

MODEL ELEKTRYCZNY TENSORA NAPRĘŻEŃ

HENRYK DZIA TL I K (WARSZAWA)

Wstęp

Trwałość, lekkość i taniaść konstrukcji technicznych można osiągnąć tylko na podstawie wnikliwej analizy rozkładu naprężeń i odkształceń występujących w konstrukcji pod działaniem obciążeń. W prostych przypadkach do wyznaczania naprężeń wystarczają metody nauki o wytrzymałości materiałów, oparte na hipotezie liniowego rozkładu naprężeń w badanych przekrojach, które pozostają płaskie również po odkształceniu elementu [1]. Założenia te są bliskie rzeczywistości tylko w takich elementach, w których wymiary przekrojów są bardzo małe w porównaniu z długością elementu, a więc w zasadzie metody wytrzymałości materiałów mogą być stosowane tylko do prętów i belek. W większości elementów konstrukcyjnych rozkład naprężeń nie jest jednak liniowy, lecz tworzy pole naprężeń o skomplikowanej budowie. Wymagania współczesnej techniki nie mogą być więc zaspokojone metodami wytrzymałości materiałów i zmuszają do szukania ścisłych rozwiązań opartych na teorii sprężystości, która pozwala wyznaczyć rozkład naprężeń bardziej zbliżony do rzeczywistości. Dzięki dobrej zgodności teorii ze zjawiskami zachodzącymi w rzeczywistych konstrukcjach metody teorii sprężystości można stosować do wszelkich elementów konstrukcyjnych, w których naprężenia nie wywołują odkształceń trwałych. Jeżeli jednak nie można pominąć faktu powstania odkształceń trwałych, to należy stosować metody teorii plastyczności, znajdujące się zresztą jeszcze w początkowej fazie swego rozwoju.

Przedmiotem naszych rozważań będzie teoria sprężystości, która została znakomicie opracowana w czasie swego przeszło stuletniego rozwoju i dzisiaj stanowi wypróbowane narzędzie do badania rozkładu naprężeń i odkształceń w elementach konstrukcyjnych o dowolnej postaci. Jednak struktura matematyczna teorii sprężystości, zawierająca wiele układów równań różniczkowych, jest bardzo skomplikowana i nastrocza ogromne trudności przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych. Jednym ze sposobów uproszczenia zagadnienia jest sprowadzenie go — w miarę możliwości — do układu płaskiego. Mamy wtedy do czynienia z dwiema zmiennymi niezależnymi i , po wprowadzeniu biharmonicznej funkcji naprężeń, z układem trzech równań różniczkowych; jednak i wtedy bezpośrednie rozwiązanie zagadnień bynajmniej nie jest łatwe.

2. Badanie naprężeń i odkształceń na modelach

Ze względu na trudności matematyczne od dawna stosuje się różne metody doświadczalne do rozwiązywania zagadnień teorii sprężystości.

Niewątpliwie najlepiej opracowaną metodą badania naprężeń na modelach jest elastooptyka [2, 3], która pozwala na bezpośrednie wyznaczanie linii jednakowego nachylenia osi naprężeń głównych (izokliny) i linii jednakowej różnicy naprężeń głównych (izochromy). Badania elastooptyczne wymagają jednak precyzyjnych urządzeń do obróbki modeli i kosztownej aparatury pomiarowej, a szczegółowe opracowanie wyników pochłania dużo czasu i wymaga personelu o wysokich kwalifikacjach technicznych.

Równoległe z metodą elastooptyki (lub czasem niezależnie od niej) stosuje się metody kruchych pokryć, analogii elektrycznej i analogii błonowej. Spośród innych doświadczalnych metod można jeszcze wymienić metodę rentgenograficzną i tensometryczną [3].

Znane metody doświadczalne poparte analizą matematyczną pozwalają na rozwiązanie wielu zagadnień teorii sprężystości, jednak najczęściej kosztem ogromnego nakładu pracy laboratoryjnej i rachunkowej. W ostatnich czasach rozpoczęto więc próby rozwiązywania zagadnień płaskich teorii sprężystości za pomocą układów elektrycznych, w których prądy lub napięcia spełniają równania biharmoniczne [9, 10].

Układy elektryczne przystosowane do rozwiązywania równań określonego typu stanowią wyspecjalizowane maszyny matematyczne wymagające jednak spełnienia warunków brzegowych danego zagadnienia metodą kolejnych przybliżeń. Ze względu na bardzo słabą zbieżność szeregów wyrażających warunki brzegowe funkcji naprężeń rozwiązywanie zagadnień płaskich teorii sprężystości nawet przy użyciu maszyn matematycznych bynajmniej nie jest łatwe.

Trudności doświadczalnych metod badania naprężeń na modelach wynikają najczęściej stąd, że wytworzenie pewnego pola wielkości fizycznych, np. pola prądów w modelach elektrycznych, analogicznego do pola naprężeń, nie prowadzi bezpośrednio do wytworzenia warunków brzegowych analogicznych do tych, jakie istnieją w stanie naprężenia oryginału. Spełnienie analogii wewnątrz modelu nie zapewnia jeszcze istnienia analogii na jego brzegach, czyli właściwie przy każdym modelowaniu znanymi metodami występują dwa zagadnienia: jedno związane z analogią naprężeń wewnątrz ciała, a drugie — z analogią naprężeń na jego brzegach i tylko równoczesne spełnienie tych analogii umożliwia rozwiązanie zagadnienia.

Nowa metoda modelowania elektrycznego naprężeń, opracowana przez autora w Instytucie Gospodarki Wodnej, pozwala zbudować taki model elektryczny stanu naprężenia, w którym analogie obciążenia na brzegach pociągają za sobą automatycznie spełnienie analogii naprężeń wewnątrz modelu.

3. Prądy zmienne wielofazowe w modelowaniu elektrycznym

W modelowaniu elektrycznym tensora naprężeń zastosowane są układy prądów wielofazowych [11] znanych z teorii prądów zmiennych. Pewne szcze-

góry, które są potrzebne do dalszych rozważań, wymagają jednak bliższego omówienia.

Przed wszystkim pod układem wielofazowych prądów zmiennych należy rozumieć każdy układ wieloprzewodowy odbiornika zasilanego prądami sinusoidalnymi przesuniętymi w fazie względem siebie, podczas gdy zwykle znaczenie tej nazwy jest związane raczej z układem generatora. Niewątpliwie takie rozumienie terminu «układ wielofazowy» pochodzi z silnego związania tego układu z energetyką, gdyż z reguły w rozdziale energii elektrycznej układem nadrzędnym jest układ generatora, natomiast układ odbiornika jest układem podporządkowanym.

W naszej pracy natomiast, w której chodzi o modelowanie elektryczne, układem podstawowym jest odbiornik (model), do którego powinien być przystosowany generator. Jeżeli np. do modelu doprowadzone są trzy prądy zmiennne, to powiemy, że układ jest trójfazowy, chociaż te trzy prądy mogą być pobrane z generatora, który ma cztery lub więcej faz. W ogóle korzystnie jest mieć do dyspozycji generator o dużej liczbie faz, np. 36, można wówczas bowiem otrzymać z niego każdy układ wielofazowy odbiornika o mniejszej liczbie faz przesuniętych względem siebie o dowolne kąty, będące wielokrotnością 10° . Takim generatorem może być np. silnik asynchroniczny z zatrzymanym wirnikiem. Jeżeli wirnik ma 36 żłobków, to w polu wirującym silnika wytwarza się w każdym przecię żłobka siła elektromotoryczna przesunięta o 10° względem siły elektromotorycznej indukowanej w przecię sąsiedniego żłobka.

Można również przyjąć jako generator prądów wielofazowych długą linię półfalową wykonaną w postaci łańcucha wielu czwórników — w każdym z takich czwórników prąd i napięcie są przesunięte względem prądów i napięć innych czwórników. Generatorem prądów wielofazowych może być każdy układ elektryczny odpowiedniej mocy, który może dostarczyć daną z góry liczbę prądów o znanym natężeniu, przesuniętych względem siebie o wyznaczone kąty przesunięcia fazowego.

