŃSKIEGO w pracy [29]. Opisuje ono ruch wahadła matematycznego z uwzględnieniem oporu powietrza i oporu tarcia suchego w przegubie walcowym proporcjonalnego do nacisku w przegubie (rys. 4). Charakterystyka tłumienia przebiega według rys. 5, charakterystyka sprężysta miękka (sinusoidalna) według rys. 6.

$$2.4. \quad m\ddot{x} + lx^\gamma \dot{x}^\alpha + kx^\beta = 0$$

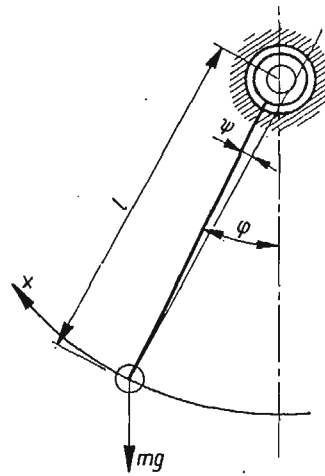
dla $m > 0$, $k > 0$, $l \geq 0$, przy założeniu, że

$$(a) \quad (-\dot{x})^\alpha = -\dot{x}^\alpha, \quad (-x)^\beta = -x^\beta, \quad (-x)^\gamma = x^\gamma.$$

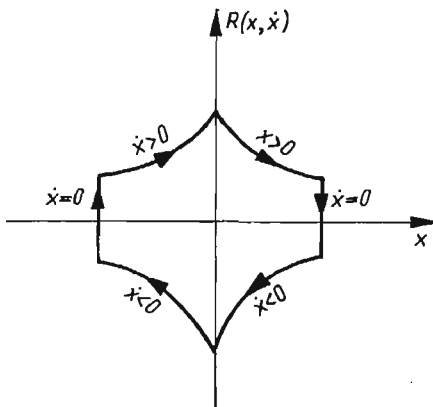
S. ZIEMBA w pracy [48] poszukuje szczególnych przypadków, dla których można znaleźć równanie trajektorii fazowej w zamkniętej postaci. Przypadki takie zachodzą, jeżeli istnieją odpowiednie związki między wykładnikami.



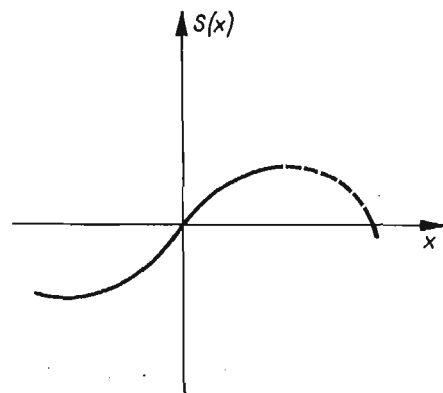
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Przyjmując ze względu na założenie (a), że wykładnik a określony jest wzorem

$$a = \frac{2n+1}{2m+1},$$

otrzymamy na β i γ wzory

$$\beta = \frac{2N+1}{2M+1}, \quad \gamma = \frac{(2m+1)(2N+1) - (2n+1)(N+M+1)}{(2M+1)(2m+1)},$$

Suma $N+M$ powinna być liczbą nieparzystą.

Dla takich wykładników otrzymujemy równania trajektorii $\Phi(\dot{x}, x) = 0$ w postaci

$$x^2 + [C + \exp F_2(u)]^2 = 0,$$

gdzie

$$F_2(u) = \int \frac{du}{au^v - (\beta+1)u + b}$$

oraz

$$u(x) = \dot{x}^2 x^{-(\beta+1)}, \quad v = \alpha/2, \quad a = -2l/m, \quad b = -2k/m.$$

2.5.

$$m\ddot{x} + lx^\nu \dot{x}^\alpha + p\dot{x}^\delta + kx^\beta = 0$$

dla $m > 0$, $l \geq 0$, $p \geq 0$, $k > 0$ i przy założeniu, że

$$(a) \quad \begin{aligned} (-\dot{x})^\alpha &= -\dot{x}^\alpha, & (-x)^\nu &= -x^\nu, \\ (-x^\beta) &= -x^\beta, & (-\dot{x})^\delta &= -\dot{x}^\delta. \end{aligned}$$

S. ZIEMBA w pracy [48] poszukuje szczególnych przypadków, w których można znaleźć równanie trajektorii fazowej w zamkniętej postaci. Przypadki takie zachodzą, jeżeli istnieją odpowiednie związki między wykładnikami α , β , γ i δ .

Jeżeli przyjmiemy ze względu na założenie (a), że wykładnik a określony jest wzorem

$$a = \frac{2n+1}{2m+1},$$

to otrzymamy na β , γ i δ wzory:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2N+1}{2M+1}, & \delta &= \frac{2N+1}{N+M+1}, \\ \gamma &= \frac{(2m+1)(2N+1) - (2n+1)(N+M+1)}{(2M+1)(2m+1)}. \end{aligned}$$

Suma $M+N$ powinna być nieparzysta. Dla takich wykładników równanie trajektorii

$$\Phi(\dot{x}, x) = 0$$

ma postać

$$x^2 + [C + \exp F_2(u)]^2 = 0,$$

gdzie

$$F_2(u) = \int \frac{du}{au^v + cu^r - (\beta+1)u + b}$$

oraz

$$u(x) = \dot{x}^2 x^{-(\beta+1)}, \quad v = a/2, \quad r = \delta/2, \quad a = -2l/m, \quad b = -2k/m, \\ c = -2p/m.$$

$$3.1. \quad \ddot{x} + f(x, \dot{x})x + g(\dot{x}) = 0.$$

Dla równania tego N. LEVINSON i O. K. SMITH w pracy [18] podają następujące twierdzenie o istnieniu rozwiązań okresowych.

Jeżeli funkcja $g(x)$ jest określona i ciągła w przedziale $(-\infty, +\infty)$; $xg(x) > 0$ dla $x \neq 0$; funkcja $f(x, v)$ jest ciągła dla wszystkich x, v oraz spełnia warunki Lipschitza dla wszystkich v ; $\int_0^\infty g(x) dx = \infty$ i $f(0, 0) < 0$ oraz istnieje takie $x_0 > 0$, że $f(x, v) \geq 0$ dla $|x| \geq x_0$; istnieje takie M , że dla $|x| \leq x_0$ jest $f(x, v) \geq -M$ i takie $x_1 > x_0$, że

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, v) dx \geq 10Mx_0,$$

gdzie $v = v(x)$ jest dowolną dodatnią funkcją malejącą, to równanie (3.1) ma co najmniej jedno rozwiązanie okresowe.

A. D. DRAGILEW [12] podaje, że zamiast stałej $10Mx_0$ można wziąć $4Mx_0 + a$, gdzie a jest dowolną stałą dodatnią.

Tam też znajduje się następujące twierdzenie: jeżeli równanie (3.1) ma rozwiązanie okresowe, to także równanie

$$\ddot{x} + f^*(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0,$$

gdzie $f(x, \dot{x}) \geq f^*(x, \dot{x})$, ma rozwiązanie okresowe.

Temu samemu zagadnieniu poświęcona jest także praca A. DE CASTRO [7]. Niektórym szczególnym zagadnieniom poświęcone są prace E. i H. CARTANÓW [4] oraz A. A. ANDRONOWA [1] i R. REISSIGA [32].

$$3.2. \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

Jest to uogólnione równanie Lienarda. Dla równania tego typu Lienarda w pracy [19] podaje kryteria istnienia jednego statecznego rozwiązania, które podajemy w ujęciu Babakowa [2]:

- 1) $f(x)$ powinno być funkcją parzystą, a $g(x)$ — nieparzystą;
- 2) $f(0) < 0$;
- 3) $xg(x) > 0$ dla wszystkich x ;
- 4) $F(x) = \int_0^x f(x) dx \rightarrow \infty$, gdy $x \rightarrow \infty$;

5) funkcja $F(x)$ ma jedno miejsce zerowe w punkcie $x = a > 0$ i monotonicznie rośnie dla $x \geq a$.

W pracy A. F. FILIPOWA [13] znajduje się twierdzenie o istnieniu granicznego cyklu dla powyższego równania.

Równanie ma stateczny cykl graniczny, jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe, $g(x)$ ma znak x , $\int_0^{\pm\infty} g(x) dx = \infty$ i jeżeli po zmianie zmiennych

$$\text{dla } x > 0 \quad \int_0^x g(\xi) d\xi = z_1(x) \quad \text{i} \quad \int_0^x f(\xi) d\xi = F(x) = F_1(z_1),$$

$$\text{a dla } x < 0 \quad \int_0^x g(\xi) d\xi = z_2(x) \quad \text{i} \quad \int_0^x f(\xi) d\xi = F(x) = F_2(z_2),$$

funkcje F_1 i F_2 spełniają warunki następujące:

a) przy małych z ($z < \delta$)

$$F_1(z) \leq F_2(z) \quad \text{i nie wszędzie} \quad F_1(z) = F_2(z),$$

$$F_1(z) < a\sqrt{z}, \quad F_2(z) > -a\sqrt{z} \quad \text{dla} \quad a < \sqrt[3]{8};$$

b) istnieje taka wartość z_0 , że

$$\int_0^{z_0} [F_1(z) - F_2(z)] dz > 0$$

i przy $z > z_0$ $F_1(z) \geq F_2(z)$, $F_1(z) > -a\sqrt{z}$, $F_2(z) < a\sqrt{z}$, gdzie $a < \sqrt[3]{8}$

W pracy A. W. DRAGILEWA [12] znajduje się twierdzenie następujące:

Jeżeli równanie powyższe ma rozwiązanie okresowe, to również równanie $\ddot{x} + F(x) + x = 0$, w którym $F(u) = \int_0^u f(x) dx$, ma rozwiązanie okresowe.

