

SULLE COALIZIONI IN TEORIA DEI GIOCHI

Stefano Innamorati

Riassunto. In questo lavoro si presentano alcune correlazioni tra le Geometrie Finite e le applicazioni economiche della Teoria dei Giochi.

0. INTRODUZIONE.

Ogni distribuzione di risorse tra i membri di una organizzazione sociale provoca la formazione di coalizioni nel tentativo di risolvere i conflitti dettati da ragioni di interessi particolari o collettivi, nasce così un “gioco” tra gli individui nell’esprimere la propria decisione mirando, in una ampia visione cooperativa, all’obiettivo comune di migliorare la condizione globale di un determinato gruppo per trarne un vantaggio effettivo. Lo studio delle soluzioni di un gioco è di importanza fondamentale per le applicazioni all’analisi dei conflitti di interessi nel campo economico, militare e sociale. Una soluzione di un gioco può essere interpretata, da un punto di vista economico, come la descrizione dei possibili pagamenti che possono sorgere a seconda delle strategie e delle condizioni del mercato, oppure da un punto di vista socio-politico come l’espressione mediante votazione della volontà di una assemblea, in questo contesto, la soluzione equitabile rappresenta l’eguaglianza del voto. L’approccio combinatorico tramite l’impiego di opportune tecniche e di originali metodi di verifica ha assunto particolare rilevanza nell’indagine delle manifestazioni dei fenomeni collettivi. Scopo del presente lavoro è illustrare le mutue correlazioni tra le strutture geometrico-combinatorie e le coalizioni che esse stabiliscono, in particolare si esaminano giochi che derivano dalle geometrie a blocchi e dalla teoria delle matroidi, verificandone la risolubilità.

1. GIOCHI SEMISEMPlici.

Sia $P = \{1, \dots, n\}$ un n -insieme di elementi detti *punti* (o *giocatori*). Indichiamo con 2^P l’insieme delle parti di P ; tale insieme è detto *l’insieme delle*

coalizioni (cf. [1], [13], [15], [22]). Sia $\mathcal{W} \subseteq 2^P$. La coppia (P, \mathcal{W}) si dice *Gioco Semisemplice* [14], [20], se valgono i seguenti assiomi dovuti a Shapley (1962) [16]:

- A1. - $\mathcal{W} \neq \emptyset, \mathcal{W} \neq 2^P$.
 A2. - $\forall W \in \mathcal{W}, \forall A \in 2^P \mid W \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{W}$.
 A3. - $\forall W \in \mathcal{W} \Rightarrow W^c \notin \mathcal{W}$.

Gli elementi di \mathcal{W} si dicono *coalizioni vincenti*. L'intersezione di tutte le coalizioni vincenti, eventualmente vuota, si dice vertice del gioco e si indica con V .

Gli elementi di \mathcal{W}^c si dicono *coalizioni non vincenti*. La coppia (P, \mathcal{W}^c) è detta il *complementare di un gioco semisemplice*. L'insieme \mathcal{B} delle coalizioni B tali che

$$B, B^c \in \mathcal{W}^c \quad (1.1)$$

è detto *insieme delle coalizioni bloccanti*.

L'insieme \mathcal{L} delle coalizioni L tali che

$$L \in \mathcal{W}^c, L^c \in \mathcal{W} \quad (1.2)$$

viene chiamato *insieme delle coalizioni perdenti*. Risulta dunque:

$$\begin{cases} 2^P = \mathcal{W} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{L}; \\ \mathcal{W} \cap \mathcal{B} = \mathcal{W} \cap \mathcal{L} = \mathcal{B} \cap \mathcal{L} = \emptyset. \end{cases} \quad (1.3)$$

Un gioco si dice *semplice*, nel senso di Von Neumann e Morgenstern, se è privo di coalizioni bloccanti. Ovvero se:

$$L \in \mathcal{W}^c \Leftrightarrow L^c \in \mathcal{W} \quad (1.4)$$

Ovviamente si ha:

$$B \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{W}, B \cap W \neq \emptyset, B^c \cap W \neq \emptyset. \quad (1.5)$$

In letteratura insiemi che verificano la (1.5) si dicono *blocking sets* rispetto alla famiglia \mathcal{W} (cf. [8], [9], [10], [11], [12]).