Według podstawowej własności prądów zmiennych wielofazowych suma arytmetyczna prądów chwilowych i suma geometryczna wektorów przedstawiających prądy sinusoidalne są zawsze równe zeru [5]. Te własności mają również prądy m -fazowego odbiornika pobrane z n -fazowego generatora i wobec tego jest rzeczą oczywistą, że układ trzech faz odbiornika doprowadzanych z generatora czterofazowego można traktować jako układ prądu trójfazowego.

Konsekwentnie, układ dwóch faz odbiornika dwuzaciskowego przyłączony do generatora wielofazowego, np. trójfazowego, należy nazwać układem prądu dwufazowego. W literaturze technicznej jednak taki układ nazywa się zwykle prądem jednofazowym — prawdopodobnie dlatego, że stanowi właściwie jeden obwód. Do prądu jednofazowego w praktycznej elektrotechnice nie jest potrzebna interpretacja wektorowa, gdyż nie ma w nim dostrzegalnego w zastosowaniach przesunięcia fazowego.

W modelowaniu elektrycznym naprężeń będziemy traktować obwód dwubiegunowego odbiornika konsekwentnie jako układ prądu dwufazowego, jak

również będziemy stosowali do tego układu interpretację wektorową. Prąd dwufazowy przedstawiamy za pomocą dwóch wektorów równych co do wielkości lecz o przeciwnych zwrotach. Inaczej mówiąc przyjmujemy, że do jednego zacisku odbiornika doprowadzamy jeden prąd układu dwufazowego, a do drugiego zacisku — drugi taki sam prąd, lecz przesunięty w fazie o 180° .

W związku z przedstawieniem prądów wielofazowych za pomocą wektorów należy jeszcze zwrócić uwagę na pewną specyficzną cechę modelu elektrycznego, której na ogół nie mają zwykłe odbiorniki prądu wielofazowego. Odbiorniki te są połączone wewnątrz w gwiazdę lub wielobok, a punkt węzłowy gwiazdy lub boki wieloboku są punktami lub liniami, do których dopływają prądy wszystkich faz układu. Wektory reprezentujące prądy są zrównoważone, a zatem ich suma jest równa zeru. Suma momentów tych wektorów jest też równa zeru, ponieważ wszystkie wektory lub ich linie działania przecinają się w jednym punkcie.

W modelu elektrycznym natomiast wielofazowy układ prądów zmiennych jest doprowadzony nie do punktu węzłowego, lecz do pewnych miejsc obszaru płaskiego, w którym następuje spływ prądów wszystkich faz. W tym przypadku odbiornikiem jest cały obszar, który można nazwać obszarem węzłowym, a wektory prądów doprowadzonych do obszaru są związane nie z jednym punktem węzłowym, lecz z punktami przyłączenia prądu do obszaru. Wobec tego powinien być spełniony warunek znikania momentu układu wektorów. Warunek ten można jednak spełnić zawsze, ponieważ wszystkie wektory mogą być obrócone dokoła swych punktów zaczepienia o taki kąt, żeby ich linie działania przeszły przez jeden punkt. Jak wiadomo, obrót wektorów prądu następuje przy zmianie początku rachuby czasu.

4. Gęstość prądu

Prąd stały w przewodniku jest określony przez pole wektorowe gęstości prądu δ [4, 5, 6], czyli wektora, którego strumień przez dowolną powierzchnię jest równy prądowi I :

$$I = \int \delta \, ds.$$

Zgodnie z tą definicją prąd stały jest wielkością skalarną, a gęstość prądu jest wektorem, który ma ten sam kierunek co wektor pola elektrycznego \mathbf{E} w przewodniku o przewodności właściwej γ :

$$\delta = \gamma \mathbf{E}.$$

Pole elektryczne prądu stacjonarnego jest polem potencjalnym, tak iż natężenie \mathbf{E} tego pola może być wyrażone jako gradient potencjału Φ :

$$\mathbf{E} = - \text{grad} \Phi.$$

Pojęcie gęstości prądu, wprowadzone do rozważań nad rozkładem prądu stacjonarnego w przewodniku, nie daje się bezpośrednio zastosować do przy-

padku prądu zmiennego. Wynika to chociażby z układu równań Maxwella dla prądów quasi-stacjonarnych:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\delta}, & \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, & \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi\boldsymbol{\sigma}; \\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H}, & \mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E},\end{aligned}$$

gdzie \mathbf{H} oznacza natężenie pola magnetycznego, \mathbf{B} indukcję magnetyczną, \mathbf{E} natężenie pola elektrycznego, \mathbf{D} indukcję elektryczną, $\boldsymbol{\delta}$ gęstość prądu, $\boldsymbol{\sigma}$ gęstość ładunków elektrycznych, μ przenikalność magnetyczną i ε przenikalność dielektryczną ośrodka.

Przyjmując istnienie potencjału wektorowego \mathbf{A} pola magnetycznego, $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, otrzymujemy

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A},$$

czyli

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Wyrażenie w nawiasie jest więc polem bezwirowym o pewnym potencjale Φ . Można je przedstawić jako gradient potencjału

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\Phi,$$

skąd

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

Obecność pochodnej potencjału wektorowego w tym wyrażeniu świadczy o tym, że pole elektryczne prądów quasi-stacjonarnych, a tym samym i pole gęstości prądu zmiennego, nie jest polem potencjalnym.

W przypadku prądów zmiennych gęstość prądu nie jest wektorem tak jak w przypadku prądu stałego, lecz wielkością fizyczną o innym charakterze, który wyjaśnimy w toku dalszych rozważań.

Najprostszym przykładem prądu jest prąd w pręcie przewodzącym o stałym przekroju. Jeżeli jest to prąd stały, to gęstość prądu $\boldsymbol{\delta}$ otrzymamy dzieląc prąd I przez pole przekroju S prostopadłego do osi pręta:

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{I}{S}.$$

Tak postępujemy w praktycznej elektrotechnice chcąc obliczyć np. gęstość prądu w przewodach sieci lub maszyn elektrycznych, przy czym zupełnie ginie wektorowy charakter gęstości prądu. W elektrotechnice teoretycznej natomiast

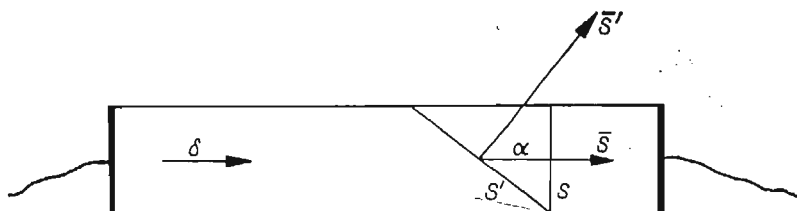
ważniejsza jest zależność odwrotna, która pozwala określić prąd I jako iloczyn skalarny wektora gęstości prądu i wektora powierzchni przekroju

$$I = \delta \cdot \mathbf{S}$$

albo

$$I = \delta S \cos \alpha.$$

Na rysunku 1 przedstawiono pręt wykonany z materiału przewodzącego o przewodności właściwej znacznie mniejszej niż przewodność metalowych elektrod przyłączonych do czołowych powierzchni pręta. Ze względu na symetrię



Rys. 1

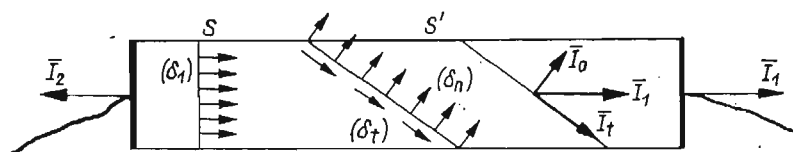
gęstość prądu δ jest wszędzie jednakowa i skierowana wzdłuż osi pręta. Przez przekrój prostopadły do jego osi płynie prąd $I = \delta \cdot \mathbf{S} = \delta S \cos 0^\circ = \delta S$.