Tym samym równaniem zajmuje się również W. S. IWANOW [15], I. L. MASSERA [23] oraz G. SANSONE [36].

$$4.1. \quad \ddot{x} + \Psi(x) \Phi(\dot{x}) + x = 0.$$

Równanie zostało zbadane przez S. ZIEMBĘ w pracy [47] przy założeniach

$$\Psi(-x) = \Psi x \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } x;$$

$$\Phi(-\dot{x}) = -\Phi(\dot{x}), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(\dot{x}) > 0 \quad \text{dla } \dot{x} > 0;$$

$$\text{dla } 0 < \dot{x}_1 < \dot{x}_2 \quad \text{jest } \Psi(x) \Phi(\dot{x}_2) > \Psi(x) \Phi(\dot{x}_1) \geq 0, \text{ a}$$

$$\text{dla } 0 \leq |x_1| < |x_2| \quad \text{jest } 0 \leq |\Psi(x_1) \Phi(\dot{x})| < |\Psi(x_2) \Phi(\dot{x})|.$$

Charakter funkcji $\Psi(x)$ i $\Phi(\dot{x})$, zgodny z powyższymi założeniami, przedstawiony jest na rysunkach 7 i 8.

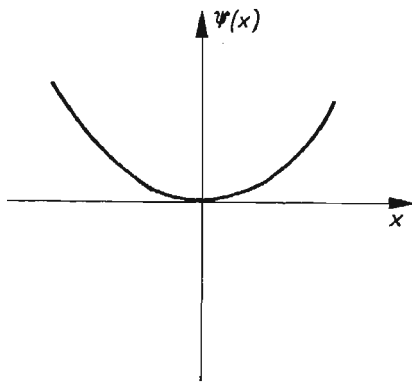
Równanie to znajduje zastosowanie do opisanego ruchu mechanicznego modelu ciała stałego niesprężystego. W cytowanej pracy podano wykresny sposób wyznaczenia trajektorii fazowych.

Przy podanych założeniach ruch jest gasnący i punkt ruchomy zmierza do położenia równowagi, gdy $\tau \rightarrow \infty$.

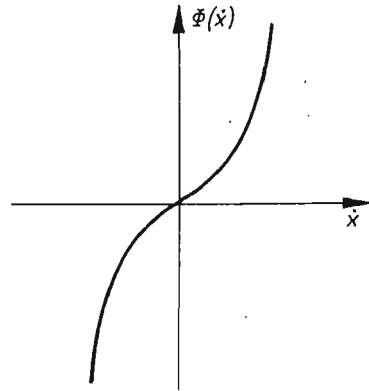
Zbadano charakter punktu osobliwego i wysnuto wnioski o naprzemienności ruchu:

1) jeżeli $[\Psi(0)\Phi'(0)] < 2$, to punkt osobliwy jest punktem ogniskowym statecznym;

2) jeśli $[\Psi(0)\Phi'(0)] \geq 2$, to punkt osobliwy jest punktem węzłowym statecznym.

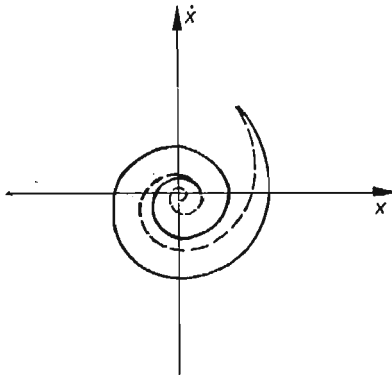


Rys. 7



Rys. 8

W przypadku pierwszym trajektorie mają w otoczeniu punktu osobliwego kształt spirali i ruch jest ruchem naprzemiennym (liczba miejsc zerowych jest nieograniczenie wielka). W przypadku drugim punkt od pewnej chwili zmierza asymptotycznie do położenia równowagi nie przechodząc przez położenie zerowe, czyli ruch jest nienaprzemienny.



Rys. 9

Przeprowadzono porównanie trajektorii fazowych omawianego równania z trajektoriami w przypadku tłumienia wiskotycznego.

Jak widać z rys. 9, trajektorie te są silniej zakrzywione ku środkowi, czyli że ruch jest silniej tłumiony niż w przypadku tłumienia wiskotycznego. W pracy [47] przedyskutowano także kierunki elementów liniowych na płaszczyźnie fazowej.

$$4.2. \quad \ddot{x} + \psi(x)\varphi(\dot{x}) + \omega^2 x = 0.$$

Równanie jest podane przez S. ZIEMBĘ w pracy [47]. Przez zamianę zmiennej niezależnej $\tau = \omega t$ otrzymamy równanie analogiczne do (4.1):

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \psi(x)\varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) + x = 0.$$

4.3. $A\ddot{x} + [\beta + \Psi(x)][B + F(\dot{x})]\dot{x} + Cx = 0.$

Równanie powyższe należy do typu 4.1. Zanalizował je S. ZIEMBA w [47] przy założeniach:

$$A > 0, \quad C > 0, \quad B \geq 0, \quad \beta \geq 0;$$

$$\Psi(-x) = \Psi(x) \geq 0 \text{ dla wszystkich } x; \quad \Psi(x_1) < \Psi(x_2) \text{ dla } |x_1| < |x_2|;$$

$$F(-\dot{x}) = F(\dot{x}) \geq 0 \text{ dla wszystkich } x.$$

W pracy zbadano zagadnienie naprzemienności ruchu. W przypadku

$$1) F(0) = 0 \quad \text{i} \quad F(\dot{x}_1) < F(\dot{x}_2) \quad \text{dla} \quad 0 < \dot{x}_1 < \dot{x}_2,$$

czyli w przypadku analogicznym do tłumienia sztywnego przy tłumieniu czysto wiskotycznym stwierdzamy, że przy $\beta^2 B^2 < 4AC$ ruch jest naprzemienny (liczba miejsc zerowych jest nieskończenie wielka), a przy $\beta^2 B^2 \geq 4AC$ punkt przechodzi co najwyżej raz przez położenie równowagi i od tego miejsca jest nienaprzemienny niezależnie od warunków początkowych.

W przypadku

$$2) F(0) > 0 \quad \text{i} \quad F(\dot{x}_1) > F(\dot{x}_2) \quad \text{dla} \quad 0 < \dot{x}_1 < \dot{x}_2,$$

czyli w przypadku analogicznym do tłumienia miękkiego przy tłumieniu czysto wiskotycznym stwierdzamy, że jeżeli $\beta B \geq 2\sqrt{AC}$, to rozwiązanie ma co najwyżej jedno miejsce zerowe.

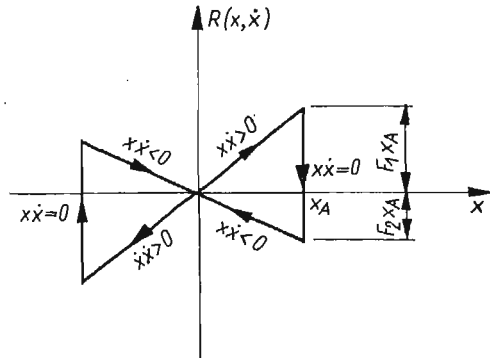
Jeżeli $B + F(0) < 2\sqrt{AC}$, to ruch jest naprzemienny (rozwiązanie ma nieskończenie wiele miejsc zerowych).

Jeżeli $\beta B < 2\sqrt{AC} < \beta[B + F(0)]$, to rozwiązanie ma skończoną liczbę miejsc zerowych, niezależną od warunków początkowych i od pewnej chwili ruch jest nienaprzemienny.

4.4.

$$m\ddot{x} + kx \begin{cases} +F_1\dot{x} = 0 & \text{dla } \dot{x} > 0, \\ -F_2\dot{x} = 0 & \text{dla } \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Równanie to podał Z. OSIŃSKI w pracy [29]. Opisuje ono ruch drgający masy przy tarcie suchym (Coulomba) proporcjonalnym do przemieszczenia x . Opór taki występuje przy drganiach masy na sprężynie wielopierścieniowej i na resorze piórowym. Podobny charakter ma tarcie w przegubach dźwigni obciążonej masą drgającą i podpartej sprężystości.



Rys. 10

Charakterystyka tłumienia przebiega według rys. 10. Charakterystyka sprężysta jest liniowa.

Rozwiązanie równania dla ruchu od położenia równowagi:

$$x = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t.$$

Dla ruchu do położenia równowagi

$$x = C_3 \cos \omega_2 t + C_4 \sin \omega_2 t,$$

gdzie

$$\omega_1^2 = \frac{k+F_1}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k-F_2}{m}.$$

Właściwości ruchu. 1. Przemieszczenie $x(t)$ ma co najwyżej jedno miejsce zerowe przy $k \leq F_2$ lub nieskończenie wiele miejsc zerowych przy $k > F_2$.

2. Kolejne amplitudy zmieniają się według postępu geometrycznego.

3. Przesunięcie środka drgań nie występuje.

4. Ruch układu przy $k > F_2$ ustaje po upływie nieograniczenie długiego czasu.

5. Okres drgań jest stały i różny od okresu drgań bez tarcia:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left(\frac{\omega}{2\omega_1} + \frac{\omega}{2\omega_2} \right) \quad \text{przy} \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$

4.5.
$$\ddot{x} + ax\dot{x}^2 + bx = 0.$$

Równanie powyższe zostało podane w zbiorze E. KAMKEGO [16], s. 553. Przez podstawienie $p(x) = \dot{x}(t)$ otrzymujemy równanie Bernoulliego

$$pp' + axp^2 + bx = 0.$$

4.6.
$$\ddot{x} + x\dot{x} - x^2 + ax = 0, \quad a > 0.$$

Równanie to i jego rozwiązanie podaje P. PAINLEVÉ. Cytujemy je za E. KAMKEM [16] (s. 548).

Rozwiązanie ma postać:

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{3}} \frac{p'(u, 12, C_1)}{p(u, 12, C_1)^{-1}},$$

gdzie

$$u = \frac{t}{2} \sqrt{\frac{a}{3}} + C_2.$$

5.1.
$$\ddot{x} + \omega F(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Równanie Lienarda z liniową charakterystyką sprężystą. Dla równania tego G. SANSONE [35, 38] podaje kryteria istnienia rozwiązań okresowych.