La famiglia delle coalizioni bloccanti può essere individuata mediante una sottofamiglia di \mathcal{W} , la sottofamiglia delle coalizioni vincenti minimali. Una coalizione vincente W si dice *minimale* se non contiene propriamente alcuna

coalizione vincente. Analogamente una coalizione perdente L si dice massimale se non è contenuta propriamente in alcuna coalizione perdente. Denotiamo con μ l'insieme delle coalizioni vincenti minimali e con η l'insieme delle coalizioni perdenti massimali.

Si prova facilmente il seguente:

LEMMA 1.1 .- *Un insieme $B \in 2^P$ è un blocking set rispetto a \mathcal{W} se e solo se lo è rispetto a μ . In altre parole:*

$$B \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \forall W \in \mu \quad B \cap W \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B^c \cap W \neq \emptyset. \quad (1.6)$$

Il lemma 1.1 è un teorema di riduzione, esso permette di individuare le coalizioni bloccanti esaminando il comportamento di una coalizione solo rispetto alle minimali.

E' di notevole interesse poter stabilire se una famiglia di sottoinsiemi è l'insieme delle coalizioni perdenti o bloccanti di un qualche gioco, in altri termini se un gioco può essere definito mediante alcune proprietà delle coalizioni perdenti o bloccanti. Al riguardo si prova che:

LEMMA 1.2 .- *Sia P un insieme finito ed $\mathcal{L} \subset 2^P$. Se valgono le*

$$\mathcal{L} \neq \emptyset, \quad \mathcal{L} \neq 2^P; \quad (1.7)$$

$$\forall L \in \mathcal{L}, \quad A \in 2^P : A \subset L \Rightarrow A \in \mathcal{L}; \quad (1.8)$$

$$\forall L \in \mathcal{L}, \quad L^c \notin \mathcal{L} \quad (1.9)$$

allora \mathcal{L} è l'insieme delle coalizioni perdenti di un gioco semisemplice. Viceversa se \mathcal{L} è l'insieme delle coalizioni perdenti di un gioco semisemplice allora \mathcal{L} gode delle proprietà suindicate.

Dimostrazione.- Se $\mathcal{L} \subset 2^P$ verifica le (1.7), (1.8) ed (1.9) allora i complementari degli elementi di \mathcal{L} verificando gli assiomi A1, A2 ed A3 sono coalizioni vincenti di un gioco semisemplice. Viceversa sia \mathcal{L} l'insieme delle coalizioni perdenti di un gioco semisemplice allora la (1.7) e la (1.9) seguono per passaggio al complementare dalle A1 e A3 rispettivamente. Dimostriamo la (1.8). Sia $L \in \mathcal{L}$, $A \in 2^P$ tale che $A \subset L$ e supponiamo per assurdo che $A \notin \mathcal{L}$ allora $A \in \mathcal{W}$ oppure $A \in \mathcal{B}$ in virtù della (1.3). Se $A \in \mathcal{W}$ segue per la A2 $L \in \mathcal{W}$ contro l'ipotesi. Se $A \in \mathcal{B}$ si ha che $W \cap A \neq \emptyset$ per ogni $W \in \mathcal{W}$ ne segue che $W \cap L \neq \emptyset$ per ogni $W \in \mathcal{W}$. Allora due sono le possibilità: o esiste un $W' \in \mathcal{W}$ tale che $W' \subset L$ che implica $L \in \mathcal{W}$, oppure $W \cap L^c \neq \emptyset$ per ogni $W \in \mathcal{W}$ che implica $L \in \mathcal{B}$. In entrambe si contraddice l'ipotesi.

Nell'ambito delle coalizioni vincenti si possono distinguere quelle che contengono propriamente almeno una coalizione bloccante, che chiameremo *fortemente vincenti*, e quelle che non ne contengono alcuna, dette *semplicemente*

vincenti. In modo analogo le coalizioni perdenti contenute in almeno una coalizione bloccante si diranno *coalizioni fortemente perdenti*, le altre *semplicemente perdenti*.