Przez przekrój nachylony S' , którego normalna tworzy kąt α z osią pręta, płynie prąd $I' = \delta \cdot \mathbf{S}' = \delta S' \cos \alpha$, ale ponieważ $S' = S / \cos \alpha$, więc

$$I' = \delta \frac{S}{\cos \alpha} \cos \alpha = \delta S = I.$$

Wynik ten można było przewidzieć z góry, ponieważ przez dowolny przekrój prostopadły lub ukośny płynie ten sam prąd I .

W drugim przypadku przedstawionym na rys. 2 do tego samego pręta przyłączony jest prąd zmienny dwufazowy \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 . Jeżeli chcemy wyznaczyć prąd w przecie w ten sam sposób jak poprzednio, tj. jako iloczyn gęstości



Rys. 2

prądu i przekroju, to musimy przyjąć (jak to wykażemy w następnym punkcie), że gęstość prądu jest tensorem, który działając na wektor powierzchni \mathbf{S} daje wektor \mathbf{I} :

$$(\delta) \cdot \mathbf{S} = \mathbf{I}.$$

W przekroju prostopadłym do osi pręta ($\alpha = 0$) mamy tylko składową normalną tensora, który oznaczamy przez δ_1 . W tym przypadku prąd zmienny może być wyrażony wzorem

$$\delta_1 \mathbf{S} = \mathbf{I}.$$

W przekroju nachylonym S' gęstość prądu powinna być taką wielkością, która pomnożona przez przekrój daje dwie składowe prądu zmiennego $\mathbf{I} = \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_t$. Wobec tego w przekroju nachylonym należy uwzględnić dwie wartości gęstości prądu: δ_n dla składowej \mathbf{I}_n normalnej do przekroju S , oraz gęstość prądu δ_t dla składowej \mathbf{I}_t stycznej do przekroju

$$\delta_n S' = \mathbf{I}_n, \quad \delta_t S' = \mathbf{I}_t.$$

Ponieważ

$$|S'| = \frac{S}{\cos \alpha}, \quad |\mathbf{I}_n| = I \cos \alpha, \quad |\mathbf{I}_t| = I \sin \alpha,$$

więc posługując się wartościami bezwzględными otrzymujemy ostatecznie

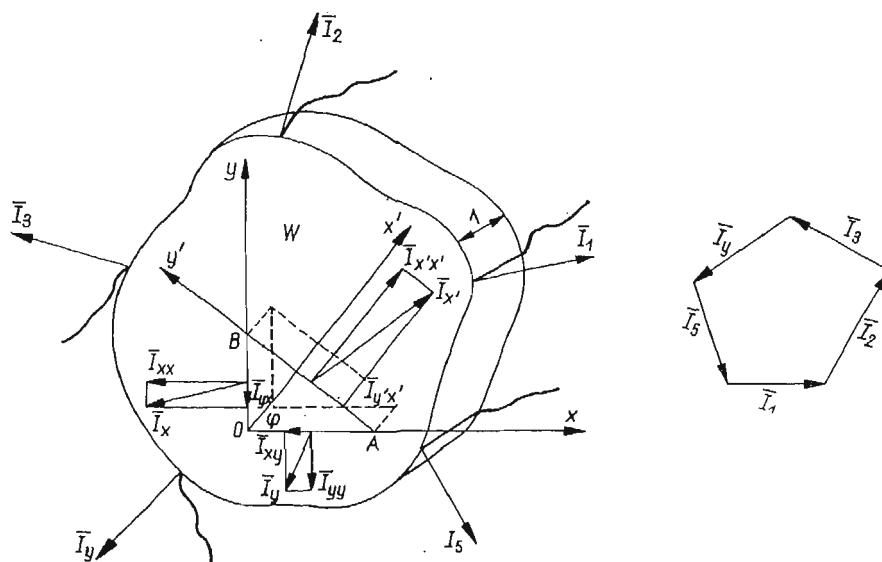
$$\delta_n = \delta_1 \cos^2 \alpha, \quad \delta_t = \delta_1 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Składowa normalna δ_n gęstości prądu zmiennego jest największa w przekroju prostopadłym do osi pręta, $\alpha = 0$, gdzie równa się δ_1 ; wartość tę można nazwać wartością główną gęstości prądu zmiennego. W przekroju równoległym do osi pręta $\delta_n = 0$, ponieważ $\alpha = 90^\circ$. Składowa styczna gęstości prądu zmiennego δ_t staje się równa zero dla przekroju prostopadłego, $\alpha = 0$, i dla przekroju równoległego, $\alpha = 90^\circ$, do osi pręta. Wartość największą składowa styczna osiąga wtedy, gdy $\cos \alpha = \sin \alpha$, czyli dla $\alpha = 45^\circ$.

5. Tensor gęstości prądu zmiennego

Gęstość prądu zmiennego jest wielkością tensorową. Żeby to wykazać, rozpatrujemy gęstość prądu zmiennego w przewodniku płaskim, tj. w takim przewodniku, którego jeden wymiar (grubość) jest znacznie mniejszy niż dwa pozostałe. Zakładamy, że prądy zmienne układu wielofazowego są doprowadzone do różnych punktów obwodu przewodnika płaskiego (płytki), przy czym wektory prądu zmiennego są w stanie równowagi, czyli suma ich rzutów na dowolną oś jest równa zero i suma momentów względem dowolnego punktu jest również równa zero. Można przyjąć, że gęstość w kierunku prostopadłym do powierzchni płytki jest równa zero, tak iż wszystkie kierunki prądów są równoległe do powierzchni płytki. Poza tym dla uproszczenia obliczeń można założyć, że grubość płytki jest równa jedności, tak iż do rozważań wystarcza płaski układ współrzędnych x, y (rys. 3).

Wykonujemy teraz w płytce szczelinę wzdłuż odcinka OA . Obecność szczeliny spowoduje przerwanie prądu między częścią płytki znajdującą się bezpośrednio pod odcinkiem OA i częścią położoną tuż nad nim. Aby przywrócić pierwotny stan elektryczny w części znajdującej się nad szczeliną OA , należy przyłożyć do ścianki szczeliny elektrodę i doprowadzić przez nią prąd taki sam, jaki był w tym miejscu przed wykonaniem szczeliny. O tym prądzie wiadomo na pewno, że jest prądem zmiennym sinusoidalnym, ponieważ został on wywołany przez sinusoidalne prądy zmienne doprowadzone z zewnątrz, przy czym jego częstotliwość jest taka sama jak częstotliwość prądów doprowadzonych, a przesunięcie fazowe jest funkcją punktu O szczeliny.



Rys. 3

Zgodnie z rozważaniami z poprzedniego punktu przyjmujemy, że na powierzchni szczeliny przy samej elektrodzie istnieją takie składowe gęstości prądu zmiennego, normalna δ_n i styczna δ_t , które pomnożone przez pole przekroju szczeliny OA dają prąd zmienny \mathbf{I} .

Rozważania przeprowadzamy dla nieskończenie bliskiego otoczenia punktu O . Jeżeli pominiemy wielkości nieskończenie małe wyższego rzędu, to możemy przyjąć, że gęstość prądu na nieskończenie małym odcinku OA (lub raczej na powierzchni $OA \cdot 1$) jest wszędzie jednakowa. Można więc tak samo jak w poprzednim p. wyrazić prąd przez gęstości prądu.

Składowa normalna prądu posiada kierunek osi y i odnosi się do odcinka prostopadłego do osi y :

$$I_{yy} = \delta_{yy} OA.$$

Składowa styczna ma kierunek osi x i odnosi się do odcinka prostopadłego do osi y

$$I_{xy} = \delta_{xy} OA.$$

Prąd zmienny, jaki powinien być doprowadzony do odcinka OA (prostopadłego do osi y), jest sumą tych prądów składowych:

$$I_y = I_{yy} + I_{xy}.$$

Jeżeli wykonamy teraz drugą szczelinę OB prostopadle do osi x , to prąd, jaki powinien być doprowadzony do jej ścianki wewnętrznej, będzie równy

$$I_x = I_{xx} + I_{yx}.$$

Składowe tego prądu, otrzymane w sposób podobny jak składowe prądu \mathbf{I}_y , mają wartości wyrażone przez gęstości prądu zmiennego

$$\mathbf{I}_{xx} = \delta_{xx} \mathbf{OB}, \quad \mathbf{I}_{yx} = \delta_{yx} \mathbf{OB}.$$

Wykonajmy jeszcze szczelinę AB kończąc w ten sposób wycięcie z danej płytki prostopadłościanu o podstawie trójkątnej AOB . Na ścianie AB wyznaczamy kierunek normalny x' i kierunek styczny y' .