Na charakterystykę tłumienia nałożone są warunki: $F(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $(-\infty, \infty)$; istnieją dwie takie liczby

$$\delta_{-1} < 0 \text{ i } \delta_1 > 0, \text{ że } F(x) < 0 \text{ dla } \delta_{-1} < x < \delta_1,$$

$$F(x) > 0 \text{ dla } x < \delta_{-1}, x > \delta_1 \text{ oraz } F(\delta_{-1}) = F(\delta_1) = 0.$$

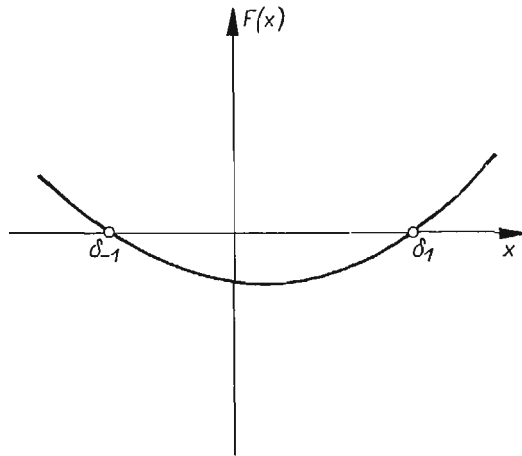
Powyższe założenia określają charakter funkcji $F(x)$, której wykres przedstawiono na rys. 11.

Możliwe są następujące przypadki:

1. Jeżeli obok założenia (a) spełniony jest jeszcze dla każdego x warunek $x\dot{\Phi}(x) < 0$, gdzie $\Phi(x) = \int_0^x F(s)ds$, to równanie nie ma rozwiązania okresowego.

2. Jeżeli obok założenia (a) spełnione są jeszcze warunki: istnieje takie $x_0 > \delta_1$, że $4Nx_0 + 4N^2 \leq [\Phi(x_0) - \Phi(\delta_1)]^2$, gdzie $N = |\Phi(\delta_1)| + |\Phi(\delta_{-1})|$; istnieje $x_0 < \delta_{-1}$, takie że $4N|x_0| + 4N^2 \leq [\Phi(x_0) - \Phi(\delta_{-1})]^2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} |\Phi(x)| = \infty$, to równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie okresowe.

G. SANSONE i I. L. MASSERA podali także twierdzenie o istnieniu jedyngo rozwiązania okresowego [37, 22]:



Rys. 11

3. Jeżeli spełnione są założenia (a) i funkcja $F(x)$ nie jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz nie jest malejąca w $(0, \infty)$, to równanie ma jedno i tylko jedno rozwiązanie okresowe.

5.2.
$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Jest to równanie VAN DER POLA [30, 31]. Równanie należy do typu równania Lienarda (5.1) i spełnia założenia zapewniające istnienie jedyngo statecznego rozwiązania okresowego.

Równanie rozwiązuje się za pomocą metody małego parametru (μ jest przyjmowane jako mały parametr). Podajemy rozwiązanie w drugim przybliżeniu uzyskane metodą Kryłowa–Bogoliubowa [3]:

$$x = a \cos(\omega t + \theta) - \frac{\mu a^3}{32} \sin 3(\omega t + \theta),$$

gdzie

$$a = \frac{a_0 \exp(\mu t/2)}{\sqrt{1 + a_0^2 (\exp \mu t - 1)/4}}, \quad \omega = 1 - \frac{\mu^2}{16}.$$

Rozwiązanie okresowe otrzymujemy dla $a = 2$. Ma ono postać

$$x = 2 \cos(\omega t + \theta) - \frac{\mu}{4} \sin 3(\omega t + \theta).$$

5.3. $\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ przy $\lambda \rightarrow \infty$.

Równanie ma postać równania drgań relaksacyjnych. Badaniem własności takiego równania przy bardzo dużych oraz rosnących nieograniczenie wartościach λ zajmowali się w szczególności A. A. DORODNICYN [11] i M. L. CARTWRIGHT

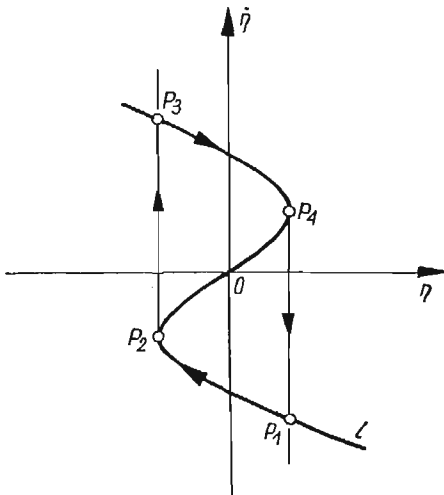
[5]. Podają oni przybliżone wzory na okres drgań. Podajemy wzór na okres drgań według pracy BOGOLIUBOWA i MITROPOLSKIEGO [3]:

$$T = 1,613706 \lambda + 7,01432 \lambda^{-1/3} - \frac{22 \ln \lambda}{9 \lambda} + 0,0087 \lambda^{-1} + 0(\lambda^{-4/3}).$$

W przypadku bardzo dużych wartości λ można po zamianie zmiennych $x = \lambda \eta$, $t = \varepsilon \tau$, przejść do równania

$$(a) \quad \dot{\eta} - \frac{1}{3} \dot{\eta}^3 - \eta = 0.$$

Analiza ruchu na płaszczyźnie fazowej wskazuje na istnienie w tym przypadku cyklu granicznego o specjalnym charakterze, rys. 12. Krzywa l jest okre-



Rys. 12

ślona równaniem (a). Cykl graniczny składa się z dwóch odcinków krzywej P_1P_2 i P_3P_4 oraz z dwóch odcinków pionowych P_4P_1 i P_2P_3 .

6.1. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + S(x) = 0$.

Pewne własności tego równania zostały zbadane przez S. ZIEMBE w pracy [48]. Poczynione zostały przy tym założenia dodatniej dysypacji w przedziale nieograniczonym. Założenia te są następujące: $R(\dot{x}) = -R(\dot{x})$, $R(x)\dot{x} > 0$ dla $\dot{x} > 0$, $\frac{dR(\dot{x})}{d\dot{x}} > 0$, $R(0) = 0$ oraz $S(-x) = S(x)$, $S(x)x > 0$ dla $x > 0$,

$$\frac{dS(x)}{dx} > 0, \quad S(0) = 0.$$

Charakterystyka tłumienia jest więc asymetryczna i ma pochodną stale rosnącą. Podobne własności ma charakterystyka sprężysta. Przy tych założeniach wykazano ograniczoność ruchu, mianowicie:

$$|\dot{x}(t)| \leq \sqrt{E(t_0)}, \quad |x(t)| \leq \tilde{F}^{-1}[E(t_0)],$$

gdzie $\tilde{F}(x)$ jest funkcją określającą energię potencjalną układu, a $E(t_0)$ całkowitą energię początkową.

Wykazano też, że rozwiązanie ma charakter gasnący, to znaczy, że

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [E(t)] &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)] &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{x}(t)] &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} [\ddot{x}(t)] &= 0. \end{aligned}$$

W tejże pracy przedyskutowano charakter punktu osobliwego. Punkt osobliwy jest punktem węzłowym statecznym, jeżeli $h \geq a > 0$, a punktem ogniskowym statecznym, jeżeli $0 < h < a$, gdzie $2h$ jest współczynnikiem przy liniowym wyrazie w rozwinięciu funkcji $R(x)$ na szereg potęgowy, a a^2 jest współczynnikiem przy liniowym wyrazie w rozwinięciu funkcji $S(x)$ na szereg potęgowy.

Przedyskutowano kierunki elementów liniowych na płaszczyźnie fazowej oraz podano metodę wykreślną przybliżonego wyznaczenia trajektorii fazowych.

Zagadnienia naprzemienności omówiono w związku z równaniem (6.2). Zagadnienie to zostało także zbadane przez Z. OSIŃSKIEGO w pracy [26].

Zakładamy, że charakterystyki można przedstawić w postaci

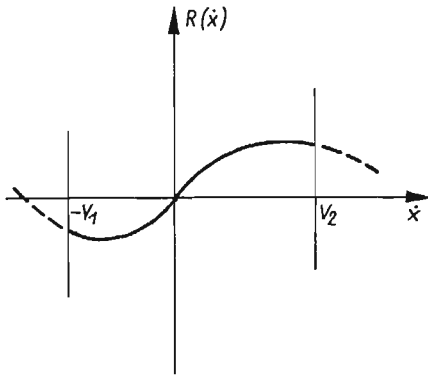
$$R(\dot{x}) = a\dot{x} + \varphi(\dot{x}), \quad S(x) = \omega^2 x + f(x)$$

przy $a > 0$, $\omega^2 > 0$ oraz

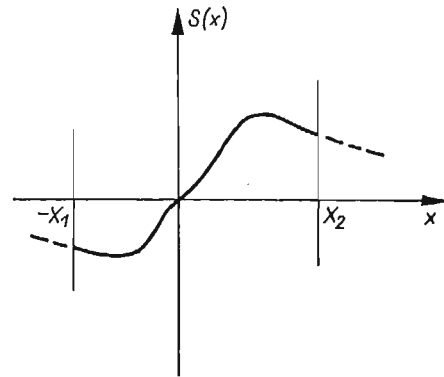
$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} R(\dot{x})\dot{x} > 0 \\ R(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{w przedziale } (-V_1, +V_2),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S(x)x > 0 \\ S(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{w przedziale } (-X_1, +X_2).$$

Charakterystyki mają postać przedstawioną na rys. 13 i 14. Postać ta ograniczona jest tylko warunkiem ciągłości i założeniami (a) w ograniczonym przedziale.



Rys. 13



Rys. 14

Postać charakterystyk poza określonym przedziałem nie jest istotna dla ruchu rozpoczynającego się przy odpowiednio ograniczonych warunkach początkowych.

W tych warunkach przemieszczenie $x(t)$ ma nieskończoną liczbę miejsc zerowych, gdy $a < 2\omega$, oraz skończoną liczbę miejsc zerowych, gdy $a \geq 2\omega$. W tym drugim przypadku może istnieć co najmniej jedno miejsce zerowe niezależnie od warunków początkowych lub skończona liczba miejsc zerowych, zależna od warunków początkowych.