Si dimostra il seguente

LEMMA 1.3. - *Sia P un insieme finito ed $\mathcal{B} \subset 2^P$. Se valgono le*

$$\mathcal{B} \neq \emptyset, \mathcal{B} \neq 2^P; \quad (1.10)$$

$$\forall B, B' \in \mathcal{B}, A \in 2^P : B \subset A \subset B' \Rightarrow A \in \mathcal{B}; \quad (1.11)$$

$$\forall B \in \mathcal{B}, B^c \in \mathcal{B}; \quad (1.12)$$

allora esistono coalizioni fortemente vincenti di un gioco semisemplice per il quale \mathcal{B} è un insieme di coalizioni bloccanti di un gioco semisemplice. Inoltre l'insieme delle coalizioni bloccanti di un gioco semisemplice verifica le (1.10) (1.11) e (1.12).

Dimostrazione. Se $\mathcal{B} \subset 2^P$ verifica le (1.10), (1.11) e (1.12) allora denotiamo con \mathcal{W} gli elementi W di 2^P tali che

$$\begin{cases} \forall B \in \mathcal{B}, W \not\subset B \\ \exists B' \in \mathcal{B} : B' \subset W. \end{cases}$$

L'insieme \mathcal{W} verifica gli assiomi A1, A2 ed A3. Infatti la A1 segue dal fatto che $P \in \mathcal{W}$ e la (1.10) implica che $\mathcal{W} \neq 2^P$. La A2 è ovvia. Dimostriamo la A3. Sia $W \in \mathcal{W}$ e supponiamo per assurdo che $W^c \in \mathcal{W}$. Esiste allora $B' \in \mathcal{B}$ tale che $B' \subset W^c$, che implica $W \subset B'^c$ ma in virtù della (1.12) $B'^c \in \mathcal{B}$ e dunque si contraddice l'ipotesi. Gli elementi di \mathcal{W} sono allora coalizioni fortemente vincenti di un gioco semisemplice. La seconda parte del lemma è ovvia.

Si possono caratterizzare le coalizioni semplicemente perdenti o semplicemente vincenti

LEMMA 1.4. - *Le coalizioni semplicemente vincenti o perdenti sono tutti e soli i blocking sets rispetto alle coalizioni bloccanti.*

Dimostrazione. Sia \mathcal{B} la famiglia delle coalizioni bloccanti di un gioco semisemplice. Denotato con \mathcal{W} l'insieme delle coalizioni vincenti, indichiamo con $\mathcal{W}^s \subseteq \mathcal{W}$ le coalizioni semplicemente vincenti, ovvero

$$\forall B \in \mathcal{B}, W \in \mathcal{W}^s \quad B \not\subset W.$$

Essendo $B \in \mathcal{B}$ si ha

$$\forall B \in \mathcal{B}, W \in \mathcal{W}^s \quad W \not\subset B,$$

onde

$$\forall B \in \mathcal{B}, W \in \mathcal{W} \quad B \not\subset W^c.$$

Ne segue

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \mathcal{B} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset, \quad B \cap W^c \neq \emptyset$$

Le coalizioni semplicemente vincenti sono blocking sets rispetto agli elementi di \mathcal{B} . In modo analogo si procede per le coalizioni semplicemente perdenti. Sia ora X un blocking sets rispetto alle coalizioni bloccanti cioè

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad X \cap B \neq \emptyset, \quad X^c \cap B \neq \emptyset.$$

Si ha ovviamente $X \notin \mathcal{B}$. Se $X \in \mathcal{W}$ allora X non potendo contenere coalizioni bloccanti è una coalizione semplicemente vincente. In modo analogo si ha che se $X \in \mathcal{L}$ allora X è una coalizione semplicemente perdente.

Ci poniamo il seguente problema: esistono strategie per bloccare la vincita a due gruppi disgiunti?