Według przyjętej konwencji znakowania wyznaczamy prąd zmienny, jaki należy doprowadzić do ścianki AB , aby utrzymać w wyciętym prostopadłościanie pierwotny rozkład prądów:

$$\mathbf{I}_{x'} = \mathbf{I}_{x'x'} + \mathbf{I}_{y'x'}.$$

Wyrażamy składowe prądu $\mathbf{I}_{x'}$ przez odpowiednie gęstości prądu

$$\mathbf{I}_{x'x'} = \delta_{x'x'} \mathbf{AB}, \quad \mathbf{I}_{y'x'} = \delta_{y'x'} \mathbf{AB}.$$

W rezultacie dokonanego wycięcia w płytce otrzymaliśmy nieskończenie mały obszar węzłowy AOB , do którego doprowadzony jest prąd zmienny trójfazowy $\mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y, \mathbf{I}_{x'} \dots$. W obszarze tym został zachowany taki sam stan elektryczny, jaki istniał w nim przed dokonaniem wycięcia.

Chcemy teraz wyrazić składowe prądu $\mathbf{I}_{x'}$ przez składowe prądów $\mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y$. Niech l, m oznaczają kosinusy kierunkowe osi x' . Rzutując wektory na oś x' otrzymujemy równanie wartości bezwzględnych

$$I_{x'x'} - I_{xx}l + I_{yx}m + I_{xy}l - I_{yy}m = 0,$$

$$I_{y'x'} - I_{xx}m - I_{yx}l + I_{xy}m - I_{yy}l = 0.$$

Podstawiając do tych równań prądy wyrażone przez gęstości prądu zmiennego otrzymamy

$$\delta_{x'x'} \mathbf{AB} = \delta_{xx} \mathbf{OBl} - \delta_{yx} \mathbf{OBm} - \delta_{xy} \mathbf{OAl} + \delta_{yy} \mathbf{OAm},$$

$$\delta_{y'x'} \mathbf{AB} = \delta_{xx} \mathbf{OBm} + \delta_{yx} \mathbf{OBl} - \delta_{xy} \mathbf{OAm} - \delta_{yy} \mathbf{OAl}.$$

Jeżeli podzielimy te równania przez AB i uwzględnimy, że $OA/AB = m$ oraz $OB/AB = l$, to otrzymamy zależności między gęstościami prądu zmiennego i kosinusami kierunkowymi:

$$\delta_{x'x'} = \delta_{xx} l^2 - \delta_{yx} lm - \delta_{xy} lm + \delta_{yy} m^2,$$

$$\delta_{y'x'} = \delta_{xx} lm + \delta_{yx} l^2 - \delta_{xy} m^2 + \delta_{yy} lm.$$

Wyrażenia te podają prawo transformacji składowych tensora przy przejściu z układu współrzędnych x, y do układu współrzędnych x', y' , który został obrócony tak, że oś x' tworzy z osiami x, y kąty o kosinusach kierunkowych l, m .

Wprowadzając nowe oznaczenia

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad l = l_{1n}, \quad m = l_{2n}, \quad x' = n, \quad y' = \eta,$$

$$\delta_{xx} = \delta_{11}, \quad \delta_{yx} = \delta_{21}, \quad \delta_{xy} = \delta_{12}, \quad \delta_{yy} = \delta_{22},$$

możemy napisać powyższe wzory w ogólnie przyjętej postaci tensorowej:

$$\delta_{nn} = \sum_{r=1}^{r=2} \sum_{s=1}^{s=2} \delta_{rs} l_{rn} l_{sn},$$

$$\delta_{nn} = \sum_{r=1}^{r=2} \sum_{s=1}^{s=2} \delta_{rs} l_{r\eta} l_{s\eta}.$$

Tensor gęstości prądu zmiennego jest tensorem symetrycznym, czyli $\delta_{rs} = \delta_{sr}$. Dla przeprowadzenia dowodu należy uwzględnić omówiony w poprzednim rozdziale warunek równowagi momentów wektorów prądu zmiennego. Prąd zmienny trójfazowy, doprowadzony do trójkątnego prostopadłościanu AOB (rys. 1) spełnia ten warunek, ponieważ według założenia prądy zmienne wielofazowe $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_n$ doprowadzone do obszaru węzłowego W mają takie przesunięcia fazowe, że suma momentów wektorów prądów zmiennych względem dowolnego punktu jest równa zero.

Ponieważ można przyjąć, że na nieskończenie małych ściankach trójkątnego prostopadłościanu gęstości prądu są rozłożone równomiernie, to można również założyć, że punkty zaczepienia wektorów prądu leżą na środkach boków trójkąta. W trójkącie prostokątnym AOB symetralne boków OA i OB przecinają się w środku trzeciego boku BA . Środek ten bierzemy jako punkt, względem którego obliczamy momenty wektorów prądu. Przez punkt ten przechodzą linie działania wszystkich składowych normalnych $\mathbf{I}_{xx}, \mathbf{I}_{yy}, \mathbf{I}_{x'x'}$ oraz składowa styczna $\mathbf{I}_{y'x'}$, a więc momenty tych czterech składowych są równe zero.

Momenta względem środka boku AB dają tylko składowe styczne \mathbf{I}_{xy} i \mathbf{I}_{yx} prądów zmiennych doprowadzonych do boków OA i OB . Równanie równowagi momentów ma postać

$$-\delta_{xy} \cdot \mathbf{OA} \cdot \frac{\mathbf{OB}}{2} + \delta_{yx} \cdot \mathbf{OB} \cdot \frac{\mathbf{OA}}{2} = 0,$$

czyli

$$\delta_{xy} = \delta_{yx},$$

co dowodzi, że tensor gęstości prądu jest tensorem symetrycznym. Z rachunku tensorowego wiadomo, że tensor symetryczny posiada w przypadku płaskim dwie ekstremalne wartości składowych normalnych: największą δ_1 i najmniejszą δ_2 .

Wprowadzamy nowy układ współrzędnych, w których oś x ma kierunek zgodny z kierunkiem występowania maksimum gęstości prądu δ_1 , a oś y ma kierunek odpowiadający minimum gęstości prądu δ_2 . Składowe normalne i styczne gęstości prądu zmiennego w tym układzie współrzędnych są wyrażone równaniami:

$$\delta_n = \delta_1 l_1^2 + \delta_2 l_2^2, \quad \delta_t = (\delta_1 - \delta_2) l_1 l_2.$$

Umieścimy w punkcie O (w początku układu współrzędnych) bardzo małą i bardzo cienką płytkę o powierzchni S (możemy np. wyobrazić sobie, że cały

ośrodek przewodzący jest cieczą, a płytka jest wykonana z materiału o takiej przewodności właściwej, jaką ma ciecz — wówczas obecność płytki w naczyniu nie naruszy stanu elektrycznego ośrodka). Jeżeli płytka jest prostopadła do osi x , tzn. kierunku jej normalnej i osi x są zgodne, to przez płytkę płynie prąd $\mathbf{I}_1 = \delta_1 \mathbf{S}$.