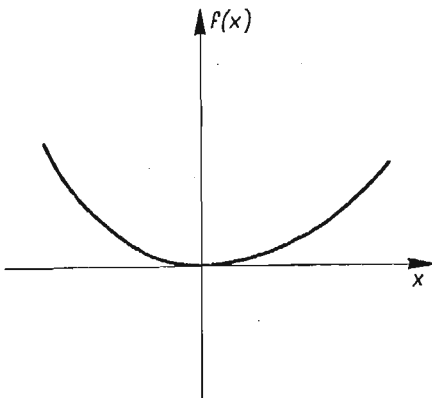
W pracy podano geometryczne kryterium oceny liczby miejsc zerowych w postaci tzw. «prostej krytycznej» oraz «prostej pomocniczej». Zastosowanie tego kryterium pozwala ocenić liczbę miejsc zerowych bezpośrednio z postaci charakterystyk, które mogą być dane w postaci wykresnej (np. z doświadczeń).

$$6.2. \quad \begin{aligned} A\ddot{x} + [B + \varphi(x)\dot{x}] + [C + f(x)]x &= 0, \\ A > 0, \quad B \geq 0, \quad C \geq 0. \end{aligned}$$

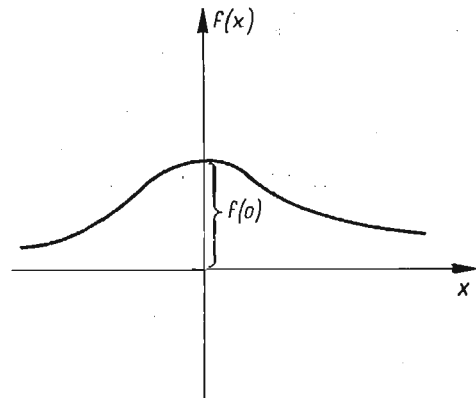
Równanie należy do typu (6.1). Przy spełnieniu założeń podanych tamże ogólne własności równania (6.1) są zachowane (ograniczoność, gaśnięcie, charakter punktu osobliwego). W pracy [48] S. ZIEMBA podaje analizę zagadnienia naprzemienności powyższego równania.

Określono charakterystykę sprężystą jako sztywną (rys. 15), jeżeli

$$\begin{aligned} f(-x) = f(x) > 0 & \quad \text{dla } x \neq 0, \quad f(0) = 0, \\ f'(x) > 0 & \quad \text{dla } x > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \end{aligned}$$



Rys. 15



Rys. 16

i jako miękką (rys. 16), jeżeli

$$\begin{aligned} f(-x) = f(x) > 0 & \quad \text{dla } x \neq 0, \quad f(0) > 0, \\ f(x) < 0 & \quad \text{dla } x > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0. \end{aligned}$$

Podobnie charakterystyka tłumienia jest sztywna, jeżeli

$$\begin{aligned} \varphi(-\dot{x}) = \varphi(\dot{x}) > 0 & \quad \text{dla } \dot{x} \neq 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \\ \varphi'(\dot{x}) > 0 & \quad \text{dla } \dot{x} > 0, \quad \lim_{\dot{x} \rightarrow \infty} \varphi(\dot{x}) = \infty \end{aligned}$$

oraz miękka, jeżeli

$$\begin{aligned} \varphi(-\dot{x}) = \varphi(\dot{x}) & \quad \text{dla } \dot{x} \neq 0, \quad \varphi(0) > 0, \\ \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(\dot{x}) < 0 & \quad \text{dla } \dot{x} > 0, \quad \lim_{\dot{x} \rightarrow \infty} [\varphi(\dot{x})] = 0. \end{aligned}$$

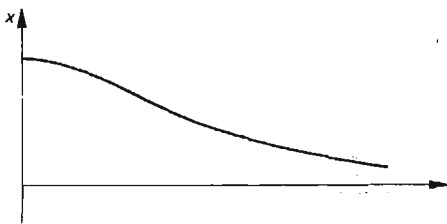
Zanalizowano i ustalono kryteria naprzemienności w czterech przypadkach skojarzenia charakterystyki:

- 1) miękka sprężysta, sztywna tłumienia;
- 2) sztywna sprężysta, miękka tłumienia;
- 3) sztywna sprężysta, sztywna tłumienia;
- 4) miękka sprężysta, miękka tłumienia.

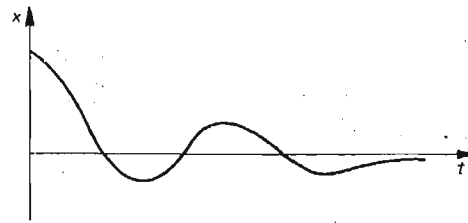
Stwierdza się, że zależnie od postaci charakterystyk i ich skojarzenia możemy ustalić następujące przypadki ruchu:

1. Ruch z jednym co najwyżej miejscem zerowym. Przy odpowiednim doborze warunków początkowych punkt ruchomy nie przechodzi w ogóle przez położenie równowagi (rys. 17).

2. Ruch ze skończoną liczbą miejsc zerowych. Punkt, zależnie od warunków początkowych, może przejść skończoną liczbę razy przez położenie równowagi, przy czym od pewnej chwili dalszy ruch jest nienaprzemienny (rys. 18).



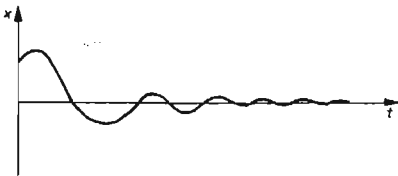
Rys. 17



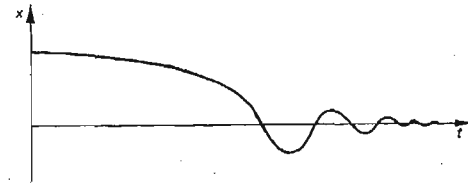
Rys. 18

3. Ruch z nieskończoną liczbą miejsc zerowych, czyli ruch naprzemienny (rys. 19).

4. Ruch nienaprzemienny przez pewien skończony okres czasu, a następnie ruch naprzemienny z nieskończoną liczbą miejsc zerowych (rys. 20).



Rys. 19



Rys. 20

6.3. $m\ddot{x} + l\dot{x}^\alpha + kx^\beta = 0, \quad m > 0, \quad k > 0, \quad l \geq 0.$

S. ZIEMBA w pracy [48] poszukuje szczególnych przypadków, w których można znaleźć równanie trajektorii w postaci zamkniętej. Przypadki takie za-

chodzą, jeżeli istnieje odpowiedni związek między wykładnikami α i β . Jeżeli przyjmiemy, że względu na antysymetrię charakterystyki, że wykładnik α ma postać:

$$\alpha = \frac{2n+1}{2m+1},$$

gdzie n, m oznaczają liczby naturalne lub zero, to wykładnik β powinien mieć postać:

$$\beta = \frac{2n+1}{2(2m-n)+1}, \quad m > n/2.$$

Dla takich wykładników równanie trajektorii $\Phi(\dot{x}, x) = 0$ ma postać

$$x^2 + [C + \exp F_2(u)]^2 = 0,$$

gdzie

$$F_2(u) = \int \frac{du}{au^\nu + \frac{1}{\nu-1}u + b}, \quad u(x) = x^{\nu-1} \dot{x}^2(x),$$

przy oznaczeniach $a = -2l/m, b = -2k/m, \nu = \alpha/2$.

6.4.

$$\dot{x} + ax\dot{x} + bx^3 = 0.$$

Równanie podane przez E. KAMKEGO [16] (s. 551).

Przez podstawienie

$$\dot{x}(t) = x^2(\tau), \quad \tau = \ln x,$$

sprowadzimy równanie to do równania

$$a\dot{u} + 2u^2 + au + b = 0,$$

którego rozwiązanie można wyrazić za pomocą kwadratury

$$\tau = - \int \frac{udu}{2u^2 + au + b} + C_1.$$

6.5.

$$\ddot{x} + (3a+x)\dot{x} - x^3 + ax^2 + 2a^2x = 0.$$

Równanie zostało podane przez P. PAINLEVÉ; cytujemy je za E. KAMKEM [16] (s. 548). Rozwiązanie ma postać,

$$x = C_1 e^{-at + p'(u, 0, 1)} / p(u, 0, 1),$$

gdzie

$$u = \begin{cases} \frac{C_1}{a} e^{-at} + C_2 & \text{dla } a \neq 0, \\ C_1 t + C_2 & \text{dla } a = 0. \end{cases}$$

$$6.6. \quad \ddot{x} + a\dot{x}^2 + b \sin x = 0.$$

Równanie wahadła matematycznego z oporem proporcjonalnym do kwadratu prędkości (o stałym kierunku) zostało zbadane przez F. A. WILLERSA [45]. Podajemy je za E. KAMKEM [16]. Rozwiązanie można przedstawić za pomocą kwadratury

$$t = \int \frac{dx}{\pm \sqrt{C_1 e^{\mp at} + \frac{2b}{4a^2+1} (\text{soc } x - 2a \sin x)}} + C_2.$$

$$6.7. \quad \ddot{x} + a\dot{x}|\dot{x}| + b \sin x = 0.$$

Równanie wahadła matematycznego z uwzględnieniem oporu powietrza było badane przez F. A. WILLERSA [45]. Podajemy je za E. KAMKEM [16].

Rozwiązanie można otrzymać przez złożenie rozwiązań dwóch równań

$$\ddot{x} + a\dot{x}^2 + b \sin x = 0 \quad \text{dla} \quad \dot{x} > 0$$

oraz

$$\ddot{x} - a\dot{x}^2 + b \sin x = 0 \quad \text{dla} \quad \dot{x} < 0$$

(por. równanie 6.6.).

$$7.1. \quad \ddot{x} + R(\dot{x}) + S(x) = 0.$$

Równanie to zostało zbadane pod kątem widzenia istnienia rozwiązań okresowych przez R. REISSIGA w pracy [33].

Założenia są następujące:

- 1) $R(\dot{x})$ i $S(x)$ ciągłe wraz ze swymi pochodnymi,
 $R'(\dot{x})$ i $S'(x)$ dla wszystkich wartości x i \dot{x} .
- 2) $R(\dot{x})\dot{x} \leq 0$ dla $|\dot{x}| \leq U > 0$,
 $R(\dot{x})\dot{x} \geq 0$ dla $|\dot{x}| \geq V > U > 0$,
 $R(\dot{x}) \geq \delta > 0$ dla $\dot{x} \geq V$.
- 3) $S(x)x > 0$ dla $x \neq 0$,
 $S(x) \geq -f + \delta$ dla $x \geq X > 0$,
 $S(x) \leq -F - \delta$ dla $x \leq -X$,

gdzie

$$\left. \begin{aligned} F &= \max R(\dot{x}) > 0 \\ f &= \min R(\dot{x}) \leq 0 \end{aligned} \right\} \text{ w przedziale zamkniętym } |\dot{x}| \leq V.$$

4) Funkcja $J(x) = \int_0^x S(s) ds$ rośnie silnie monotonicznie. Charakterystyka tłumienia ma postać pokazaną na rys. 21.