LEMMA 1.5 .- *Sia P un insieme finito. Ogni sottoinsieme proprio \mathcal{C} di 2^P chiuso rispetto all'operazione di complementazione è un sottoinsieme di coalizioni bloccanti di un gioco semisemplice se e solo se $\emptyset, P \notin \mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C} \subset 2^P$, $\mathcal{C} \neq \emptyset$ e $\mathcal{C} \neq 2^P$ tale che:

$$\forall H \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad H^c \in \mathcal{C}, \\ \emptyset, P \notin \mathcal{C}.$$

Denotiamo con \mathcal{W} gli elementi W di 2^P tali che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall H \in \mathcal{C} \quad W \not\subset H \\ \exists K \in \mathcal{C} \quad : \quad K \subset W. \end{array} \right.$$

L'insieme \mathcal{W} verifica gli assiomi A1, A2 ed A3. Dimostriamo la A1. $P \notin \mathcal{C}$ implica $P \in \mathcal{W}$ allora $\mathcal{W} \neq \emptyset$. Essendo $\mathcal{C} \neq \emptyset$ si ha $\mathcal{W} \neq 2^P$. La A2 è ovvia. Dimostriamo la A3. Sia $W \in \mathcal{W}$ e supponiamo per assurdo che $W^c \in \mathcal{W}$. Esiste allora $K \in \mathcal{C}$ tale che $K \subset W^c$, che implica $W \subset K^c$. Essendo $K^c \in \mathcal{C}$ si contraddice l'ipotesi. L'insieme \mathcal{W} è dunque un insieme di coalizioni fortemente vincenti di un gioco semisemplice. Viceversa se \emptyset, P appartenessero a \mathcal{C} il gioco risulterebbe privo di coalizioni vincenti onde l'asserto.

La seconda parte del presente paragrafo è dedicata all'analisi di alcuni esempi concreti alla luce della risolubilità del gioco.

Una soluzione § semplice principale normalizzata di un gioco (P, \mathcal{W}) è una n-pla ordinata di numeri reali non negativi tali che:

$$\xi = (x_1, \dots, x_n) \quad : \quad \begin{cases} \sum_{i \in W} x_i = 1 & \forall W \in \mu \\ \sum_{i \in H} x_i > 1 & \forall H \in \mathcal{W} \cup \mathcal{B} - \mu. \end{cases}$$

Una soluzione si dice equitabile se $x_i = x_j$ con $i \neq j$, ([17], [20]).

E' noto, cf. [3], [11], [14], che:

RISULTATO 1.6 .- *Un gioco semisemplice ha soluzioni semplici principali solo se:*

- (1) *non esistono coalizioni fortemente vincenti minimali;*
- (2) *devono esserci almeno due coalizioni vincenti che si intersecano in esattamente un punto;*
- (3) *il vertice del gioco deve avere al più un punto.*

ESEMPIO 1.7 .- Sia S un n -insieme finito e V un sottoinsieme proprio e non vuoto di S . Indichiamo con \mathcal{W} il sottoinsieme dell'insieme delle parti di S i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di S che contengono V . L'insieme \mathcal{W} verifica banalmente gli assiomi A1, A2, ed A3 e la coppia (S, \mathcal{W}) è un gioco semisemplice. Il vertice del gioco è ovviamente V . La coppia (S, \mathcal{W}) è un gioco semplice se e solo se $|V|=1$. Infatti supponiamo che la coppia (S, \mathcal{W}) non sia un gioco semplice allora $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Esiste dunque almeno un sottoinsieme B di S tale che $B \cap V \neq \emptyset$ e $B^c \cap V \neq \emptyset$. Ne segue che V ha almeno due elementi distinti. Viceversa supponiamo che V abbia almeno due elementi distinti e fissiamo un $v \in V$ l'insieme $\{v\}$ è banalmente una coalizione bloccante e pertanto la coppia (S, \mathcal{W}) non è un gioco semplice. Il gioco ammette soluzioni se e solo se è un gioco semplice. Infatti in base alla (3) del risultato 1.6 ammette soluzione solo se $|V|=1$. Viceversa se è un gioco semplice si ha $\mu = V = \{v\}$ e la n-pla $(1, 1, \dots, 1)$ è una soluzione del gioco.