Po ustawieniu płytki prostopadle do osi y płynie przez nią prąd zmienny $\mathbf{I}_2 = \delta_2 \mathbf{S}$ przesunięty w fazie o 90° . Przez płytkę nachyloną dowolnie, której normalna ma kosinusy kierunkowe l_1 i l_2 , płynie prąd zmienny \mathbf{I} przesunięty w fazie o kąt na ogół inny niż kąt nachylenia płytki; lecz zależny od tego kąta. Wektor prądu \mathbf{I} możemy rozłożyć na dwie składowe, normalną \mathbf{I}_n i styczną \mathbf{I}_t , których wartości bezwzględne otrzymamy mnożąc równania gęstości prądu przez \mathbf{S} :

$$\delta_n S = \delta_1 l_1^2 S + \delta_2 l_2^2 S, \quad \delta_t S = (\delta_1 - \delta_2) l_1 l_2 S.$$

Składowe prądu zmiennego I są więc wyrażone wzorami

$$I_n = I_1 l_1^2 + I_2 l_2^2, \quad I_t = (I_1 - I_2) l_1 l_2.$$

Wektor prądu I można rozłożyć na kierunki osi x i y . Składowe wzdłuż tych osi mają wartość

$$I_x = I_n l_1 + I_t l_2, \quad I_y = I_n l_2 - I_t l_1.$$

Podstawiając odpowiednie wielkości I_n i I_t otrzymamy nowe równania

$$I_x = (I_n l_1^2 + I_t l_2^2) l_1 + (I_1 - I_2) l_1 l_2 l_2,$$

$$I_y = (I_n l_1^2 + I_t l_2^2) l_2 - (I_1 - I_2) l_1 l_2 l_1,$$

które po uwzględnieniu równości $l_1^2 + l_2^2 = 1$ i uproszczeniu przyjmują postać $I_x = I_1 l_1$, $I_y = I_2 l_2$. Z równań tych otrzymujemy po wyrugowaniu l_1 , l_2 równanie elipsy

$$\frac{I_x^2}{I_1^2} + \frac{I_y^2}{I_2^2} = 1.$$

Z powyższych równań wynika, że przy obracaniu płytki S w każdym jej położeniu przepływa przez nią prąd zmienny o takiej wartości i takim przesunięciu fazy, że koniec wektora tego prądu zakreśla elipsę. Równanie tej elipsy można również otrzymać na innej drodze w wyniku rozważań nad stanem elektrycznym ośrodka przewodzącego prąd zmienny wielofazowy.

Pod wpływem prądów zmiennych i_1 , i_2 , i_3 układu wielofazowego, doprowadzonych do płaskiego przewodnika, powstaje w nim zmienne pole elektryczne, a ściślej pole prądu elektrycznego. Jeżeli częstotliwość prądów $f = \omega/2\pi$ nie jest bardzo wielka, to można pominąć prądy przesunięcia Maxwella i traktować pole jako quasi-stacjonarne, które w każdej rozważanej chwili t jest polem potencjalnym. Potencjał pola w każdym punkcie przewodnika można obliczyć stosując metodę obliczania pojemności wielofazowej linii napowietrznej lub kablowej, istnieje bowiem ścisła analogia między ładunkiem $Q = CU$ w polu elektrostatycznym a prądem $I = \gamma U$ w polu elektrycznym prądu [5].

Wobec liniowej zależności potencjału w danym punkcie od prądów (ładunków) można — stosując zasadę superpozycji — wyrazić potencjał p wzorem

$$p = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + \dots,$$

w którym a_1, a_2, a_3, \dots są współczynnikami zależnymi tylko od współrzędnych wybranego punktu.

Gradient potencjału (i proporcjonalna do niej gęstość prądu) określony jest pochodną cząstkową potencjału w kierunku normalnej n do linii ekwipotencjalnej przechodzącej przez punkt M .

Składowe gradientu potencjału w kierunku osi x i y mają postać

$$\text{grad}_x p = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial a_1}{\partial x} i_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x} i_2 + \dots,$$

$$\text{grad}_y p = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial a_1}{\partial y} i_1 + \frac{\partial a_2}{\partial y} i_2 + \dots$$

Podstawiając

$$i_1 = I_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$i_2 = I_2 \sin(\omega t + \varphi_2),$$

$$\dots$$

$$i_n = I_n \sin(\omega t + \varphi_n)$$

otrzymamy na $\text{grad}_x p$ wzór

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = & \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} I_1 \cos \varphi_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x} I_2 \cos \varphi_2 + \dots \right) \sin \omega t + \\ & + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} I_1 \sin \varphi_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x} I_2 \sin \varphi_2 + \dots \right) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Wyrażenia w nawiasach są tylko funkcjami położenia rozważanego punktu $M(x, y)$. Oznaczając je przez $A_1(x, y)$ i $A_2(x, y)$ możemy składową gradientu potencjału na osi x wyrazić równaniem

$$\text{grad}_x p = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t.$$

W podobny sposób otrzymujemy składową gradientu w kierunku osi y :

$$\text{grad}_y p = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t.$$

Znając te składowe możemy wyznaczyć gradient potencjału w dowolnym kierunku tworzącym z osią x kąt φ . Przez pomnożenie obu stron równania przez przewodność właściwą γ otrzymujemy składowe gęstości prądu w kierunku osi x i y :

$$\delta_x = \gamma A_1 \sin \omega t + \gamma A_2 \cos \omega t,$$

$$\delta_y = \gamma B_1 \sin \omega t + \gamma B_2 \cos \omega t.$$

Po wyrugowaniu zmiennej ωt otrzymujemy równanie elipsy:

$$\delta_x^2 (B_1^2 + B_2^2) - 2(A_1 B_1 + A_2 B_2) \delta_x \delta_y + \delta_y^2 (A_1^2 + A_2^2) - \gamma^2 (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 = 0.$$

Elipsę tę możemy uważać za linię, którą zakreśla koniec wirującego wektora wartości chwilowej gęstości prądu. Można wykazać, że taki wirujący wektor jest równoważny rozpatrzonemu wyżej tensorowi gęstości prądu.

Tak więc gęstość prądu zmiennego w obszarze węzłowym, do którego doprowadzono prądy zmiennie wielofazowe, jest tensorem o walencji 2.

Równania wiążące ze sobą składowe tensora gęstości prądu zmiennego otrzymuje się z rozważań równowagi elektrycznej dla każdego punktu obszaru węzłowego. Warunek równowagi powinien jednak być spełniony nie tylko dla punktu, ale i dla każdego skończonego obszaru ograniczonego powierzchnią zamkniętą, obejmującą badany punkt. Warunek taki podaje prawo Kirchhoffa, które dla obszaru bezźródłowego ma postać

$$\iint (\delta) d\mathbf{S} = 0.$$

Na podstawie twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego równanie to można przekształcić:

$$\iiint \text{Div}(\delta) dv = 0$$

otrzymując w ten sposób bezpośrednio

$$\text{Div}(\delta) = 0.$$

Równanie to napisane w postaci rozwiniętej rozpada się na dwa równania różniczkowe:

$$\frac{\partial \delta_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \delta_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta_{yy}}{\partial y} = 0.$$

Na granicy obszaru węzłowego są miejsca (powierzchnie) leżące bezpośrednio pod elektrodami, przez które wprowadza się prądy zmiennie do obszaru, oraz miejsca wolne od elektrod. W miejscach powierzchni wolnych od elektrod prąd przepływać może jedynie w kierunku stycznym do granicy obszaru, składowe normalne zaś są równe zero, $\delta_n = 0$, wobec czego na brzegach obszaru wolnych od elektrod elipsa gęstości prądu zmiennego degeneruje się do odcinka. W miejscach przyłożenia elektrod mogą natomiast istnieć tak składowe normalne gęstości prądu zmiennego jak i składowe styczne, a ich wzajemny stosunek decyduje o różnicy między fazami prądów zmiennych doprowadzonych do poszczególnych elektrod.

Prądy zmiennie doprowadzone do obszaru węzłowego powinny spełniać warunek równowagi wektorów, co już było omówione poprzednio. Wydaje się celowe wyrażenie tego warunku w oparciu o fakt, że suma prądów chwilowych układu wielofazowego jest zawsze równa zero (prawo Kirchhoffa dla prądów chwilowych). Skorzystamy w tym celu z rachunku symbolicznego dla prądów doprowadzonych do obszaru płaskiego.