Udowodniono, że istnieje możliwość ustalenia się drgań okresowych (samowzbudnych) oraz podano konstrukcję pierścienia, wewnątrz którego wszystkie trajektorie bądź są zamknięte, bądź asymptotycznie zmierzają do trajektorii zamkniętej.

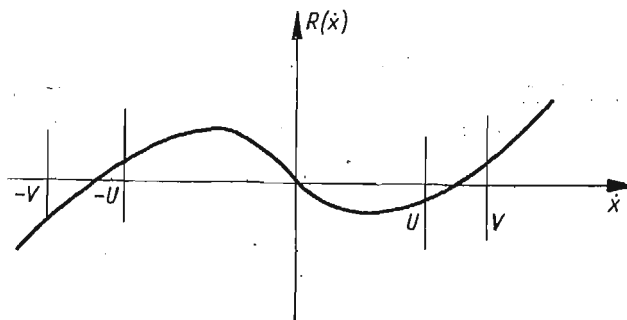
7.2. $\ddot{x} + x|\dot{x}| - q\dot{x} + x - p^2x^3 = 0.$

Równaniem tym zajmowali się G. KRALL [17] i J. CECCONI [8, 9]. Przy dostatecznie małych $q > 0$ i $p > 0$ równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie okresowe.

8.1. $\ddot{x} + S(x) = 0.$

Rozwiązanie sprowadza się do kwadratur (por. np. [2, 7])

$$t = \int \frac{dx}{\pm \sqrt{-2 \int S(x) dx + C_1}} + C_2.$$



Rys. 21

Założymy, że warunki początkowe są następujące: dla $t = 0$, $x = x_0$ i $\dot{x} = 0$ jeżeli przy tym równanie

$$-2 \int S(x) dx + C_1 = 0$$

ma pierwiastki pojedyncze x_1 i x_2 , to dla $x_1 < x_0 < x_2$ ruch jest okresowy o okresie

$$T = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{-2 \int S(x) dx + C_1}}.$$

Ze względu na trudności z wykonaniem całkowania stosuje się często metody przybliżone, polegające na przedstawieniu $S(x)$ w postaci szeregu Taylora i rozwiązanie równań metodą małego parametru.

8.2. $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0, \quad \omega^2 = g/l.$

Jest to równanie wahadła. Jego rozwiązanie sprowadza się do kwadratur (por. równanie 8.1) i może być przedstawione [16] w postaci

$$t = \frac{1}{\omega} \int_{\frac{1}{k} \sin \frac{\alpha}{2}}^u \frac{du}{(1-u^2)(1-k^2u^2)} + t_0,$$

gdzie

$$ku = \sin \frac{1}{2}x, \quad k^2 = \sin^2 \frac{1}{2}\alpha + \frac{\beta^2 l}{4g}$$

oraz

$$\alpha = x(t_0), \quad \beta = \dot{x}(t_0).$$

Przybliżone rozwiązanie uzyskuje się za pomocą rozłożenia $\sin x$ w szereg Taylora i zachowania pierwszych dwóch lub trzech wyrazów (por. równanie 8.3).

$$8.3. \quad \ddot{x} + \frac{g}{l} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) = 0.$$

Przybliżone równanie opisuje ruch wahadła. Rozwiązanie wyznaczono metodą Kryłowa-Bogoliubowa w drugim przybliżeniu [3]:

$$x = a \cos \Psi - \frac{a^3}{192} \left(1 + \frac{3}{64} a^2 \right) \cos 3\Psi + \frac{a^5}{20480} \cos 5\Psi,$$

gdzie

$$\Psi = \omega t + \theta, \quad \omega = \frac{g}{l} \left(1 - \frac{a^2}{16} + \frac{a^4}{1024} \right).$$

Wielkości a i θ określa się z warunków początkowych. Okres drgań jest zależny jak widać, od amplitudy.

$$8.4. \quad \ddot{x} + Ax + 2Bx^3 = 0.$$

Badaniem powyższego równania zajmował się H. SCHOLZ [40]. Autor podaje kryteria, kiedy równanie powyższe, przy warunkach początkowych

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

może być rozwiązane przez odpowiednie funkcje specjalne.

Założenia: $x_0 \neq 0$, $\dot{x}_0 \neq 0$, A i B stałe dowolne, $B \neq 0$.

Jeżeli przy oznaczeniu $D^2 = (A + 2Bx_0^2)^2 + 4B\dot{x}_0^2$,

- 1) $0 \neq D \neq A$, to rozwiązanie wyraża się przez funkcje eliptyczne;
- 2) $D = 0$, $A \neq 0$ lub $D = A \neq 0$, to rozwiązanie wyraża się przez funkcje wykładnicze;
- 3) $D = A = 0$, to rozwiązanie wyraża się przez funkcje wymierne.

H. SCHOLZ podaje rozwiązanie dla tych przypadków.

$$9.1. \quad m\ddot{x} + 2h\dot{x} + a^2\varphi(x) = 0, \quad h > 0, \quad a^2 > 0.$$

Pewne własności powyższego równania zostały zbadane w pracy R. GUTOWSKIEGO [14]. Założenia dotyczące charakterystyki sprężystej są następujące: $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą, monotoniczną, rosnącą i analityczną w przedziale $(-\infty, \infty)$; $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\varphi(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = \pm\infty$.

Przyjęto następujące kryteria istnienia nieskończenie wielu miejsc zerowych:

1. Przy charakterystyce «szytywnej dla prawie wszystkich x », to jest spełniającej warunek

$$(a) \quad \dot{x} - \varphi(x) \leq 0$$

z wyjątkiem co najwyżej pewnego skończonego otoczenia punktu $x = 0$, wa-

runkiem istnienia nieskończonej liczby miejsc zerowych jest

$$\varphi'(0) > (h/a)^2.$$

2. Przy charakterystyce «absolutnie sztywnej», to znaczy spełniającej warunek (a) dla dowolnych x z przedziału $(0, \infty)$, warunkiem istnienia nieskończonej liczby rozwiązań jest

$$h/a < 1.$$

Warunek ten jest analogiczny do odpowiedniego warunku dla równoważnego równania liniowego.

3. Dla charakterystyki «absolutnie miękkiej», to znaczy spełniającej warunek

$$(b) \quad x - \varphi(x) \geq 0$$

dla wszystkich x z przedziału $(0, \infty)$ oraz dla charakterystyki «miękkiej dla prawie wszystkich x », to znaczy spełniającej warunek (b) z wyjątkiem co najwyżej skończonego otoczenia punktu $x = 0$, warunkiem istnienia nieskończonej liczby rozwiązań jest istnienie takiej prostej $y = \beta x$, która leży całkowicie poniżej $\varphi(x)$ dla $x > 0$, przy czym

$$\beta = \left(\frac{h}{a}\right)^2 < 1.$$

W pracy powyższej podano także oszacowanie odległości miejsc zerowych, pewne wnioski dotyczące zanikania wychyleń oraz przybliżoną metodę rozwiązywania przez przekształcenie go w równanie całkowe typu Volterry.

$$9.2. \quad \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \sin x - \beta = 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

Równanie występuje w szeregu zagadnień dynamiki i elektrotechniki. Jakościowa analiza równania (kryteria istnienia rozwiązań okresowych) oraz bibliografia znajduje się w pracy [39].

$$10.1. \quad \ddot{x} + R(\dot{x}) + \omega^2 x = 0.$$

Przy założeniu, że $R(\dot{x})\dot{x} > 0$ i $R(0) = 0$ w przedziale $(-V, +V)$ ograniczonym lub nieograniczonym, niektóre własności równania zostały zbadane przez Z. OSIŃSKIEGO [28]. Praca ta jest rozszerzeniem prac G. SANSONEGO i S. ZIEMBY (równanie 10.2).

Jeżeli charakterystykę tłumienia przedstawimy w postaci

$$R(\dot{x}) = \alpha \dot{x} + \varphi(\dot{x}),$$

to, niezależnie od znaku $\varphi(\dot{x})$,

- 1) dla $\alpha < 2\omega$ ruch ma nieskończenie wiele miejsc zerowych,
- 2) dla $\alpha \geq 2\omega$ ruch ma skończoną liczbę miejsc zerowych.

Jeżeli $\varphi(\dot{x})\dot{x} > 0$, to przemieszczenie ma co najwyżej jedno miejsce zerowe niezależnie od warunków początkowych.

Jeżeli $\varphi(\dot{x})\dot{x} < 0$ w całym przedziale lub w jego części, to przemieszczenie może mieć więcej niż jedno miejsce zerowe. Ocenę liczby miejsc zerowych może ułatwić podane przez autora kryterium geometryczne w postaci tzw. «prostej krytycznej».

Jest to przypadek szczególny równania 6.1.

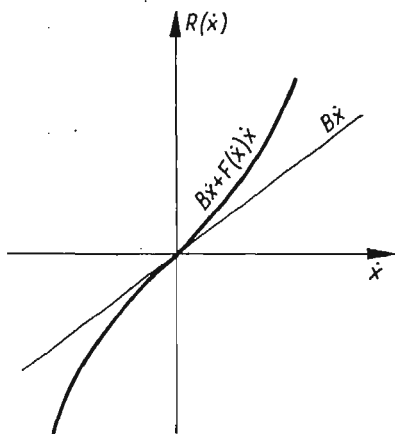
$$10.2. \quad A\ddot{x} + [B + F(\dot{x})]\dot{x} + Cx = 0.$$

Własności powyższego równania zostały zbadane przez W. E. MILNE'A [24] i G. SANSONEGO [31] przy założeniach

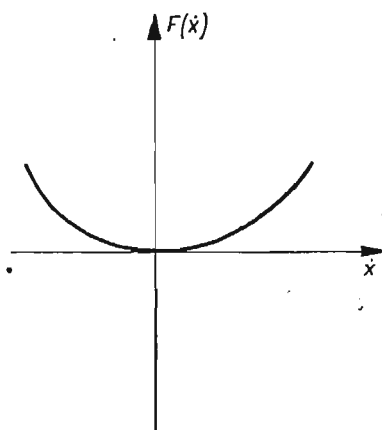
$$A > 0, \quad B \geq 0, \quad C > 0;$$

$$F(0) = 0, \quad F(-\dot{x}) = F(\dot{x}), \quad F(\dot{x}) > 0 \quad \text{dla} \quad \dot{x} > 0.$$

Założenia odnośnie $F(\dot{x})$ odpowiadają sztywnej charakterystyce tłumienia (rys. 22 i 23).