ESEMPIO 1.8 .- Sia X un insieme finito. Sia $P=2^X$ l'insieme dei giocatori. Poiché l'insieme \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = \{A \in 2^P : \forall H, K \in A \quad H \cap K \neq \emptyset\},$$

soddisfa alle (1.7), (1.8) ed (1.9) definiamo \mathcal{L} come l'insieme delle coalizioni perdenti di un gioco semisemplice. Le coalizioni bloccanti sono le famiglie B

di parti di X tali che:

$$\exists H, H' \in B, K, K' \in B^c : H \cap H' = \emptyset, K \cap K' = \emptyset.$$

Poiché se $A \in \mathcal{L}$ allora $\emptyset \notin A$ risulta che \emptyset è l'elemento di ogni coalizione vincente. Inoltre se E è un elemento del vertice del gioco si ha

$$\forall A \in \mathcal{L} E \notin A \Rightarrow \{E\} \notin \mathcal{L} \Rightarrow \exists H, K \in \{E\} H \cap K = \emptyset \Rightarrow E \cap E = E = \emptyset.$$

Pertanto il gioco ha per vertice $\{\emptyset\}$ ed è un caso particolare dell'esempio 1.7.

ESEMPIO 1.9. - Sia X un n -insieme finito. Sia $P=2^X$ l'insieme dei giocatori. Poiché l'insieme \mathcal{L} delle famiglie concatenate di parti di X :

$$\mathcal{L} = \{A \in 2^P : \forall H, K \in A \ H \subseteq K\}$$

soddisfa alle (1.7), (1.8) ed (1.9) definiamo \mathcal{L} come l'insieme delle coalizioni perdenti di un gioco semisemplice. Le coalizioni bloccanti sono le famiglie B di parti di X tali che:

$$\exists H, H' \in B, K, K' \in B^c : H \neq H \cap H', K \neq K \cap K'.$$

Tale gioco non ha soluzioni. Infatti sia $C \in P$ con $\emptyset \neq C \neq X$. Ovviamente $\{C, C^c\}$ è una coalizione bloccante. Siano $c_0 \in C, c_1 \in C^c$. La famiglia di parti concatenate di X costruita nel seguente modo:

$$\emptyset \subset \{c_0\} \subset \{c_0, c_1\} \subset \{c_0, c_1, c_2\} \subset \dots \subset \{c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}\} = X$$

dove $c_i \neq c_j$ per $i \neq j$; è un elemento massimale di \mathcal{L} . La famiglia complementare è una coalizione vincente minimale che contiene la coalizione bloccante $\{C, C^c\}$. Pertanto in virtù della (1) del risultato 1.6 il gioco non ha soluzioni.

ESEMPIO 1.10. - Sia $P=2^X$ l'insieme dei giocatori come nell'esempio 1.9. La cardinalità della differenza simmetrica definisce una distanza in P :

$$\forall A, B \in P \quad d(A, B) = |A \cup B| - |A \cap B|.$$

Il diametro di un sottoinsieme di P è il massimo delle distanze fra i suoi elementi. Poiché l'insieme \mathcal{L} delle famiglie di parti di X aventi diametro minore di $|X|/2$:

$$\mathcal{L} = \{S \in 2^P : \text{diam}(S) < |X|/2\},$$

soddisfa alle (1.7), (1.8) ed (1.9) definiamo \mathcal{L} come l'insieme delle coalizioni perdenti di un gioco semisemplice. Le famiglie di parti con diametro $|X|/2$ sono le coalizioni bloccanti. Il gioco ammette soluzioni solo se $|X|$ è dispari.

2. GIOCHI DI BLOCCHI.

Sia P un insieme finito e β una famiglia di parti di P , la coppia (P, β) si dice *spazio di blocchi*. Gli elementi di S e di β si dicono rispettivamente *punti* e *blocchi*, [2], [7], [4], [18].