Prądy chwilowe mają następującą postać symboliczną:

$$\begin{aligned}\hat{i}_1 &= I_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}, \\ \hat{i}_2 &= I_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \hat{i}_n &= I_n e^{j(\omega t + \varphi_n)}.\end{aligned}$$

Sumując prądy chwilowe otrzymujemy

$$\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \dots + \hat{i}_n = e^{j\omega t} (I_1 e^{j\varphi_1} + I_2 e^{j\varphi_2} + \dots + I_n e^{j\varphi_n}) = 0.$$

Ponieważ $e^{j\omega t}$ jest funkcją czasu, więc równe zero może być tylko wyrażenie zawarte w nawiasie, które z kolei będąc wielkością zespoloną może być równe zero tylko wtedy, gdy są spełnione jednocześnie dwa równania

$$\begin{aligned}I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2 + \dots + I_n \cos \varphi_n &= 0, \\ I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2 + \dots + I_n \sin \varphi_n &= 0.\end{aligned}$$

Omówione warunki brzegowe w miejscach przyłożenia elektrod i w miejscach wolnych obszaru węzłowego są spełnione zawsze, gdyż wynikają z podstawowych praw elektrotechniki.

6. Analogie elektryczne tensora naprężenia

Podstawowym pojęciem teorii sprężystości jest tensor naprężenia, który charakteryzuje stan naprężenia w ciele poddanym działaniu sił. Tensor naprężenia dla zagadnienia płaskiego przedstawić można w postaci macierzowej:

$$\tau = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{Bmatrix}.$$

Prawo przekształcenia składowych tensora dla dowolnej ścianki o normalnej n można wyrazić w zwartej postaci; np. składową normalną przedstawia wzór:

$$\tau_{nn} = \sum_{i=1}^{i=2} \sum_{k=1}^{k=2} \tau_{ik} l_{in} l_{kn}.$$

Wiadomo z teorii sprężystości, że tensor naprężenia jest symetryczny, czyli że $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Warunek równowagi statycznej (bez uwzględnienia sił masowych) wyraża równanie tensorowe

$$\text{Div } \tau = 0,$$

które w postaci rozwiniętej rozpada się na dwa równania różniczkowe:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Układ sił działających na ciało jest w równowadze wtedy, gdy suma ich momentów względem dowolnego punktu jest równa zero oraz gdy rzuty ich na trzy liniowo niezależne kierunki są równe zero.

Dla układu płaskiego warunek równowagi rzutów wyrażają równania, w któ-

rych F_i oznaczają siły, a φ_i — kąty zawarte między kierunkami ich działania a osią x :

$$\begin{aligned} F_1 \cos \varphi_1 + F_2 \cos \varphi_2 + \dots + F_n \cos \varphi_n &= 0, \\ F_1 \sin \varphi_1 + F_2 \sin \varphi_2 + \dots + F_n \sin \varphi_n &= 0. \end{aligned}$$

Z pobieżnego zestawienia równań obowiązujących w teorii sprężystości i porównania ich z odpowiednimi równaniami z poprzedniego rozdziału widać od razu, że istnieje pełna analogia między stanem naprężenia w ciele poddanym działaniu sił a stanem elektrycznym obszaru węzłowego prądów zmiennych wielofazowych. W szczególności siłom odpowiadają prądy zmienne, a naprężeniom — gęstości prądu zmiennego, tak iż analogia jest zachowana nie tylko wewnątrz obszarów ale i na brzegach. Dla zbadania stanu naprężeń w ciele obciążonym można wykonać geometrycznie podobny model i doprowadzić do niego prądy zmienne o natężeniu proporcjonalnym do sił i o przesunięciach fazowych równych odpowiednim kątom nachylenia sił przyłożonych do badanego ciała. Mierzac gęstości prądu zmiennego w poszczególnych punktach modelu znajdujemy wielkości proporcjonalne do naprężeń w odpowiednich punktach ciała obciążonego siłami.

W teorii sprężystości doniosłe znaczenie ma funkcja naprężeń Airy'ego, która spełnia równanie biharmoniczne

$$\Delta \Delta \varphi = 0.$$

Łatwo można wykazać, że analogiem funkcji naprężeń jest potencjał wektorowy, który w przypadku płaskim prądu zmiennego również spełnia podobne równanie

$$\Delta \Delta A = 0.$$

Składowe gęstości prądu zmiennego można wyrazić za pomocą potencjału wektorowego

$$\delta_{xx} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad \delta_{yy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad \delta_{xy} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y},$$

a składowe tensora naprężenia za pomocą funkcji naprężeń:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

7. Analogia elektryczna zasady Saint-Venanta

Według zasady Saint-Venanta naprężenia w miejscach oddalonych od punktu przyłożenia obciążenia do ciała nie zależą w sposób istotny od rozkładu tego obciążenia w bezpośrednim otoczeniu punktu, a jedynie od jego wypadkowej, wobec czego np. siłę skupioną można w pewnych przypadkach zastąpić obciążeniem rozłożonym na pewnej niewielkiej powierzchni obejmującej punkt przyłożenia siły.

Funkcje opisujące stan naprężenia nie mają pochodnej w punkcie przyłożenia siły skupionej, a same naprężenia w otoczeniu tego punktu są nieograniczone. Ponieważ jednak z jednej strony rzeczywista struktura materiału nie pozwala na nieograniczony wzrost naprężeń bez zniszczenia elementu, z drugiej strony praktyka wymaga rozpatrywania układów obciążonych siłami skupionymi, to zasada Saint-Venanta pozwala na rozważanie takich układów z uwzględnieniem pewnych poprawek w pobliżu punktów przyłożenia sił. Zasada Saint-Venanta nie podaje co prawda żadnego ścisłego przepisu, lecz głosi tylko, że w miejscach dostatecznie oddalonych od punktów przyłożenia sił poprawki wniesione w otoczeniu tych punktów nie prowadzą na ogół do wypaczenia rzeczywistego obrazu rozkładu naprężeń.

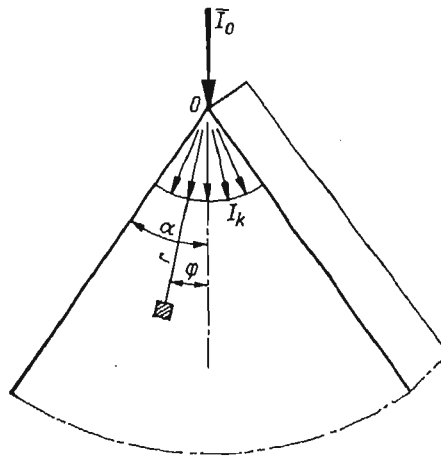
Zasada Saint-Venanta obowiązuje w całej pełni również w elektrotechnice i chociaż w tej dziedzinie nie została oddzielnie sformułowana i nazwana, tym niemniej jednak jest zawsze uznawana i stosowana jako zrozumiała samo przez się reguła praktyczna. Chodzi o to, że w rozważaniach teoretycznych często przyjmujemy istnienie punktowego przyłączenia prądu, lecz jednocześnie zdajemy sobie sprawę z tego, że w takim punkcie gęstość prądu byłaby nieskończenie wielka, a więc wydzielające się w nim ciepło Joule'a doprowadziłoby do natychmiastowego wyparowania przewodnika w otoczeniu punktu. Ten wniosek teoretyczny nie przeszkadza jednak bynajmniej w praktycznej realizacji takiego układu, ponieważ w praktyce zastępujemy punkt pewną powierzchnią, do której doprowadzamy prąd o gęstości dopuszczalnej ze względu na rodzaj materiału, czas działania, stopień chłodzenia i inne warunki, wiedząc przy tym, że w miejscach dostatecznie oddalonych od elektrody gęstość prądu będzie miała wartości zgodne z wynikami teoretycznymi.

W zastosowaniu do prądów zmiennych wielofazowych zasada analogiczna do zasady Saint-Venanta wymaga uwzględnienia fazy prądu. Jeżeli mamy układ teoretyczny, do którego jest przyłączony w określonym punkcie prąd zmienny o danej fazie, to punkt ten można zastąpić jego otoczeniem i do poszczególnych miejsc tego otoczenia doprowadzić prądy o różnych amplitudach i fazach; suma geometryczna tych prądów składowych powinna być równa danemu prądowi zmiennemu tak co do amplitudy jak i fazy.