Rys. 22



Rys. 23

Ważniejsze własności równania podajemy za G. SANSONEM:

1. Funkcje x , \dot{x} , \ddot{x} są ograniczone w przedziale (t_0, ∞) .
2. W skończonym przedziale funkcje $x(t)$, $\dot{x}(t)$ nie mogą mieć punktów przegięcia.
3. Między dwoma miejscami zerowymi prędkości $\dot{x}(t)$ jest tylko jeden punkt zerowy $x(t)$.

4. $\ddot{x}(t)$ nie może być równe zero w żadnym przedziale.

5. Rozwiązanie jest gasnące, czyli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Dla $B^2 - 4AC \geq 0$:

6. Funkcja $x(t)$ ma tylko jedno miejsce zerowe w przedziale swęgo istnienia.
7. Funkcja $x(t)$ i jej pochodne poczynając od pewnego t są monotoniczne i dążą do zera, gdy $t \rightarrow \infty$.

Dla $B^2 - 4AC < 0$:

8. $x(t)$ ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.
9. Między dwoma miejscami zerowymi przemieszczenia $x(t)$ istnieje tylko jedno miejsce zerowe $\dot{x}(t)$.

Tym samym równaniem zajmuje się G. SESTINI w pracy [41], w której podaje oszacowanie rozwiązań w przypadkach $B^2 - 4AC > 0$, $B^2 - 4AC = 0$ oraz $B^2 - 4AC < 0$.

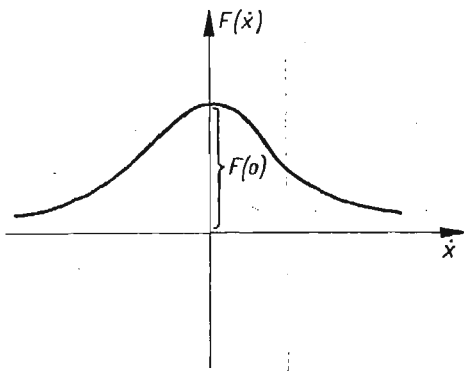
S. ZIEMBA w pracy [46] zbadał powyższe równanie dla pewnej klasy miękkich charakterystyk tłumienia.

Zakładając, że $F(0) > 0$ (rys. 24) i że spełnione są pozostałe założenia, G. SANSONE dowodzi, że własności 1–5 zachodzą i w tym przypadku.

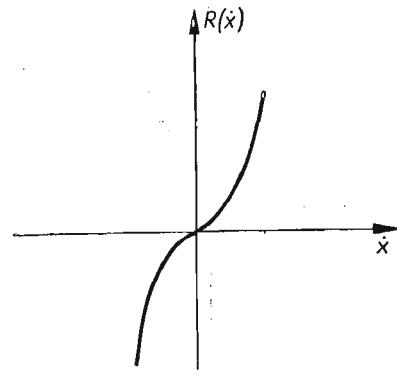
Odnośnie zagadnienia naprzemienności możliwe są cztery przypadki:

1. Dla $B > 2\sqrt{AC}$ istnieje co najwyżej jedno miejsce zerowe przemieszczenia niezależnie od wartości $F(0)$.

2. Dla $0 < F(0) \leq 2\sqrt{AC}$ oraz $B + F(0) < 2\sqrt{AC}$ istnieje nieskończenie wiele miejsc zerowych przemieszczenia.



Rys. 24



Rys. 25

3. Dla $0 < F(0) < 2\sqrt{AC}$ oraz $0 < 2\sqrt{AC} - F(0) < B < 2\sqrt{AC}$, a także dla $F(0) \geq 2\sqrt{AC}$ oraz $0 \leq B \leq 2\sqrt{AC}$ istnieje możliwość, że ruch ma skończoną, większą od jedności liczbę miejsc zerowych.

$$10.3. \quad \ddot{x} + R(\dot{x}) + Kx = 0.$$

Równanie zostało zbadane przez K. SZPUNARA w pracy [47], przy założeniu, że charakterystyka tłumienia jest nieliniową, nieparzystą funkcją prędkości, którą można przedstawić w postaci

$$R(\dot{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n |\dot{x}|^{2n+1} \operatorname{sgn} \dot{x},$$

gdzie

$$b_{2n} = 0 \quad \text{i} \quad b_{2n+1} \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

oraz że $K > 0$.

Charakterystyka tłumienia jest więc sztywna (rys. 25).

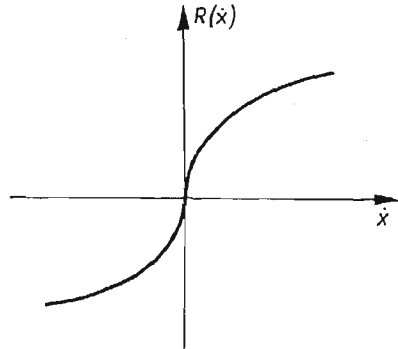
Autor szuka rozwiązania w postaci szeregu potęgowego (w otoczeniu punktu osobliwego) w postaci

$$t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{m+1} p^{m+1} + C,$$

gdzie $p = \dot{x}$. Badając własności tego szeregu autor dochodzi do następujących wniosków: jeżeli $b_1^2 - 4K < 0$, to rozwiązanie ma charakter oscylacyjny (naprzemienny), a jeżeli $b_1^2 - 4K \geq 0$, to rozwiązanie ma charakter nieoscylacyjny. Wnioski są analogiczne do wniosków uzyskanych przez E. MILNE'A [24] i G. SANSONEGO [34].

Jeżeli rozwiązanie jest oscylacyjne, to przedział czasu między dwoma kolejnymi krańcowymi wychyleniami zmierza do wartości granicznej określonej wzorem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_{vt} = \frac{\pi}{\sqrt{K - \left(\frac{b_1}{2}\right)^2}}$$



Rys. 26

10.4. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + x = 0$.

Równaniem takim zajmował się G. MALGARINI w pracy [21] przy poniższych założeniach:

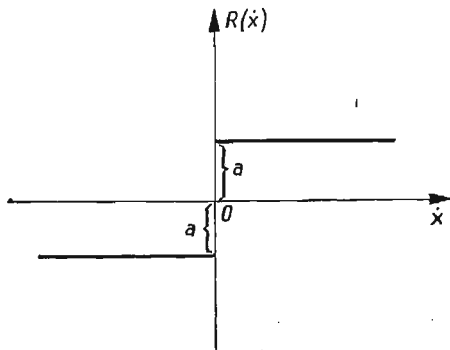
$$\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{R(\dot{x})}{\dot{x}} = \infty, \quad R(\dot{x})\dot{x} > 0, \quad \dot{x} \neq 0, \quad R(0) = 0;$$

$R(\dot{x})$ jest funkcją ciągłą dla $-\infty < \dot{x} < \infty$, $R'(\dot{x}) > 0$ oraz $\dot{x}R''(\dot{x}) < 0$.

Charakterystyka taka została nazwana subwiskotyczną (rys. 26). Konsekwencją tych założeń jest, że

$$\lim_{\dot{x} \rightarrow -\infty} \frac{R(\dot{x})}{\dot{x}} = k_1 \geq 0 \quad \text{i} \quad \lim_{\dot{x} \rightarrow \infty} \frac{R(\dot{x})}{\dot{x}} = k_2 \geq 0.$$

MALGARINI dowodzi, że jeżeli $k_1 \geq 2$ i $k_2 \geq 2$, to ruch nie ma miejsc zerowych niezależnie od warunków początkowych, a jeżeli $0 \leq k_1 < 2$, $0 \leq k_2 < 2$, to ruch jest podobny do ruchu przy tarcii suchym i liczba miejsc zerowych zależy od warunków początkowych. Istnieje «martwa strefa», podobnie jak przy tarcii suchym.



Rys. 27

10.5. $\ddot{x} + 2\epsilon|\dot{x}|^{m-1}\dot{x} + x = 0$

dla $0 < m < 1$.

G. MALGARINI w pracy [21] podaje uwagi dotyczące zachowania się trajektorii powyższego równania na podstawie ogólnego twierdzenia dotyczącego równania 10.4.

10.6. $\ddot{x} + a \operatorname{sign} \dot{x} + \omega^2 x = 0$.

Drgania tłumione tarcie suchym o charakterystyce tłumienia przedstawionej na rys. 27 podajemy za I. M. BABAKOWEM [2].

Rozwiązanie równania: dla $\dot{x} < 0$ mamy $\dot{x} = a + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, a dla $\dot{x} > 0$ mamy $\dot{x} = -a + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$.

Właściwości ruchu. 1. Ruch jest okresowy o okresie $T = 2\pi/\omega$ niezależnym od siły tarcia.

2. Środek drgań przemieszcza się o wielkość a w stronę dodatnich x , gdy $\dot{x} < 0$, w stronę ujemnych x , gdy $\dot{x} > 0$.

3. Amplituda maleje w postępie arytmetycznym za każdym wahnięciem o $2a$.

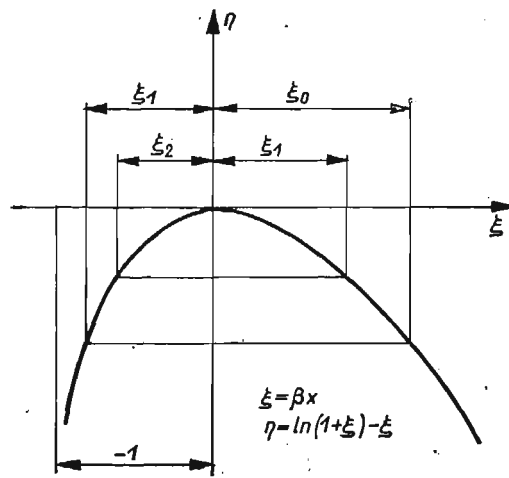
4. Drgania wygasają po skończonej liczbie wahaniec.

$$10.7. \quad \ddot{x} + \frac{\beta}{2} \dot{x}^2 \operatorname{sign} \dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Drgania tłumione są oporem powietrza lub płynu w warunkach przepływu burzliwego. Równanie zostało zbadane przez W. E. MILNE'A [24]. Rozwiązuje się je w kwadraturach [20]:

$$t = \int \frac{dx}{\pm \sqrt{C_1 e^{\mp \beta x} + 2 \frac{\omega^2}{\beta^2} (\pm \beta x + 1)}} + C_2,$$

Znaki górne odpowiadają ruchowi z prędkością dodatnią, $\dot{x} > 0$, a dolne ruchowi z prędkością ujemną, $\dot{x} < 0$. Kolejne maksymalne amplitudy można wyznaczyć za pomocą wykresu (rys. 28).