In virtù delle A2 e A3 le coalizioni vincenti formano quella che si chiama una famiglia di intersezione cioè una famiglia di parti a due a due intersecantisi:

$$\forall W, W' \in \mathcal{W} \Rightarrow W \cap W' \neq \emptyset. \quad (2.1)$$

Sia (P, β) uno spazio di blocchi. Se la famiglia β verifica la (2.1) si può definire un gioco semisemplice $(P, \beta+)$, dove $\beta+$ è la famiglia dei soprainsiemi di β (gli elementi di 2^P che contengono almeno un elemento di β), che si dice *gioco di blocchi*.

Uno spazio proiettivo $PG(r, q)$ di dimensione r ed ordine q rispetto all'insieme β dei sottospazi di dimensione h dove $r/2 \leq h \leq r$ è uno spazio di blocchi (P, β) verificante la (2.1). La coppia $(P, \beta+)$ è un gioco di blocchi. Esiste un'ampia bibliografia in [2] sullo studio delle coalizioni bloccanti. Sulla risolubilità relativamente al caso $h=r-1$ si può provare generalizzando un risultato contenuto in [3], che

LEMMA 2.1. - *Il gioco di blocchi generato dalla famiglia degli iperpiani di uno spazio proiettivo finito ammette un'unica soluzione e precisamente la soluzione equitabile.*

Dimostrazione. Sia (P, \mathcal{W}) il gioco di blocchi costituito dai punti di uno spazio proiettivo $PG(r, q)$ di dimensione r ed ordine q e dai soprainsiemi degli iperpiani. Esso ammette l'unica soluzione equitabile in virtù del teorema 6.1 di [3]. Inoltre le componenti di una soluzione devono soddisfare il sistema di θ_r equazioni in θ_r incognite

$$\left\{ \sum_{i \in W} x_i = 1 \quad W \in \mu; \right.$$

la cui matrice dei coefficienti è la matrice di incidenza dello spazio che ha determinante diverso da zero, cf. [4].

ESEMPIO 2.2 .- Denotiamo con P l'insieme dei punti di uno spazio affine $AG(r, q)$ di dimensione r ed ordine q . Poiché in esso nessuna famiglia di sottospazi gode della proprietà (2.1) consideriamo una famiglia di intersezione. Ad esempio possiamo prendere in esame la famiglia β delle unioni di due sottospazi non paralleli di dimensione h e k dove $h+k=r$. Supponiamo $h \leq k$. La coppia $(P, \beta+)$ è un gioco di blocchi. Tra le coalizioni bloccanti vi sono gli h -blocking sets, i k -blocking sets (cf. [5], [6], [19]) e le unioni di un h -blocking set con un sottospazio di dimensione k . Poiché un elemento di β privo di un punto è una coalizione bloccante, ogni coalizione in β è fortemente vincente. Pertanto il gioco non è risolubile in base al risultato 1.6.

ESEMPIO 2.3 .- Sia (P, β) uno spazio di blocchi, $x \in P$, denotiamo con (x) l'insieme dei blocchi passanti per x . Si definisce una distanza δ tra i punti:

$$\forall x, y \in P \quad \delta(x, y) = |(x) \cup (y) - (x) \cap (y)|.$$

Indichiamo con $\text{diam}(A)$ il diametro di un sottoinsieme A di punti ovvero il massimo delle distanze dei suoi elementi. Sia $\text{diam}(P)=p$. L'insieme \mathcal{L} di parti di P aventi diametro minore di un numero intero $d < p/2$ soddisfa alle (1.7), (1.8) ed (1.9). Si può assumere \mathcal{L} come l'insieme delle coalizioni perdenti di un gioco semisemplice. Il gioco così definito è risolubile solo se p è dispari.