Jeżeli więc na modelu elektrycznym chcemy odtworzyć siłę skupioną, to najpierw rozkładamy ją na pewne siły składowe działające na otoczenie punktu zgodnie z zasadą Saint-Venanta, a następnie modelujemy siły składowe odpowiednimi prądami. Zasada Saint-Venanta pozwalająca na takie rozłożenie danego prądu pozostawia dużą swobodę wyboru liczby prądów składowych, ich faz, amplitud i miejsc przyłączenia w otoczeniu danego punktu, jednak w każdym przypadku warunki graniczne dają pewne wskazówki, jak należy dokonać rozkładu.

Dla zilustrowania zastosowania zasady Saint-Venanta rozważmy teoretyczny przypadek prądu zmiennego wielofazowego doprowadzonego do przewodnika płaskiego w kształcie klina nieskończonego. Jedna faza prądu zmiennego jest

doprowadzona do wierzchołka, a pozostałe fazy układu wielofazowego doprowadzone są do punktów klina nieskończenie odległych. Należy wyznaczyć gęstość prądu zmiennego w każdym punkcie obszaru klinowego. Zagadnienie to jest analogiczne do znanego zagadnienia teorii sprężystości, dotyczącego wyznaczenia naprężeń w nieskończonym klinie płaskim, obciążonym na ostrzu siłą skupioną (rys. 4).



Rys. 4

Rozważmy przewodnik płaski w kształcie nieograniczonego klina o grubości jednostkowej. Do wierzchołka O klina doprowadzamy prąd zmienny I_0 równomiernie rozłożony na jego grubości, tak że liniowa gęstość prądu jest stała i co do wartości liczbowej równa I_0 .

Gdyby prąd I_0 był prądem stałym, to gęstości prądu w każdym punkcie łuku zakreślonego z punktu O krzywizną promieniem r byłyby równe co do wielkości i skierowane wzdłuż promienia r , co wynika z symetrii układu. Gęstość prądu wynosiłaby $\delta = I_0/ra$. W przypadku prądu zmiennego gęstość prądu δ będzie również skierowana wzdłuż promienia r , lecz jej wielkość będzie funkcją nie tylko promienia r , ale i kąta φ , jaki tworzy promień z osią symetrii klina.

W celu wyznaczenia gęstości prądu zmiennego rozkładamy prąd I_0 na prądy składowe doprowadzone do poszczególnych części łuku zakreślonego małym promieniem dokoła krawędzi O klina. Przesunięcie fazy φ prądu składowego powinno być równe kątowi φ nachylenia wektora prądu względem osi symetrii. Cały klin możemy podzielić na kliny elementarne o wspólnym wierzchołku, w których płyną elementarne prądy składowe dI . Oznaczając przez δ gęstość prądu w odległości r od krawędzi O w klinie elementarnym $d\varphi$, odchylonym od osi symetrii o kąt φ , możemy wyznaczyć prąd składowy dI_φ w tym klinie.

Prąd dI_φ jest prądem przesuniętym w fazie względem prądu dI i jednocześnie może być potraktowany jako jedna ze składowych prądu dI_0 rozłożonego na

dwa kierunki wzajemnie prostopadłe: φ i $\varphi - \pi/2$. Taki rozkład zapewnia symetryczne rozmieszczenie prądów w obszarze klinowym 2φ . Mamy więc zależność:

$$dI\varphi = dI_0 \cos\varphi.$$

Wyrażając prądy przez gęstości prądu otrzymujemy równanie

$$rd\varphi\delta = rd\varphi\delta_0 \cos\varphi,$$

czyli

$$\delta = \delta_0 \cos\varphi;$$

δ_0 wyznaczyć możemy z warunku, że wypadkową wszystkich prądów zmiennych rozkładu jest dany prąd I_0 ,

$$\int_0^\alpha \delta r d\varphi \cos\varphi = I_0,$$

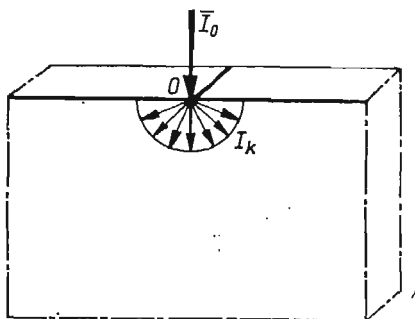
skąd

$$\int_0^\alpha \delta_0 \cos\varphi r d\varphi \cos\varphi = 2\delta_0 r \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha \right) = I_0$$

i ostatecznie

$$\delta_0 = \frac{I_0}{r \left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \right)}.$$

Ponieważ zaś $\delta = \delta_0 \cos\varphi$, to



Rys. 5

$$\delta = \frac{I_0 \cos\varphi}{r \left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \right)}.$$

Jeżeli kąt $\alpha = \pi/2$ (przypadek nieskończonej półpłaszczyzny, rys. 5), to gęstość prądu wzdłuż dowolnego kierunku φ wynosi

$$\delta = \frac{2I_0 \cos\varphi}{\pi r}.$$

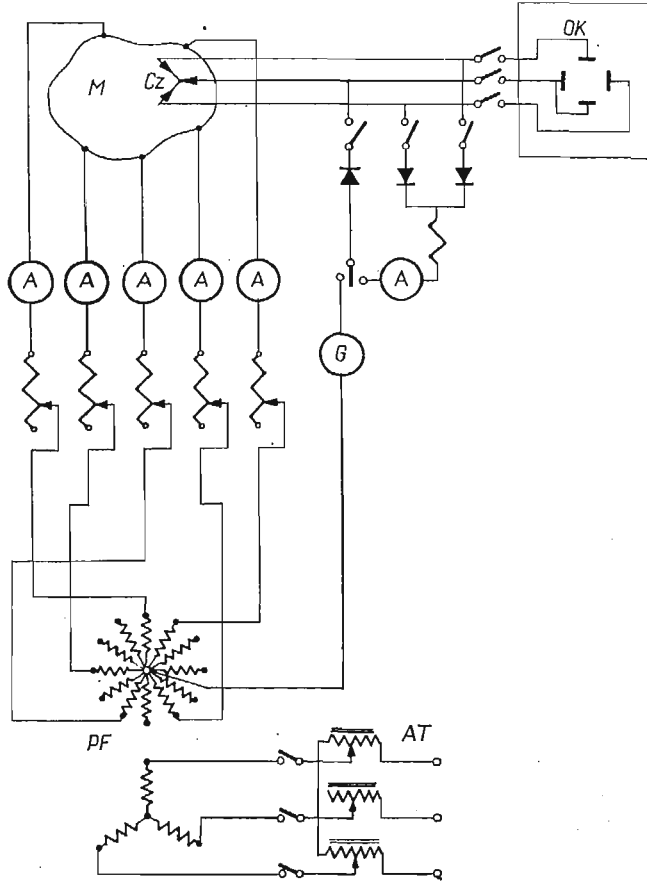
W teorii sprężystości otrzymujemy identyczne wzory wyrażające naprężenia σ_r wzdłuż promieni r tworzących kąt φ z osią

kłina obciążonego na wierzchołku siłą P .

8. Układ pomiarowy modelu elektrycznego naprężeń

W przypadku płaskiego stanu naprężenia sporządzamy model z płaskiego przewodnika stałego lub płynnego, np. z masy przewodzącej lub elektrolitu. Następnie przymocowujemy do jego brzegów elektrody i doprowadzamy do nich prądy zmienne wyregulowane w ten sposób, żeby ich przesunięcia fazowe

były równe odpowiednim kątom nachylenia sił, a natężenia (np. amplitudy, wartości skuteczne lub wartości średnie prądu) były proporcjonalne do odpowiednich sił. Za pomocą czujnika o trzech ostrzach ustawionych parami



Rys. 6

prostopadle do siebie badamy teraz poszczególne punkty modelu. Każda para ostrzy czujnika mierzy różnicę potencjałów między dwoma bardzo bliskimi punktami, a ponieważ odległość między ostrzami jest stała, więc wielkością mierzoną jest gradient potencjału w punkcie leżącym między ostrzami. Gęstość prądu w tym punkcie jest w każdej chwili proporcjonalna do gradientu potencjału, tak iż ostatecznym wynikiem pomiaru jest gęstość prądu zmiennego w danym punkcie, a więc pośrednio — naprężenia w odpowiednim punkcie oryginału.