Rys. 28

Okres drgań zależy od amplitudy początkowej. Wyznaczamy go za pomocą metody małego parametru. Półokres ruchu, liczony dla warunków początkowych $x_0 > 0$, $\dot{x} = 0$, wynosi

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \left(1 + \frac{1}{24} \beta^2 x_0^2 \right).$$

10.8. $\ddot{x} + 3a\dot{x} - 2x^3 + 2a^2x = 0.$

Badaniem tego równania zajmował się PAINLEVÉ. Podajemy rozwiązanie za E. KAMKEM [16] (s. 548):

$$x = iaC_1 e^{-at} \operatorname{sn}_{k^2}^{-1}(C_1 e^{-at} + C_2).$$

10.9. $\ddot{x} + 5ax - 6x^2 + 6a^2x = 0.$

Badaniem równania zajmował się PAINLEVÉ. Podajemy rozwiązanie za E. KAMKEM [16] (s. 547):

$$x = a^2 C_1^2 e^{-2at} (C_1 e^{-at} + C_2, 0, -1).$$

10.10. $\ddot{x} + a\dot{x}|\dot{x}| + bx + cx = 0, \quad a > 0, \quad b \geq 0, \quad c > 0.$

Drgania tłumione oporem wiskotycznym i oporem powietrza omówione zostały przez KAMKEGO [16] (s. 552).

10.11 $\ddot{x} + a\dot{x} + \beta\dot{x}^3 + \omega^2x = 0, \quad a > 0, \quad \beta > 0 \quad \text{lub} \quad \beta < 0.$

Równanie to zbadał Z. OSIŃSKI w pracy [27]. Podano rozwiązanie metodą małego parametru (β — mały parametr) w II przybliżeniu.

Rozwiązanie w I przybliżeniu ma postać

$$x_1 = \frac{a_0 e^{-a/2t}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\beta}{\alpha} a_0^2 (e^{-at} - 1)}} \cos(\lambda t + \theta),$$

gdzie a_0 i θ są amplitudą i fazą początkową, a $\lambda = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2/4}$.

Zanalizowano wpływ nieliniowego parametru β na dekrement tłumienia oraz na okres drgań (to ostatnie na podstawie II przybliżenia, gdyż w I przybliżeniu wpływ powyższy nie jest dostrzegalny).

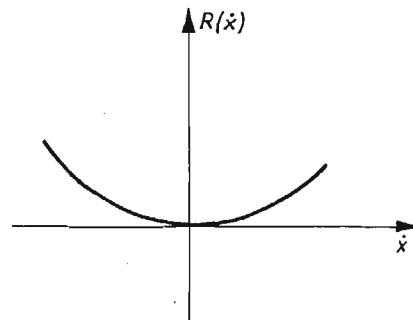
11.1. $\ddot{x} - A\dot{x} + B\dot{x}^3 + \omega^2x = 0.$

Jest to równanie Rayleigha, które drogą zamiany zmiennych

$$\tau = \omega t, \quad y = \omega \sqrt{\frac{3B}{A}} \int x d\tau$$

przekształcamy w równanie Van der Pola 5.2.

11.2. $\ddot{x} + (a\dot{x})^2 + bx = 0.$



Rys. 29

Równanie ruchu układu z liniową charakterystyką sprężystą oraz parzystą charakterystyką «tłumienia» przedstawiającą siłę proporcjonalną do kwadratu prędkości o stałym kierunku, niezależnie od kierunku prędkości (rys. 29).

Równanie to można rozwiązać przez kwadraturę [16], co prowadzi do

$$t = C_1 + \int \frac{dy}{\sqrt{C_2 e^{-2ax} + \frac{b}{2a^2} (1 - 2ax)}}.$$

K. SZPUNAR w pracy [43] przeprowadza badanie tego równania w kierunku ustalenia zależności oscylacyjnego charakteru rozwiązań od warunków początkowych.

Jeżeli równanie sprowadzimy do równania na płaszczyźnie fazowej

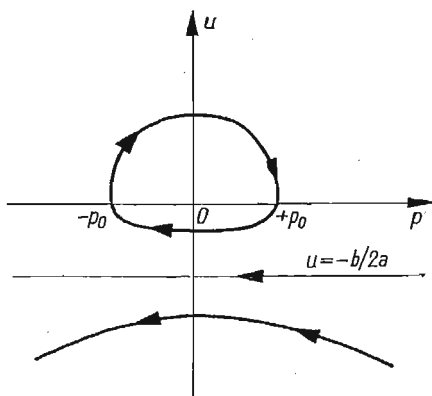
$$\frac{du}{dp} = -p \left(2a + \frac{b}{u} \right),$$

gdzie $u = \dot{p}$, $p = \dot{x}$, to charakter krzywych całkowych przedstawia rys. 30.

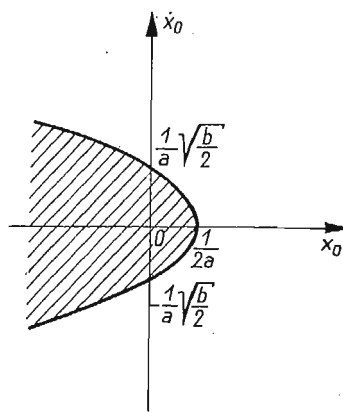
Jeżeli $u_0 > -b/2a$, to rozwiązanie jest oscylacyjne i okresowe. Jeżeli $u_0 \leq b/2a$, to rozwiązanie jest nieoscylacyjne.

Dla $u_0 = -b/2a$ otrzymujemy ruch nieoscylacyjny ze stałą prędkością.

W odniesieniu do oznaczeń równania wyjściowego obszar warunków po-



Rys. 30



Rys. 31

czątkowych x_0, \dot{x}_0 , dla których istnieją rozwiązania oscylacyjne i okresowe, został zakreskowany na rys. 31. Rozwiązania nieoscylacyjne odpowiadają obszarowi niezakreskowanemu oraz punktowi $(0, 0)$ (rozwiązanie trywialne).

Na zakończenie przedstawiamy krótki, syntetyczny przegląd równań w postaci tabeli 1 z podkreśleniem problemów zbadanych i takich, które — zdaniem autora — należałoby zbadać.

Tabela 1

Typ równania	Własności zbadane	Własności, które należałoby zbadać
1. $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) = 0$		Wpływ funkcji $R(x, \dot{x})$ na charakter rozwiązań. Kryteria odpowiadające ruchom okresowym, gasnącym itp.
2. $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + S(x) = 0$ RG (Rozwiązanie gasnące)	Ograniczoność, charakter punktu osobliwego dla charakterystyk rosnących wraz z x i \dot{x} i antysymetrycznych. Równania trajektorii fazowych w postaci zamkniętej dla szczególnych przypadków.	Ograniczoność i naprzemiennosc dla innych charakterystyk.

Typ równania	Własności zbadane	Własności, które należałoby zbadać
	Sformułowano równania ruchu w szczególnych przypadkach ruchu wahadła i ruchu po przewodnicy.	Rozwiązanie równań ruchu i analiza przypadków mających zastosowanie techniczne.
3. $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + S(x) = 0$ RO (Rozwiązanie okresowe)	Gdy $R(x, \dot{x}) = f(x, \dot{x})\dot{x}$, twierdzenie o istnieniu co najmniej jednego rozwiązania okresowego; gdy $R(x, \dot{x}) = -f(x, \dot{x})$, twierdzenie o istnieniu jednego rozwiązania okresowego.	Warunki istnienia rozwiązań okresowych w przypadku, gdy funkcja $R(x, \dot{x})$ ma inną postać.
4. $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + \omega^2 x = 0$ RG	Dla $R(x, \dot{x}) + \psi(x)\phi(\dot{x})$ charakter punktów osobliwych oraz zagadnienia naprzemienności dla charakterystyk sztywnych. Rozwiązano przypadek szczególny tarcia suchego proporcjonalnego do przemieszczenia. Niektóre szczególne przypadki mają rozwiązanie ściśle.	Analiza jakościowa w przypadku ogólniejszych założeń dla $R(x, \dot{x})$. Naprzemiennosc przy innych charakterystykach. Rozwiązanie w szczególnych przypadkach mających zastosowanie techniczne.
5. $\ddot{v} + R(x, \dot{x}) + \omega^2 x = 0$ RO	Dla funkcji $R(x, \dot{x}) = \omega F(x)\dot{x}$ kryteria istnienia jednego rozwiązania okresowego. Zbadano szczegółowo metodami przybliżonymi równanie Van der Pola oraz równania drgań relaksacyjnych.	Zbadanie jakościowe dla innej postaci funkcji $R(x, \dot{x})$ oraz zbadanie przypadków, gdy może być więcej rozwiązań okresowych niż jedno.
6. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + S(x) = 0$ RG	Zbadano ograniczoność i gaśnięcie rozwiązań oraz naprzemiennosc przy charakterystykach miękkich i sztywnych. Szczególne przypadki, gdy trajektorie fazowe dadzą się przedstawić w zamkniętej postaci. Ściśle rozwiązania niektórych przypadków szczególnych.	Badania jakościowe dla szczególnych postaci charakterystyk $R(x), S(x)$. Ze względu na liczne zastosowania techniczne celowe jest poszukiwanie rozwiązań przybliżonych lub numerycznych dla pewnych postaci charakterystyk $R(\dot{x})$ i $S(x)$.
7. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + S(x) = 0$ RO	Możliwość istnienia rozwiązań okresowych.	Kryteria istnienia jednego lub więcej cykli w przypadku ogólnym oraz dla szczególnych postaci charakterystyk. Rozwiązania przybliżone w przypadkach szczególnych mających znaczenie techniczne.
8. $\ddot{x} + S(x) = 0$	Rozwiązania przez kwadratury prowadzące do całek eliptycznych. Rozwiązania ściśle (przez kwadratury) i przybliżone szczególnych przypadków.	Badanie szczególnych przypadków dla różnych charakterystyk siły sprężystej, a szczególnie obliczenie okresu drgań.
9. $\ddot{x} + a\dot{x} + S(x) = 0$	Naprzemiennosc rozwiązań.	Badanie szczególnych przypadków dla różnych charakterystyk $S(x)$, a szczególnie obliczenie okresu drgań i dekrementu.
10. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + \omega^2 x = 0$ RG	Ograniczoność rozwiązań. Kryteria naprzemienności. Analiza pewnych typów charakterystyk oporu.	Rozwiązanie przybliżone dla różnych charakterystyk $R(\dot{x})$ przedstawiających różne opory. Obliczenie dekrementu.
11. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + \omega^2 x = 0$ RO	Kryteria istnienia rozwiązań okresowych. Analiza szczególnych przypadków.	Kryteria istnienia rozwiązań okresowych dla różnych charakterystyk. Rozwiązania przybliżone dla różnych charakterystyk.