ESEMPIO 2.4 .- Sia (P, β) uno spazio di blocchi, $S \subset P$ si dice di classe $[m_1, \dots, m_b]$ se $\forall B \in \beta \mid B \cap S \mid \in \{m_1, \dots, m_b\}$. Denotiamo con b la cardinalità massima di un blocco. Sia k un intero tale che $l < k < b/2$, gli insiemi di classe $[1, \dots, k]$ in virtù del lemma 1.2 definiscono un gioco semisemplice. Le coalizioni vincenti sono gli insiemi tali che ogni blocco interseca in almeno $b-k$ punti. Le coalizioni bloccanti sono quelle tali che esiste almeno un blocco che interseca in s punti con $s \leq \lfloor b/2 \rfloor$ ed esiste almeno un blocco che interseca in t punti con $t \geq \lfloor b/2 \rfloor$. Ogni coalizione vincente è fortemente vincente. Infatti sia W una coalizione vincente. Si può definire il minimo numero m di punti di intersezione tra W ed i blocchi di (P, β) . Si ha $m \geq \lfloor b/2 \rfloor$. Sia $B \in \beta$ un blocco tale che $\mid B \cap W \mid = m$. Indichiamo con p_1, p_2, \dots, p_m i punti di $B \cap W$. L'insieme $W - \{p_1, \dots, p_m\}$ dove $u = m - \lfloor b/2 \rfloor$ è una coalizione bloccante del gioco $(P, \beta+)$ poiché il blocco B interseca $W - \{p_1, \dots, p_m\}$ in esattamente $\lfloor b/2 \rfloor$ punti. In virtù del risultato 1.6 il gioco non è risolubile.

3. GIOCHI SEMIMATROIDALI.

Sia P un insieme finito ed \mathcal{F} una famiglia di parti di P . La coppia (P, \mathcal{F}) si dice matroide se valgono i seguenti assiomi dovuti a Whitney (cf. [21]):

II. - $\mathcal{F} \neq \emptyset$

I2. - $\forall I \in \mathcal{I}, \forall J \in 2^P : J \subset I \Rightarrow J \in \mathcal{I}$

I3. - $\forall I, J \in \mathcal{I}, X \in 2^P : I, J \subseteq X, \text{ massimali in } X \Rightarrow |I| = |J|$.

Gli elementi di \mathcal{I} si dicono indipendenti della matroide. Gli elementi di $2^P - \mathcal{I}$ si dicono dipendenti.

In [2] si definisce gioco matroidale un gioco semisemplice il cui gioco complementare è una matroide. Se i complementari degli indipendenti non sono indipendenti una matroide definisce un gioco semisemplice, che chiameremo gioco semimatroidale, assumendo gli elementi di \mathcal{I} come coalizioni perdenti. Ovviamente si ha:

LEMMA 3.1 .- *Un gioco semimatroidale è matroidale se e solo se è privo di blocking sets.*

ESEMPIO 3.2 .- Sia V uno spazio vettoriale su un campo K . Sia \mathcal{I} l'insieme delle parti di V costituite da vettori linearmente indipendenti. La coppia (V, \mathcal{I}) è una matroide. Indicato con \mathcal{D} l'insieme delle parti di V costituite da vettori dipendenti complementari di vettori indipendenti, la coppia (V, \mathcal{D}) è un gioco semimatroidale. Le coalizioni bloccanti sono i sottoinsiemi di V tali che essi ed i propri complementari sono formati da vettori dipendenti. Ogni sottospazio è una coalizione bloccante. E' un esempio di gioco mai semplice essendo il vettore nullo una coalizione bloccante. Sia W una coalizione perdente. Sia \overline{W} il sottospazio generato da W . Si ha $\overline{W}^c \subset W^c$. Ne segue che ogni coalizione vincente è fortemente vincente. Pertanto per la (1) del risultato 1.6 il gioco non ha soluzioni.