Gęstość prądu w modelu elektrycznym można mierzyć w różnych układach pomiarowych, jednak najbardziej celowe wydaje się zastosowanie oscylografu katodowego. Przykład takiego układu pomiarowego jest przedstawiony schematycznie na rys. 6.

Zródłem prądów zmiennych wielofazowych jest przetwornica fazowa FR zasilona z sieci przez autotransformatory AT . Na rysunku przedstawiona jest przetwornica w postaci silnika asynchronicznego z zatrzymanym wirnikiem, choć oczywiście źródłem prądów wielofazowych może być inny odpowiedni układ, np. sztuczna linia długa półfalowa. Prądy każdej fazy przyłączonej do modelu M są regulowane za pomocą oporników A . W badanym punkcie modelu ustawiony jest czujnik Cz , którego dwa skrajne ostrza są połączone z płytkami odchylenia poziomego i pionowego lampy oscylografu katodowego OK , a ostrze środkowe jest połączone z płytkami uziemionymi lampy. Na ekranie lampy oscylografu zjawia się elipsa, która jest obrazem elipsy naprężeń oryginału.

Analiza tej elipsy dostarcza ważnych informacji o naprężeniach w badanym punkcie. Osie główne elipsy są proporcjonalne do naprężeń głównych σ_1, σ_2 , a jej kąt nachylenia względem układu współrzędnych prostokątnych, wyznaczonego przez trzy ostrza czujnika, jest równy kątowi nachylenia osi elipsy naprężeń względem tych samych osi związanych z oryginałem.

Ustawiając czujnik w różnych punktach modelu otrzymujemy na ekranie elipsy o różnych kształtach, wymiarach i nachyleniach osi. Czujnik można prowadzić po modelu w ten sposób, aby obydwie pary ostrzy były zawsze równoległe do ustalonych osi współrzędnych i aby kąt nachylenia osi różnych elips był stały; wtedy czujnik zakreśli na modelu linię stałego nachylenia naprężeń głównych, a więc izoklinę.

Bardzo łatwo znaleźć można za pomocą czujnika takie punkty, w których elipsa staje się kołem; są to punkty, w których w oryginale występują naprężenia hydrostatyczne.

W układzie pomiarowym przewidziane są jeszcze prostowniki pozwalające zmierzyć sumę średnich wartości prądów dwóch skrajnych ostrzy czujnika. Suma tych średnich wartości jest proporcjonalna do sumy gradientów potencjałów w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, przy czym dla każdego punktu suma ta jest stała, niezależna od kierunku osi współrzędnych czujnika. Przesuwając czujnik po modelu można znaleźć punkty, w których suma ta zachowuje wartość stałą. Jeżeli punkty te połączymy ze sobą, to otrzymamy linię równych wartości sumy naprężeń normalnych w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, czyli izopachę. Jak wiadomo, izopachy są liniami ekwipotencjalnymi, ponieważ

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Literatura cytowana w tekście

- [1] N. J. BIEZUCHOW, *Teoria sprężystości i plastyczności*, 1957.
- [2] J. T. PINDERA, *Zarys elastooptyki*, 1953.
- [3] R. ZIMMERMANN, *Pomiary naprężeń i drgań metodami elektryczności*, 1959.
- [4] J. E. TAMM, *Основы теории электричества*, 1954.
- [5] K. KUPFMÜLLER, *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, tłum. ros., 1960.

- [6] J. WEYSSENHOFF, *Zasady elektromagnetyki i optyki klasycznej*, 1957.
 [7] В.А. Говорков, *Электрические и магнитные поля*, 1960.
 [8] А.А. Власов, *Макроскопическая электродинамика*, 1955.
 [9] G. LIEBMANN, *The solution of plane stress problems by an electrical analogue method*, Brit. J. App. Phys., nr 5, 1955.
 [10] J. BOSCHER, *Résolution par analogie électrique d'équations aux dérivées partielles du quatrième ordre intervenant dans divers problèmes d'élasticité*, Publ. Scient. Techn. Air, nr 348, 1958.
 [11] T. W. G. CALVERT, *The determination of stress concentrations with an electrolytic tank model*, Brit. J. App. Phys., nr 5, 1961.

Р е з ю м е

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Синусоидально переменный ток $i = \sin I(\omega t + \varphi)$ можно рассматривать как вектор \mathbf{I} на плоскости, величина которого равняется амплитуде I , а угол, по отношению к некоторой постоянной оси координат, равняется сдвигу по фазе φ . Если к проводнику в форме тонкой пластинки, изготовленной из материала, обладающего по сравнению с проводимостью металла—значительно меньшей удельной проводимостью подвести, посредством подсоединенных к краю, металлических электрод, переменный многофазный ток, то через каждое произвольно малое сечение, сделанное перпендикулярно пластинке, проходит ток, представленный вектором, который вращается в плоскости, так, что в течение каждого периода конец вектора описывает эллипс. Автор статьи доказывает, что для описания этого факта следует принять, что плотность тока в пластинке является в каждой точке — тензором, который действуя на вектор сечения, заключающего данную точку, дает в результате вектор переменного тока как по отношению амплитуды, так и фазы, проходящего через рассматриваемое сечение. Существует строгая аналогия между тензором переменного тока в проводящей пластинке, подключенной к многофазной схеме и тензором напряжений в упругой пластинке, подверженной по контуру, действию сил, величины которых пропорциональны амплитудам многофазных токов, а углы, заключающиеся между ними, равняются углам сдвига по фазе между токами многофазной схемы. Поле тензора плотности переменного тока можно определить например с помощью предлагаемой в статье электрической схемы, дающей возможность измерить в каждой точке пластинки градиенты потенциала, пропорциональные плотности тока. Автор выясняет, кроме того, значение принципа Сен-Венана в электрическом моделировании тензора напряжений и, в качестве примера эффективности метода, приводит решение электрическим путем одного из классических вопросов теории упругости, а именно вопроса, касающегося распределения напряжений в бесконечном клине.

S u m m a r y

ELECTRICAL MODEL OF THE STRESS TENSOR

Current varying according to the sinusoidal law $i = I \sin(\omega t + \varphi)$ can be regarded as a vector \mathbf{I} on a plane. The absolute value of this vector is equal to the amplitude I , and the angle of inclination with respect to any arbitrary fixed coordinate axis is equal to the phase shift φ . If a conductor having the form of a thin plate, and made of material with a specific conductance which is much smaller than the conductivity of metal, is fed by a multiphase variable current, through metal electrodes attached to the boundary of the plate, then through any arbitrary small cross-section perpendicular to the plate the flow of current is represented by a vector which rotates in the plane so that during every period the end of the vector traces an ellipse. It is shown in the paper that in order to describe this fact it should be assumed that the current density at any point of the

plate is a tensor which being multiplied by the vector of the cross-section containing the given point yields the vector of variable current flowing through the cross-section considered, with the appropriate amplitude and phase. There exists an exact analogy between the tensor of the variable current in the conductive plate, connected with the multiphase system, and the stress tensor in an elastic plate subjected to boundary forces, provided the values of the forces are proportional to the amplitudes of the multiphase currents, while the angles between them are equal to the angles of phase shifts between the currents of the multiphase system. The tensor density field of variable current can be determined by means of the suggested electrical system which makes it possible to measure at every point of the plate the potential gradients proportional to the current density. Moreover, the author explains the meaning of the Saint-Venant principle in the electric model of the stress tensor. The method suggested is illustrated by an example of solving in the electrical way the problem of stress distribution in an infinite wedge—that is one of the classical problems of the theory of elasticity.

INSTYTUT GOSPODARKI WODNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 marca 1963 r.