Literatura cytowana w tekście

- [1] A. A. ANDRONOW, *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenués*, Comptes Rendus, **189**, Paris 1929.
- [2] И.М. БАБАКОВ, *Теория колебаний*, Москва 1958.
- [3] Н.Н. БОГОЛЮБОВ, И.А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Москва 1958.
- [4] E. i H. CARTAN, *Note sur la génération des oscillations entretenues*, Annales des Postes Télégraphes et Téléphones, Déc. 1925.
- [5] M. L. CARTWRIGHT, *Van der Pol's equation for relaxation oscillations*, Contr. to the theory of nonl. oscill., edited by S. Lefschetz, **2** (1955), 3-18.
- [6] A. DE CASTRO, *Sull'esistenza ed unicita della soluzioni periodiche del equazione $\ddot{x}+f(x, \dot{x})+g(x)=0$* , Boll. Un. Mat. Ital., Ser. 3, **9**, 1954 Bologna, 369.
- [7] A. DE CASTRO, *Soluzioni periodiche di una equazione differenziale del secondo ordine*, Boll. Un. Mat., **8**, **3** (1953), 26.
- [8] J. СЕССОНИ, *Su di una equazione differenziale di rilassamento*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **8**, **9** (1950), 38-44.
- [9] J. СЕССОНИ, *Su di una equazione differenziale non-lineare del seconde ordine*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **3**, **3** (1950), 245-278.
- [10] R. CONTI, *Soluzioni periodiche dell'equazione di Lienard generazzata*, Boll. Un. Mat. Ital., **3**, **7** (1952).
- [11] А.А. ДОРОДНИЦЫН, *Асимптотическое решение уравнения Van der Pola*, Прикл. Мат. Мех., **11** (1947).
- [12] А.В. ДРАГИЛЕВ, *Периодические решения дифференциального уравнения нелинейных колебаний*, Прикл. Мат. Мех., **16** (1952).
- [13] А.Ф. ФИЛИПОВ, *Достаточные условия существования устойчивого предельного цикла для уравнения второго порядка*, Мат. Сборник, Т., **30** (72), № 11, **30** (1952), 172.
- [14] R. GUTOWSKI, *Free vibration of a system of one degree of freedom with nonlinear elastic characteristic, taking into consideration linear viscous damping*, Arch. Mech. Stos., **9** (1957).
- [15] В.С. ИВАНОВ, *Обоснование одной гипотезы Van der Pola в теории автоколебаний*, Ученые записки, Л.Г.У. С.М.Н. **10**, 1940, 111-119.
- [16] E. КАМКЕ, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Leipzig 1951.
- [17] G. KRALL, *Dinamica ed aerodinamica dei fili*, III. Problemi non lineari della vibrazioni-visibili, Rend. Acc. Naz. Lincei, **5**, **8** (1948), 197-203.
- [18] N. LEVINSON, O. K. SMITH, *A general equation for relaxation oscillations*, Duke Math. J., **9** (1942), 382-403.
- [19] A. LIENARD, *Etude des oscillations entretenues*, Revue Gén. de l'Electricité, **23** (1928), 901-946.
- [20] Л.Г. ЛОЙЦЬЯНСКИЙ, А.И. ЛУРИЕ, *Курс теоретической механики*, Москва 1948.
- [21] G. MALGARINI, *Studio asintotico del moto d'un oscillatore elastico con resistenza di tipo subviscoso*, Rendiconti Istituto Lombardo, **86** (1953).
- [22] I. L. MASSERA, *Sur un théorème de G. Sansone sur l'équation de Lienard*, Boll. Un. Mat. Ital., **3**, **9** (1951), 367-369.
- [23] I. L. MASSERA, *Sur un théorème de G. Sansone sur l'équation de Lienard*, Boll. Un. Mat. Ital., ser. 3, **9** (1951), 367.
- [24] F. MILNE, Oregon Publication, **2**, 1923.
- [25] В.В. НЕМЫЦКИЙ, В.В. СТЕПАНОВ, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва 1950.
- [26] Z. OSIŃSKI, *Kryteria naprzemienności ruchu drgającego układu o jednym stopniu swobody z nieliniową siłą sprężystą i nieliniowym tłumieniem*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, Warszawa 1961.
- [27] Z. OSIŃSKI, *Drgania układu o jednym stopniu swobody przy tłumieniu nieliniowym*, Rozprawa doktorska, Warszawa 1959.

- [28] Z. OSIŃSKI, *O naprzemienności ruchu przy pewnym tłumieniu nieliniowym*, Rozpr. Inżyn., 2, 8 (1960).
- [29] Z. OSIŃSKI, *Wpływ tarcia suchego na ruchy drgające układów mechanicznych*, Arch. Bud. Masz. 1, 7 (1960.)
- [30] B. VAN DER POL, *The non-linear theory of electrical oscillations*, Proc. Inst. Radio Eng., 22 (1931), 1051-1086.
- [31] B. VAN DER POL, *Sur les oscillations de relaxation*, Phil. Magazine, 2, 7 (1926), 978-992.
- [32] R. REISSIG, *Über die Eindeutigkeit gewisser Relaxations-schwingungen*, Z. ang. Math. Mech., 7/8, 38 (1958).
- [33] R. REISSIG, *Selbsterregung eines einfachen Schwingers*, Math. Nachr., 3, 15 (1956).
- [34] G. SANSONE, *Equazioni differenziali el campo reale*, 1949.
- [35] G. SANSONE, *Sopra l'equazione di Lienard delle oscillazioni di rilassamento*, Ann. Mat. pura ed app., 4, 28 (1949), 153-181.
- [36] G. SANSONE, *Soluzioni periodiche dell'equazione di Lienard, Calcolo del periodo*, Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, 10, 1950-51.
- [37] G. SANSONE, *Soluzioni periodiche dell'equazione di Lienard*, Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, 10 (1950-51), 155-71.
- [38] G. SANSONE, *Sopra una classe di equazioni di Lienard prive di integrali periodici*, Rendo. ACC. Naz. Lincei, 8, 6 (1949), 156-160.
- [39] G. SANSONE, R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Roma 1956.
- [40] H. SCHOLZ, *Über die Lösung des Anfangsproblems $\ddot{y} + Ay + 2By^3$, $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$* , Österreichisches Ing.-Archiv, 2, Wien 1961.
- [41] G. SESTINI, *Valutazione asintotiche per una problema della dinamica non-lineare*, Quaderno sc. del Conv. Matem. di Modena, 1952, Modena 1953, 63-78.
- [42] W. W. STIEPANOW, *Równania różniczkowe*, PWN, Warszawa 1956.
- [43] K. SZPUNAR, *O równaniu różniczkowym $d^2x/dt^2 + a(dx/dt)^2 + bx = 0$* , Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej, nr 25, Kraków 1959.
- [44] K. SZPUNAR, *Drgania swobodne układu o jednym stopniu swobody przy silnie nieliniowym tłumieniu*, Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej, nr 28, Kraków 1961.
- [45] F. A. WILLERS, *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, 53 (1933), 501-506.
- [46] S. ZIEMBA, *Free vibration with damping of marked non-linear character*, Arch. Mech. Stos., 5, 9 (1957).
- [47] S. ZIEMBA, *Drgania swobodne przy uwzględnieniu mikroodkształceń plastycznych*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, PWN, Warszawa 1961.
- [48] S. ZIEMBA, *Free vibration of systems of one degree of freedom with non-linear elastic characteristic and non-linear viscous-type damping*, Arch. Mech. Stos., 2, 10 (1958).
- [49] S. ZIEMBA, *Vibrations of mechanical systems with one degree of freedom and generalized forces not depending in an explicit manner on time*, Arch. Mech. Stos. 5, 10 (1958).
- [50] S. ZIEMBA, *Analiza drgań*, Warszawa 1957.

Резюме.

ОБЗОР НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ
АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В работе дается обзор современного состояния исследований в области нелинейных дифференциальных уравнений колебаний автономных систем с одной степенью свободы. Обзор основан на анализе 50-и библиографических источников, указанных в работе. Уравнения разделены на 11 групп, причем раздел на группы вытекает из предположений, касающихся упругой характеристики и характеристики затухания. Рассматриваются предположения, гарантирующие существование автоколебаний и пред-

положения, гарантирующие затухание решений. Анализируется 37 уравнений или вошл уравнений.

Для каждого типа уравнений даются основные теоремы, касающиеся поведения решений, точные решения и приближенные решения, если таковы известны, замечания о свойствах движения и о приложениях к техническим задачам. В каждом случае указаны первоисточники.

В заключение приводится таблица с кратким синтетическим обзором групп уравнений, где подчеркиваются уже исследованные задачи, а также те, которые необходимо исследовать.

S u m m a r y

SURVEY ON NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE VIBRATIONS OF AUTONOMOUS SYSTEMS WITH ONE DEGREE OF FREEDOM

A survey is given of the recent investigations concerned with non-linear differential equations of vibrations of autonomous systems with one degree of freedom. Fifty papers from the relevant literature of the subject are reported. The equations considered are subdivided into eleven groups according to the assumptions concerning the elastic and damping characteristics. Also the assumption assuring the existence of selfexcited vibrations is distinguished from those assuring the attenuation of the solutions. In all, 37 equations of various types are analysed.

The fundamental theorems concerning the behaviour of the solutions, the exact solutions or the approximate ones, remarks on the properties of motion and on the application in technical problems are given for each type of the equations.

The table at the end of the paper contains a short synthetic survey of the groups of differential equations, special emphasis being laid on such problems as have already been investigated; problems to be tackled have also been mentioned.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 października 1962 r.