ESEMPIO 3.3 .- Sia V un insieme di n vertici. Supponiamo inoltre che $n \geq 5$. Sia \mathcal{G} l'insieme dei grafi su V . Sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ l'insieme dei grafi privi di cicli su V . Denotato con E l'insieme di tutti i lati su V risulta che $|E| = n(n-1)/2$. Essendo $n \geq 5$ i complementari degli elementi di \mathcal{A} non appartengono ad \mathcal{A} . Infatti un grafo su n vertici senza cicli ha al più $n-1$ lati. Pertanto il complementare ha almeno $n(n-1)/2 - (n-1) = (n-1)(n-2)/2$ lati. Tale numero è maggiore di $n-1$ per $n \geq 5$. Ne segue che indicato con \mathcal{B} l'insieme dei grafi che contengono almeno un ciclo la coppia (E, \mathcal{B}) è un gioco semimatroidale. Le coalizioni bloccanti sono i grafi con cicli i cui complementari hanno cicli. Un grafo G privo di cicli su V avendo al più $n-1$ lati ha un grafo G' con n lati che lo contiene. Poiché G' è una coalizione bloccante e $G'^c \subset G^c$, si ha che ogni coalizione vincente del gioco è fortemente vincente. Il gioco pertanto non ha soluzioni in virtù della (1) del risultato 1.6.

BIBLIOGRAFIA

1. K.J.ARROW, *Social Choise and Individual Values*, J. Wiley and Sons, New York, 1951, 2nd edition, 1963.
2. L.BERARDI-F.EUGENI, *Blocking sets e Teoria dei Giochi*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 34 (1988), 165-196.
3. L.BERARDI-F.EUGENI, *Blocking sets and game theory II*, Proc. "Blocking sets", Giessen 1989, Springer verlag to appear.
4. T.BETH-D.JUNGNICKEL-M.LENZ, *Design Theory*, Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zurich, 1985.
5. A.BEUTELSPACHER, *Blocking sets and partial spreads in finite projective space*, Math.Z. 145 (1975), 211- 229.
6. A.BRUEN, *Blocking sets in finite projective planes*, SIAM J. Appl. Math. 23 (1971), 380-392.
7. M.CERASOLI-F.EUGENI-M.PROTASI, *Introduzione alla Matematica Discreta*, Zanichelli Bologna, 1988.
8. J.DI PAOLA, *On a restricted class of block design games*, Canad. J. Math. 18 (1966), 225-236.
9. J.DI PAOLA, *On minimum blocking coalitions in small projective plane games*, SIAM J. Appl. Math. 17 (1969), 378-392.
10. G.EBERT, *Blocking sets in projective spaces*, Canad. J. Math. 4 (1978), 856-862.
11. A.J.HOFFMAN-M.RICHARDSON, *Block design games*, Canad. J. Math. 13 (1961), 110-128.
12. F.MAZZOCCA-G.TALLINI, *On the non existence of blocking sets in PG (n, q) and AG (n, q) for all large enogh n*, Simon Stelvin 1 (1985), 43-50.
13. G.PICKERT, *Abstimmungssysteme und taktische konfigurationen*, Atti Convegna Lincei: "Teorie Combinatorie", Roma 1973, vol. II, 17 (1976), 235-248.
14. M.RICHARDSON, *On finite projective games*, Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956), 458-465.
15. J.ROSENMULLER, *Some topics of cooperative Game Theory*, in Modern Applied Math. - Opti. & Op. Res.- North Holland 1982.
16. L.S.SHAPLEY, *Simple Games - An outline of the Theory*, Rand Corporation P-series Report, 1962.
17. G.P.SZEGO-G.GAMBARELLI, *Discontinuos solutions in n-persons Games*, in "New quantitative techniques for Economic Analysis", Accademic Press 1982.
18. G.TALLINI, *Geometrie d' incidenza e matroidi*, IAC Roma, Quad. Serie III - N. 127 (1981), 1-34.
19. G.TALLINI, *On blocking sets in finite projective and affine spaces*, Annals of Discrete Math. 37 (1988), 433-450.

20. J.VONNEUMANN-O.MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton Univ. Press, Princeton, 2^d ed., 1947.
21. H.WHITNEY, *On the abstract properties of linear dependence*, Amer. J. Math. 57, 507-533 (1935).
22. H.ZEITLER, *Koalitionbildung bei Abstimmungen*, Math. Phys. Semesterberichte 20 (1973), 86-113.